ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

42

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.
1920

PARIS
A. HERMANN ET FILS.
6 RUE DE LA SORBONNE.

UPPSALA 1920
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

INHALTSVERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 42. — 1920. — TOME 42.

ZUR THEORIE DER LINEAREN GLEICHUNGEN.

VON

E. STUDY

in BONN.

Die Determinantentheorie liefert die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen nicht immer in zweckmässiger Form. Ein geläufiges Beispiel dafür bildet das Multiplikationstheorem der Quaternionen,

$$\alpha_0\alpha'_0 - \alpha_1\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_2 - \alpha_3\alpha'_3 = \alpha''_0,$$

$$\alpha_0\alpha'_1 + \alpha_1\alpha'_0 + \alpha_2\alpha'_3 - \alpha_3\alpha'_2 = \alpha''_1,$$

$$\alpha_0\alpha'_2 + \alpha_2\alpha'_0 + \alpha_3\alpha'_1 - \alpha_1\alpha'_3 = \alpha''_2,$$

$$\alpha_0\alpha'_3 + \alpha_3\alpha'_0 + \alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1 = \alpha''_3.$$

Fasst man dieses häufig auftretende Formelsystem als ein System von Gleichungen für die Unbekannten α'_k oder α_k, so wird die zugehörige Determinante in beiden Fällen das Quadrat eines Ausdrucks, der von den Koeffizienten der Unbekannten rational abhängt, nämlich das Quadrat der Norm der Quaternion α oder α',

$$N\alpha = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

$$N\alpha' = \alpha'^2_0 + \alpha'^2_1 + \alpha'^2_2 + \alpha'^2_3.$$

Ein Faktor $N\alpha$ oder $N\alpha'$ geht dann auch in die Zähler der Determinantenausdrücke für die Unbekannten ein, und erst nach Wegschaffung dieses überflüssigen und sehr störenden Faktors erhält man die Lösung, falls sie existiert, in brauchbarer Form — eben der, die in der Quaternionenrechnung überall angewendet wird.

Die Beseitigung des fremden Faktors bietet nun zwar in diesem Falle noch keine Schwierigkeit. Indessen sind Vorkommnisse derart sehr häufig, ja sie

bilden in der Lehre von den sogenannten höheren komplexen Grössen, d. h. in der Theorie gewisser Transformationsgruppen, die Regel. Man kennt aber keine praktikabele Methode, die Zerlegung einer beliebigen ganzen rationalen Funktion in ihre irreduzibelen Faktoren zu bewirken, oder die mehreren solchen Funktionen gemeinsamen Teiler zu bestimmen, und es ist auch nicht anzunehmen, dass es eine solche Methode gibt. Die Theorie des grössten gemeinsamen Teilers führt zu unüberwindlichen Schwierigkeiten wohl in allen Fällen, die ein selbständiges Interesse haben, nämlich nicht zur Erläuterung der Theorie schulmässig zurechtgeschnitten sind. Daher bedarf die Lehre von der Auflösung linearer Gleichungen einer Weiterbildung in besonderen Richtungen, wobei natürlich die Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten zu Beschränkungen nöthigen wird. Einige solche Fortsetzungen der allgemeinen Theorie liegen auch schon vor, so die Auflösungstheorie von Gleichungen mit schief-symmetrischer Determinante.

In der folgenden Untersuchung werden namentlich gewisse Systeme von $4m$ linearen Gleichungen mit $4m$ Unbekannten behandelt, Systeme die übrigens denselben Grad von Allgemeinheit haben wie irgend welche Systeme von $2m$ Gleichungen mit $2m$ Unbekannten. Die Gleichungen selbst, sowie ihre Koeffizienten und Unbekannten sind zu vieren zusammengefasst, derart, dass m »symbolische» Gleichungen der Form

$$\sum_k \alpha_{ik} x_k = \text{konst., oder} \sum_i \xi_i \alpha_{ik} = \text{konst.}$$

entstehen, in denen die Koeffizienten wie die Unbekannten *Quaternionen* oder *zweireihige Matrices* sind. Die Unbekannten stehen immer auf derselben Seite der Koeffizienten.

Gleichungen oder Gleichungssysteme ähnlicher Form kann man offenbar in jedem System höherer komplexer Grössen bilden; von einigen weniger lohnenden Beispielen abgesehen, ist es mir aber nur im bezeichneten Falle gelungen, eine brauchbare Lösungstheorie zu entwickeln. In dieser vertritt die Stelle der Determinante eine hier ∇ (*Nabla*) genannte Funktion, die Quadratwurzel aus der Determinante der $4m$ Gleichungen ist, die selbst als Determinante vom Grade $2m$ aufgefasst werden kann, *mit der aber auf ähnliche Weise gerechnet wird, wie mit Determinanten vom Grade m.* Im Falle $m = 1$ reduziert sich ∇ auf die Norm einer Quaternion, oder auf die Determinante einer zweireihigen Matrix. Homogene Gleichungen, sowie unvollständige und übervollständige Systeme von Gleichungen der bezeichneten Form, deren Theorie hier besondere Schwierigkeiten zu bieten scheint, jedenfalls ziemlich umfangreich ausfallen muss, sind ausser Betracht gelassen werden.

Meinem Kollegen I. Schur bin ich zu Dank verpflichtet für das Interesse, mit dem er die Entstehung der vorliegenden Untersuchung begleitet hat. Von ihm rührt der Satz her, dass (im genannten Falle der Quaternionen) die ∇-Funktion nicht als Summe von Quadraten dargestellt werden kann.

Ich hoffe, dass das Folgende behaglich zu lesen sein wird. Durch gewisse Umstellungen verbunden mit einer Erhöhung des vom Leser zu fordernden Masses von Kenntnissen würde sich grössere Kürze haben erzielen lassen. Aber eine auf Kosten der Lesbarkeit zu erreichende Kürze ist schliesslich doch wohl der Güter höchstes nicht.

I.

Quaternionen und Matrices.

Die Regeln der Quaternionenrechnung, sowie das Rechnen mit Matrices (oder bilinearen Formen) setze ich als bekannt voraus, erkläre aber kurz die Bedeutung der Zeichen, die weiterhin gebraucht werden.

Eine Quaternion wird nach dem Schema

$$x = Sx + Vx,$$

$$Sx = x_0, \quad Vx = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

in einen skalaren (Sx) und einen vektoriellen Bestandteil (Vx) zerlegt. Die Konjugierte ($Sx - Vx$) zur Quaternion x wird gewöhnlich ebenfalls durch eine Art von Funktionszeichen, K, dargestellt (Kx). Da aber das Rechnen mit diesem Zeichen meistens sehr unbequem ist, und zu einer unübersichtlichen Schreibart der Formeln führt, brauche ich *daneben*, und zwar vorzugsweise, auch ein anderes, das an die übliche Bezeichnung für die Konjugierte zu einer gewöhnlichen komplexen Grösse erinnern soll. Ich schreibe nämlich

$$\tilde{x} = Kx = Sx - Vx = x_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3,$$

und also

$$Sx = \frac{1}{2}\{x + \tilde{x}\}, \quad Vx = \frac{1}{2}\{x - \tilde{x}\}.$$

Die *Norm* einer Quaternion wird hiernach

$$Nx = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x\tilde{x} = \tilde{x}x.$$

Ist $Nx \neq 0$, was bei einer von Null verschiedenen *reellen* Quaternion (einer solchen mit reellen Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3) immer eintritt, so ist

$$x^{-1} = \frac{\tilde{x}}{Nx}.$$

Besonders in Erinnerung gebracht seien die im Folgenden viel benutzten Regeln:

$$K(xy) = Ky \cdot Kx = \tilde{y}\tilde{x}, \; S(xy) = S(yx).$$

Nach der zweiten dieser Regeln können im skalaren Bestandteil irgend eines Quaternionenprodukts die Faktoren *zyklisch* vertauscht werden; z. B.

$$S(xyz) = S(yzx) = S(zxy).$$

Die Rechnung mit solchen Quaternionen, deren Koordinaten (gewöhnliche) *komplexe* Grössen sind, ist bekanntlich äquivalent dem Rechnen mit zweireihigen Matrices, deren Koeffizienten ebenfalls *komplexe* Grössen sind. Man erhält diesen schon von Laguerre (1867; Cayley 1879) gefundenen Zusammenhang durch Änderung der Quaternionenbasis, indem man nämlich an Stelle der Haupteinheit ($e_0 = 1$) und der Nebeneinheten (e_1, e_2, e_3) der Quaternionen geeignete neue Einheiten einführt; wenn man (zum Beispiel)

$$e_0 = e_{11} + e_{22}, \; e_1 = i(e_{12} + e_{21}), \; e_2 = -(e_{12} - e_{21}), \; e_3 = i(e_{11} - e_{22})$$

und also

$$2e_{11} = e_0 - ie_3, \; 2e_{12} = -ie_1 - e_2, \; 2e_{21} = -ie_1 + e_2, \; 2e_{22} = e_0 + ie_3$$

setzt.

Die Multiplikationsregeln für die ursprünglichen Einheiten

$$e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1, \; e_0 e_2 = e_2 e_0 = e_2, \; e_0 e_3 = e_3 e_0 = e_3,$$
$$e_0^2 = e_0, \; e_1^2 = -e_0, \; e_2^2 = -e_0, \; e_3^2 = -e_0,$$
$$e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1, \; e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2, \; e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$$

gehen dann über in die Regeln

$$e_{ij} e_{jk} = e_{ik}, \quad e_{ij} e_{kl} = 0 \; (j \neq k),$$

d. h. in die Multiplikationsregeln der zweireihigen Matrices

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

oder auch der speziellen bilinearen Formen

$$\xi_1 \omega_1, \quad \xi_1 \omega_2, \quad \xi_2 \omega_1, \quad \xi_2 \omega_2;$$

das Eingangs aufgeführte Multiplikationstheorem für Quaternionen nimmt, wenn

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \\ &= \alpha_{11} e_{11} + \alpha_{12} e_{12} + \alpha_{21} e_{21} + \alpha_{33} e_{32} \quad \text{(u. s. w.)} \end{aligned}$$

gesetzt wird, die gewöhnlich in der symbolischen Gleichung

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_{11} \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} \alpha'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha''_{11} \alpha''_{12} \\ \alpha''_{21} \alpha''_{22} \end{pmatrix}$$

abgekürzte Form des Multiplikationstheorems der zweireihigen Matrices an,

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\alpha'_{11} + \alpha_{12}\alpha'_{21} &= \alpha''_{11}, \qquad & \alpha_{11}\alpha'_{12} + \alpha_{12}\alpha'_{22} &= \alpha''_{12}, \\ \alpha_{21}\alpha'_{11} + \alpha_{22}\alpha'_{21} &= \alpha''_{21}, \qquad & \alpha_{21}\alpha'_{12} + \alpha_{22}\alpha'_{22} &= \alpha''_{22}; \end{aligned}$$

oder endlich, man erhält die Formel für die ebenfalls so genannte Multiplikation (Komposition) bilinearer Formen

$$\sum \alpha_{ik} \xi_i \omega_k \cdot \sum \alpha'_{ik} \xi_i \omega_k = \sum \alpha''_{ik} \xi_i \omega_k.$$

Ein unwesentlicher Unterschied zwischen beiden Theorien besteht insofern, als es in der Theorie der Matrices nicht allgemein üblich und in der Theorie der bilinearen Formen auch nicht überall angängig ist, die der Haupteinheit (e_0) der Quaternionen entsprechende *Einheitsmatrix* oder *Einheitsform*,

$$e_{11} + e_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 \omega_1 + \xi_2 \omega_2$$

mit der Einheit des gewöhnlichen Rechnens zu identifizieren (wie es in der Quaternionentheorie ziemlich allgemein geschieht).

Führt man auf die beschriebene Art, also durch die Substitutionen

$$2x_0 = x_{11} + x_{22}, \; 2x_1 = -i(x_{12} + x_{21}), \; 2x_2 = -x_{12} + x_{21}, \; 2x_3 = -i(x_{11} - x_{22}),$$

$$x_0 + i x_3 = x_{11}, \; i x_1 - x_2 = x_{12}, \; i x_1 + x_2 = x_{21}, \; x_0 - i x_3 = x_{22}$$

den Übergang zu Matrices oder bilinearen Formen aus, so erhalten damit die Zeichen der Quaternionentheorie eine andere Bedeutung. Stellt x eine Matrix vor,

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

so wird

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_{22}, & -x_{12} \\ -x_{21}, & x_{11} \end{pmatrix},$$

und (bei Unterdrückung der Einheitsmatrix)

$$Sx = \frac{1}{2}(x_{11} + x_{22}),\quad Vx = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_{11} - x_{22}, & 2x_{12} \\ 2x_{21}, & x_{22} - x_{11} \end{pmatrix},$$

$$x = Sx + Vx,\quad \tilde{x} = Sx - Vx,$$

ferner

$$Nx = x\tilde{x} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21},$$

und, zum Beispiel

$$x\tilde{y} = \begin{pmatrix} x_{11}y_{22} - x_{12}y_{21}, & -x_{11}y_{12} + x_{12}y_{11} \\ x_{21}y_{22} - x_{22}y_{21}, & -x_{21}y_{12} + x_{22}y_{11} \end{pmatrix}.$$

Es gelten dieselben Regeln wie zuvor, zum Beispiel

$$S(xyz) = S(yzx) = S(zxy). —$$

Die Quaternionenrechnung ist also, wie gesagt, dem Rechnen mit zweireihigen Matrices oder mit den entsprechenden bilinearen Formen äquivalent. Es ist aber wohl zu beachten, dass die lineare Transformation, die den Übergang vom einen Kalkul zum anderen vermittelt, ein imaginäres Koeffizientensystem hat, und zwar eines aus dem Rationalitätsbereich $\{\sqrt{-1}\}$. Daher findet ein vollkommenes Entsprechen nur im komplexen Gebiete statt. Die Norm einer nicht verschwindenden *reellen Quaternion* zum Beispiel ist stets positiv, während die Determinante $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$ einer *reellen zweigliedrigen Matrix*, d. i. einer solchen mit reellen Elementen oder Koordinaten $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ positiv, Null, oder negativ sein kann. Eben hierauf beruht das eigenthümliche Interesse, *die Selbständigkeit der Quaternionentheorie*, gegenüber dem Rechnen mit zweireihigen Matrices, das besonders in gewissen Anwendungen (auf Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie) dem Bedürfnis nach einem sachgemässen analytischen Apparat keineswegs ebensogut gerecht werden kann, wie die Quaternionen.

Weiterhin kann, wo nicht das Gegenteil bemerkt ist, mit den vorkommenden Zeichen ebensowohl der Begriff zweireihiger Matrices wie der von Quaternionen verbunden werden.

Doppelindizes, die bisher zur Unterscheidung der vier Koordinaten oder Elemente einer zweireihigen Matrix gedient haben, werden fernerhin in anderem Sinne, nämlich zur Unterscheidung mehrerer Matrices oder Quaternionen gebraucht. Nachdem nämlich die Elemente der Theorie gegeben sind, ist es meistens nicht nöthig, und gewöhnlich auch nicht förderlich, eine Quaternion oder Matrix in ihre Bestandteile zu zerlegen. Vielmehr beruht, wie viel oder wenig an der auszuführenden Betrachtung Brauchbares sein mag, dieses gerade auf der Zusammenfassung von vier stets verbunden auftretenden Grössen durch Gebrauch eines einzigen Zeichens für sie alle, und auf der *ausschliesslichen* Verwendung einiger weniger Operationssymbole (S und K).

2.

Einseitige Quaternionengleichungen mit zwei Unbekannten.

Wir betrachten gleichzeitig die folgenden beiden Systeme linearer Gleichungen für Quaternionen, in denen die Unbekannten x_1, x_2 oder ξ_1, ξ_2 jedesmal auf derselben Seite eines Quaternionenprodukts stehen, und die deshalb *einseitige* Quaternionengleichungen genannt werden sollen:

$$(1^l)\qquad \begin{aligned} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2 &= x'_1,\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2 &= x'_2;\end{aligned}$$

$$(1^r)\qquad \begin{aligned} \xi'_1 &= \xi_1\alpha_{11}+\xi_2\alpha_{21},\\ \xi'_2 &= \xi_1\alpha_{12}+\xi_2\alpha_{22}.\end{aligned}$$

Jedes dieses Gleichungspaare ist eine Abkürzung oder Zusammenfassung eines Systems von acht gewöhnlichen linearen Gleichungen für acht Unbekannte, nämlich für die Koordinaten der Quaternionen x_1, x_2 oder ξ_1, ξ_2, eines Gleichungssystems, das mit Hilfe des Multiplikationstheorems der Quaternionen sofort hingeschrieben werden kann. Man sieht daraus, dass beide Gleichungssysteme dieselbe Determinante D haben, und dass sie also beide zugleich eindeutig-auflösbar sind, oder nicht. Es würde aber, wie schon angedeutet, ein unglücklicher Gedanke sein, sich bei Behandlung eines solchen Gleichungssystems auf die Formeln der allgemeinen Theorie linearer Gleichungen versteifen zu wollen. Eine viel brauchbarere Methode liefert die Quaternionenrechnung selbst.

Wir werden uns hier auf die Hauptfrage beschränken, unter welchen Umständen die Gleichungen (1) *eindeutig* aufgelöst werden können, und wie dann diese

Lösung (x_1, x_2) oder (ξ_1, ξ_2) durch die Quaternionen $\alpha_{i\varkappa}$ und (x'_1, x'_2) oder (ξ'_1, ξ'_2) ausgedrückt werden kann.[1]

Das nächstliegende Verfahren besteht darin, aus einer der Gleichungen die eine Unbekannte durch die andere auszudrücken, und dann, nach Substitution des gefundenen Ausdrucks in die andere Gleichung, die zweite Unbekannte zu berechnen. Man findet so zum Beispiel:

$$x_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12}\,\alpha_{22}^{-1}\,\alpha_{21})^{-1} \quad (x'_1 - \alpha_{12}\,\alpha_{22}^{-1}\,x'_2),$$
$$x_1 = (\alpha_{21} - \alpha_{22}\,\alpha_{12}^{-1}\,\alpha_{21})^{-1} \quad (x'_2 - \alpha_{22}\,\alpha_{12}^{-1}\,x'_1).$$

Aber dieses Verfahren unterliegt, ausser anderen Bedenken, dem schwerwiegenden Einwand, dass es versagt, wenn die erforderten Divisionen nicht ausführbar sind, während vielleicht trotzdem eine Lösung (x_1, x_2) vorhanden ist.[2]

Wir führen die Elimination von einer der Veränderlichen zunächst etwas zweckmässiger so aus:

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
&(\alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{12}\ \ \alpha_{11} - \alpha_{12}\,\tilde{\alpha}_{12}\,.\,\alpha_{21})\,x_1 = \alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{12}\ \ x'_1 - \alpha_{12}\,\tilde{\alpha}_{12}\,.\,x'_2,\\
&(\alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{22}\,.\,\alpha_{11} - \alpha_{12}\,\tilde{\alpha}_{22}\ \ \alpha_{21})\,x_1 = \alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{22}\,.\,x'_1 - \alpha_{12}\,\tilde{\alpha}_{22}\ \ x'_2,\\
&(\alpha_{21}\,\tilde{\alpha}_{11}\ \ \alpha_{12} - \alpha_{11}\,\tilde{\alpha}_{11}\,.\,\alpha_{22})\,x_2 = \alpha_{21}\,\tilde{\alpha}_{11}\ \ x'_1 - \alpha_{11}\,\tilde{\alpha}_{11}\,.\,x'_2,\\
&(\alpha_{21}\,\tilde{\alpha}_{21}\,.\,\alpha_{12} - \alpha_{11}\,\tilde{\alpha}_{21}\ \ \alpha_{22})\,x_2 = \alpha_{21}\,\tilde{\alpha}_{21}\,.\,x'_1 - \alpha_{11}\,\tilde{\alpha}_{21}\ \ x'_2.
\end{aligned}
$$

Berechnen wir nun die Normen der Faktoren links, so findet sich, dass sie alle reduzibel sind und einen gemeinsamen Teiler haben. Setzen wir nämlich

$$
(3) \qquad \nabla = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Bmatrix} = \alpha_{11}\,\tilde{\alpha}_{11}\,\alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{22} - \alpha_{11}\,\tilde{\alpha}_{21}\,\alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{12}\,\tilde{\alpha}_{22}\,\alpha_{21}\,\tilde{\alpha}_{11} + \alpha_{12}\,\tilde{\alpha}_{12}\,\alpha_{21}\,\tilde{\alpha}_{21},
$$

so folgt

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
&N\,(\alpha_{21}\,\tilde{\alpha}_{11}\ \ \alpha_{12} - \alpha_{11}\,\tilde{\alpha}_{11}\,.\,\alpha_{22}) = N\,\alpha_{11}\cdot\nabla,\\
&N\,(\alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{12}\ \ \alpha_{11} - \alpha_{12}\,\tilde{\alpha}_{12}\,.\,\alpha_{21}) = N\,\alpha_{12}\cdot\nabla,\\
&N\,(\alpha_{21}\,\tilde{\alpha}_{21}\,.\,\alpha_{12} - \alpha_{11}\,\tilde{\alpha}_{21}\ \ \alpha_{22}) = N\,\alpha_{21}\cdot\nabla,\\
&N\,(\alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{22}\,.\,\alpha_{11} - \alpha_{12}\,\tilde{\alpha}_{22}\ \ \alpha_{21}) = N\,\alpha_{22}\cdot\nabla.
\end{aligned}
$$

[1] Eine eingehendere Untersuchung der Gleichungssysteme (1) wird man in einer in Vorbereitung begriffenen Schrift finden, in der auch eine geometrische Anwendung besprochen wird.

[2] So verhält es sich im Bespiel

$$2\,\alpha_{11} = 2\,\alpha_{22} = e_2 + i\,e_3,$$
$$2\,\alpha_{21} = 2\,\alpha_{12} = e_2 - i\,e_3.$$

Das Nicht-Verschwinden des skalaren Ausdrucks ∇ (Sprich: *Nabla*) wird also vermutlich die Bedingung für die Möglichkeit einer eindeutigen Auflösung der Gleichungen (1) sein. Dies bestätigt sich sofort, wenn wir bemerken, dass ∇ sich mit Hilfe der Multiplikatoren $-\tilde{\alpha}_{21}, \tilde{\alpha}_{11}$ und $-\tilde{\alpha}_{22}, \tilde{\alpha}_{12}$ aus den Koeffizienten von x_1, x_2 in obigen Ausdrücken zusammensetzen lässt. Wir erhalten dann, falls $\nabla \neq 0$ ist, die Auflösung unserer Gleichungen in den Formeln

$$(5)\quad \begin{aligned} (\tilde{\alpha}_{22}\alpha_{22}\,.\,\tilde{\alpha}_{11} - \tilde{\alpha}_{21}\alpha_{22}\tilde{\alpha}_{12})\,x'_1 + (\tilde{\alpha}_{12}\alpha_{12}\,.\,\tilde{\alpha}_{21} - \tilde{\alpha}_{11}\alpha_{12}\tilde{\alpha}_{22})\,x'_2 &= \nabla\cdot x_1 \\ (\tilde{\alpha}_{21}\alpha_{21}\,.\,\tilde{\alpha}_{12} - \tilde{\alpha}_{22}\alpha_{21}\tilde{\alpha}_{11})\,x'_1 + (\tilde{\alpha}_{11}\alpha_{11}\,.\,\tilde{\alpha}_{22} - \tilde{\alpha}_{12}\alpha_{11}\tilde{\alpha}_{21})\,x'_2 &= \nabla\cdot x_2 \\ \xi_1\cdot\nabla = \xi'_1(\tilde{\alpha}_{22}\alpha_{22}\,.\,\tilde{\alpha}_{11} - \tilde{\alpha}_{21}\alpha_{22}\tilde{\alpha}_{12}) + \xi'_2(\tilde{\alpha}_{21}\alpha_{21}\,.\,\tilde{\alpha}_{12} - \tilde{\alpha}_{22}\alpha_{21}\tilde{\alpha}_{11}), \\ \xi_2\cdot\nabla = \xi'_1(\tilde{\alpha}_{12}\alpha_{12}\,.\,\tilde{\alpha}_{21} - \tilde{\alpha}_{11}\alpha_{12}\tilde{\alpha}_{22}) + \xi'_2(\tilde{\alpha}_{11}\alpha_{11}\,.\,\tilde{\alpha}_{22} - \tilde{\alpha}_{12}\alpha_{11}\tilde{\alpha}_{21}). \end{aligned}$$

Es folgt natürlich auch, dass im Falle $\nabla \neq 0$ die Gleichungen (1) nicht noch andere Lösungen zulassen können, als die gefundenen (x_1, x_2) und (ξ_1, ξ_2).

Aus $\nabla \neq 0$ folgt also $D \neq 0$. Aber auch das Umgekehrte ist richtig. Gäbe es nämlich Wertsysteme der Koordinaten der Quaternionen $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{22}$, für die $D \neq 0$ aber $\nabla = 0$ wäre, so müsste es auch solche geben, für die $\nabla \neq 0$ aber $D = 0$ wäre, während wir soeben das Gegenteil bewiesen haben.

Die Ungleichung $\nabla \neq 0$ stellt also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, dass die Gleichungen (1) *eindeutig nach den Unbekannten x_1, x_2 oder ξ_1, ξ_2 aufgelöst werden können.*

Weiter folgt noch, dass jede der Gleichungen $\nabla = 0$, $D = 0$ die andere nach sich zieht. *Die Funktion ∇ aber ist eine irreduzibele Funktion der sechzehn Koordinaten der Quaternionen $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{22}$.* Man sieht das an dem Spezialfall

$$\begin{Bmatrix} \xi & 1 \\ 1 & \eta \end{Bmatrix} = N\xi\cdot N\eta - 2\,S(\xi\eta) + 1$$

der offenbar eine irreduzibele Funktion vierten Grades darstellt. Auf Grund eines bekannten Satzes schliesst man hieraus, dass

$$(6)\qquad D = \nabla^2$$

sein muss.

Die Lösung (5) *der Gleichungen* (1) *ist also wesentlich einfacher als die, die eine Anwendung der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen, wenigstens unmittelbar, geliefert haben würde; diese gibt (x_1, x_2) und (ξ_1, ξ_2) mit dem Faktor ∇ in Zähler und Nenner, der bei der vorliegenden Behandlung des Gegenstandes gar nicht erst aufgetreten ist.*

Ist $\bigtriangledown = 0$, so folgt, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 = 0, \qquad && 0 = \xi_1 \alpha_{11} + \xi_2 \alpha_{21}, \\ &\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 = 0, \qquad && 0 = \xi_1 \alpha_{12} + \xi_2 \alpha_{22} \end{aligned} \tag{7}$$

von $(0, 0)$ verschiedene Lösungen zulassen, und dass also die Gleichungen (1) entweder unendlich viele Lösungen haben, oder eine unerfüllbare Forderung enthalten. Wir gehen nicht weiter auf diesen Grenzfall ein, der übrigens keineswegs ohne Interesse ist.

Nunmehr kehren wir den bisher verfolgten Gedankengang um. Wir gehen jetzt von der Funktion $\bigtriangledown$, die eine homogene Funktion vierten Grades ihrer sechzehn Argumente ist, als dem Gegebenen aus, versuchen, ihr Bildungsgesetz aufzuklären und *aus diesem* zu erschliessen, dass sie zur Auflösung von Quaternionengleichungen des Typus (1) brauchbar ist.

Den Ausgangspunkt bildet hier die Bemerkung, dass der Ausdruck der Funktion $\bigtriangledown$ in mannigfacher Weise variiert werden kann. Es ist ja

$$\alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12} + \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11} = 2\, S\,(\alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12}) = 2\, S\,(\alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11}),$$

und in jedem der hinter den Zeichen S stehenden Quaternionenprodukte können die Faktoren zyklisch vertauscht werden. Daher lässt sich $\bigtriangledown$, nach Auszeichnung einer Zeile oder Kolonne in der Quaternionenmatrix $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, als eine Art von bilinearer Form darstellen, zum Beispiel

$$\bigtriangledown = \alpha_{11} (\tilde{\alpha}_{22} \alpha_{22}) \tilde{\alpha}_{11} - \alpha_{11} (\tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22}) \tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{12} (\tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21}) \tilde{\alpha}_{11} + \alpha_{12} (\tilde{\alpha}_{21} \alpha_{21}) \tilde{\alpha}_{12}, \tag{8}$$

und daher auch, zum Beispiel, in der Form $\alpha_{11} A_{11} + \alpha_{12} A_{12}$. Wir führen die Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_{11} &= \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{22} \,.\, \tilde{\alpha}_{11} - \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{22} \tilde{\alpha}_{12}, \qquad & A_{12} &= \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{21} \,.\, \tilde{\alpha}_{12} - \tilde{\alpha}_{22} \alpha_{21} \tilde{\alpha}_{11}, \\ A_{21} &= \tilde{\alpha}_{12} \alpha_{12} \,.\, \tilde{\alpha}_{21} - \tilde{\alpha}_{11} \alpha_{12} \tilde{\alpha}_{22}, \qquad & A_{22} &= \tilde{\alpha}_{11} \alpha_{11} \,.\, \tilde{\alpha}_{22} - \tilde{\alpha}_{12} \alpha_{11} \tilde{\alpha}_{21} \end{aligned} \tag{9}$$

ein, und erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_{11} A_{11} + \alpha_{12} A_{12} &= \bigtriangledown, \qquad & \alpha_{11} A_{21} + \alpha_{12} A_{22} &= 0, \\ \alpha_{21} A_{11} + \alpha_{22} A_{12} &= 0, \qquad & \alpha_{21} A_{21} + \alpha_{22} A_{22} &= \bigtriangledown, \\ \bigtriangledown &= A_{11} \alpha_{11} + A_{21} \alpha_{21}, \qquad & 0 &= A_{12} \alpha_{11} + A_{22} \alpha_{21}, \\ 0 &= A_{11} \alpha_{12} + A_{21} \alpha_{22}, \qquad & \bigtriangledown &= A_{12} \alpha_{12} + A_{22} \alpha_{22}. \end{aligned} \tag{10}$$

Auf Formeln, die eine ganz ähnliche Struktur haben, wie die Gleichungs-

systeme (10), beruht nun die Auflösung der gewöhnlichen Systeme linearer Gleichungen mit Hilfe der Determinanten. Die gleiche Überlegung führt auch hier zum Ziele: Wir erhalten nun nochmals die Auflösung unserer Gleichungen (1), in den Formeln

$$(11) \qquad \begin{aligned} A_{11} x'_1 + A_{21} x'_2 &= \nabla \cdot x_1, & \qquad \xi_1 \cdot \nabla &= \xi'_1 \cdot A_{11} + \xi'_2 \cdot A_{12}, \\ A_{12} x'_1 + A_{22} x'_2 &= \nabla \cdot x_2, & \qquad \xi_2 \cdot \nabla &= \xi'_1 \cdot A_{21} + \xi'_2 \cdot A_{22}. \end{aligned}$$

Zu einer sachgemässen Auflösung der Gleichungen (1) *ist also nur nötig, dass man auf irgend einem Wege zu der Funktion* ∇ *gelangt ist.*

Die Analogie unserer Funktion ∇ mit zweireihigen Determinanten, die hier zum Vorschein gekommen ist, geht nun noch viel weiter. Man darf in ihr die beiden Reihen und die beiden Spalten (Horizontal- und Vertikalreihen) vertauschen, doch ohne Vorzeichenwechsel (nicht aber auch Reihen mit Spalten). Ferner nimmt ∇ den Wert Null an, wenn die zwei Reihen oder die zwei Spalten mit einander identisch werden. Die Funktion ∇ ändert ihren Wert nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe ein *vorderes* (*linkseitiges*) Multiplum der anderen Reihe, oder zu den Elementen einer Spalte ein *hinteres* (*rechtseitiges*) Multiplum der anderen Spalte addiert. Die Multiplikation der Elemente einer Reihe mit einem *vorn* (links) stehenden Faktor lässt die Norm dieses Faktors als Faktor vor ∇ treten, und Entsprechendes gilt, wenn man die Elemente einer Spalte *hinten* (rechts) mit einem Faktor versieht. Vor allem aber gilt auch noch eine umfassendere, dem Multiplikationstheorem zweireihiger Determinanten vollkommen analoge Identität.

Wir fassen jetzt die Gleichungen (1) als Gleichungen zweier *Transformationen* auf, die dem Quaternionenpaaren (x_1, x_2) oder (ξ_1, ξ_2) andere (x'_1, x'_2) oder (ξ'_1, ξ'_2) zuordnen. Wir erhalten dann zwei kontinuierliche *Gruppen* mit je sechzehn (komplexen) Parametern, deren Transformationen sich nach Regeln zusammensetzen, die vollkommen analog sind den Regeln für die Zusammensetzung oder Multiplikation zweireihiger Matrices. Diese Regeln, oder also die Formeln für die *Parametergruppen* unserer zwei Gruppen sind:

$$(12^I) \qquad \begin{aligned} \alpha''_{11} &= \alpha'_{11}\alpha_{11} + \alpha'_{12}\alpha_{21}, & \qquad \alpha''_{12} &= \alpha'_{11}\alpha_{12} + \alpha'_{12}\alpha_{22}, \\ \alpha''_{21} &= \alpha'_{21}\alpha_{11} + \alpha'_{22}\alpha_{21}, & \qquad \alpha''_{22} &= \alpha'_{21}\alpha_{12} + \alpha'_{22}\alpha_{22}, \end{aligned}$$

wofür wir auch schreiben können

$$\begin{pmatrix} \alpha''_{11} & \alpha''_{12} \\ \alpha''_{21} & \alpha''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

ferner

$$(12^r)\qquad \begin{aligned} \alpha_{11}\alpha^*_{11}+\alpha_{12}\alpha^*_{21}&=\alpha^{**}_{11}, & \alpha_{11}\alpha^*_{12}+\alpha_{12}\alpha^*_{22}&=\alpha^{**}_{12},\\ \alpha_{21}\alpha^*_{11}+\alpha_{22}\alpha^*_{21}&=\alpha^{**}_{21}, & \alpha_{21}\alpha^*_{12}+\alpha_{22}\alpha^*_{22}&=\alpha^{**}_{22}, \end{aligned}$$

oder abgekürzt:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^*_{11} & \alpha^*_{12}\\ \alpha^*_{21} & \alpha^*_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^{**}_{11} & \alpha^{**}_{12}\\ \alpha^{**}_{21} & \alpha^{**}_{22}\end{pmatrix}.$$

Nennen wir diese Transformationen S_l, S'_l, S''_l und S_r, S^*_r, S^{**}_r, so zeigen die folgenden Formeln, wie die Quaternionenpaare (x_1, x_2) und (ξ_1, ξ_2) sich ihnen gegenüber verhalten:

$$(13^l)\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} S_l \begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix} \underset{\succ}{S'_l} \begin{pmatrix}x''_1\\x''_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{S''_l} \begin{pmatrix}x''_1\\x''_2\end{pmatrix}; \qquad \underset{\longrightarrow}{S_l S'_l = S''_l},$$

$$(13^r)\qquad \begin{pmatrix}\xi^{**}_1\\\xi^{**}_2\end{pmatrix} \underset{\prec}{S^{**}_r} \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\xi^{**}_1\\\xi^{**}_2\end{pmatrix} \underset{\prec}{S^*_r} \begin{pmatrix}\xi^*_1\\\xi^*_2\end{pmatrix} S_r \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}; \qquad \underset{\longleftarrow}{S^{**}_r = S^*_r S_r}.$$

Sind nun ∇ und $\nabla' \neq 0$, so besteht zwichen dem Paar (x) und dem Paar (x') eine umkehrbar-eindeutige Zuordnung, und ebenso zwischen dem Paar (x') und dem Paar (x''), also auch zwischen dem Paar (x) und dem Paar (x''). Wenn $\nabla \neq 0$, $\nabla' \neq 0$ ist, so folgt, dass auch $\nabla'' \neq 0$ sein muss, oder, dass zugleich mit den Transformationen S_l, S'_l auch die Transformation S''_l *existiert.* Ausserdem aber ergibt sich auch, dass sobald eine der Funktionen ∇, ∇' den Wert Null hat, sobald also eine der Zuordnungen $(x) \to (x')$, $(x') \to (x'')$ nicht umkehrbar ist, keine *Transformation* darstellt, dasselbe auch von der Zuordnung $(x) \to (x'')$ gelten muss, dass dann also ∇'' den Wert Null hat. Hieraus, und aus der Irreduzibilität von ∇ und ∇' ergibt sich, mit Hilfe einer zuvor schon angewendeten Schlussweise, die erste der Formeln

$$(14)\qquad \nabla \cdot \nabla' = \nabla'', \qquad \nabla^{**} = \nabla^* \cdot \nabla.$$

Beide Gleichungen sagen, abgesehen von ihrer gruppentheoretischen Bedeutung, also rein formal betrachtet, dasselbe aus; sie haben die Form des Multiplikationstheorems zweireihiger Determinanten; sie werden daher passend in der folgenden Formel zusammengefasst, die wir als *Multiplikationsregel der Nablafunktion* bezeichnen dürfen:

$$\begin{Bmatrix}\alpha_{11}\,\alpha_{12}\\ \alpha_{21}\,\alpha_{22}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\beta_{11}\,\beta_{12}\\ \beta_{21}\,\beta_{22}\end{Bmatrix} =$$

(15)
$$= \begin{Bmatrix}\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}\,, & \alpha_{11}\beta_{12}+a_{12}\beta_{22}\\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}\,, & \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix}\beta_{11}\alpha_{11}+\beta_{12}\alpha_{21}\,, & \beta_{11}\alpha_{12}+\beta_{12}\alpha_{22}\\ \beta_{21}\alpha_{11}+\beta_{22}\alpha_{21}\,, & \beta_{21}\alpha_{12}+\beta_{22}\alpha_{22}\end{Bmatrix}.$$

Diese Regel, deren Richtigkeit natürlich auch durch Ausrechnung — durch eine freilich bereits etwas umständliche Rechnung — bestätigt werden kann, umfasst mehrere der zuvor angeführten Lehrsätze.

Wir wenden uns nochmals zu den Formeln (12), und bemerken, dass z. B. die Formeln (12^l) gar nichts anderes sind als wieder die Formeln (1^r), nur zweimal aufgestellt, nämlich für die Quaternionenpaare

$$(\xi_1, \xi_2) = (\alpha'_{11}, \alpha'_{21}), \qquad (\xi_1, \xi_2) = (\alpha'_{12}, \alpha'_{22}).$$

Schreiben wir also die Gleichungen (12), mit veränderter Bezeichnung, nochmals auf

(16^l)
$$\begin{aligned} x'_{11} &= \lambda_{11}x_{11} + \lambda_{12}x_{21}\,, & x'_{12} &= \lambda_{11}x_{12} + \lambda_{12}x_{22}\,,\\ x'_{21} &= \lambda_{21}x_{11} + \lambda_{22}x_{21}\,, & x'_{22} &= \lambda_{21}x_{12} + \lambda_{22}x_{22}\,,\end{aligned}$$

(16^r)
$$\begin{aligned} x_{11}\varrho_{11} + x_{12}\varrho_{21} &= x^*_{11}\,, & x_{11}\varrho_{12} + x_{12}\varrho_{22} &= x^*_{12}\,,\\ x_{21}\varrho_{11} + x_{22}\varrho_{21} &= x^*_{21}\,, & x_{21}\varrho_{12} + x_{22}\varrho_{22} &= x^*_{22}\,,\end{aligned}$$

so haben wir, wenn die Nablafunktionen

$$\nabla(\lambda) = \begin{Bmatrix}\lambda_{11}\,\lambda_{12}\\ \lambda_{21}\,\lambda_{22}\end{Bmatrix}, \qquad \nabla(\varrho) = \begin{Bmatrix}\varrho_{11}\,\varrho_{12}\\ \varrho_{21}\,\varrho_{22}\end{Bmatrix}$$

nicht Null sind, Transformationen zweier Gruppen Γ^l_{16} und Γ^r_{16} vor uns, deren Objekte irgend vier in Form einer Matrix angeordnete Quaternionen

$$\begin{pmatrix}x_{11}\,x_{12}\\ x_{21}\,x_{22}\end{pmatrix}$$

sind. Das Multiplikationstheorem der Funktion ∇ sagt dann aus, dass

$$\nabla(x) = \begin{Bmatrix}x_{11}\,x_{12}\\ x_{21}\,x_{22}\end{Bmatrix}$$

eine (ganze rationale, relative) *Invariante* einer jeden dieser beiden Gruppen ist. Ausserdem ergibt sich noch, dass die numerischen Multipla der Potenzen von $\nabla(x)$ die *einzigen* solchen Invarianten sind, und dass überdies jedes Quadrupel, für das $\nabla(x) \neq 0$ ist, in jedes andere derart gerade durch *eine* Transformation sowohl von Γ_{16}^l wie von Γ_{16}^r übergeführt werden kann.

Die Gruppen Γ_{16}^l und Γ_{16}^r, deren jede ihre eigene Parametergruppe ist, und die zusammen die beiden Parametergruppen der beiden Gruppen (1) bilden, sind, wie solche Paare von Parametergruppen überhaupt, vertauschbar; sie erzeugen zusammengesetzt — da sie die triviale Gruppe $x'_{ik} = \sigma x_{ik} = x_{ik}\sigma \{V\sigma = 0\}$ und nur diese, mit einander gemein haben — eine Gruppe Γ_{31} mit 31 wesentlichen complexen Parametern, deren allgemeine Transformation durch die Formel

$$\begin{pmatrix} x'^*_{11} & x'^*_{12} \\ x'^*_{21} & x'^*_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} \end{pmatrix} \tag{17}$$

dargestellt wird. Also auch für diese kontinuierliche Gruppe linearer Transformationen noch ist $\nabla(x)$ eine Invariante, und ausserdem (z. B.) für die Transformation

$$\begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} \\ x'_{21} & x'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{21} \\ \tilde{x}_{12} & \tilde{x}_{22} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Die beiden Transformationenschaaren mit je 31 wesentlichen komplexen Parametern, die aus der Gruppe (17) durch Hinzufügung der Transformation (18) entstehen, bilden die Gruppe aller linearen Transformationen der sechzehn Koordinaten von $x_{11}, \ldots x_{22}$, die ∇ als (relative) Invariante haben, oder die — was auf Dasselbe hinauskommt — das Bestehen der Gleichung $\nabla = 0$ nicht stören.

Wir erhalten diesen Lehrsatz als Korollar eines bekannten (und übrigens sehr leicht zu begründenden) Determinantensatzes, wenn wir, nach der in § 1 angegebenen Regel, die Quaternionenmatrix (α_{ik}) als eine *zweireihige Matrix aus zweireihigen Matrices* auffassen, und dieser zusammengesetzten Matrix eine *vierreihige gewöhnliche Matrix* zuordnen, in der statt der Quaternionenkoordinaten x_0, x_1, x_2, x_3, in sachgemässer Anordnung, die in § 1 beschriebenen Elemente oder Koordinaten $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ zweireihiger Matrices erscheinen. Setzen wir, um Unbequemlichkeiten des Drucks zu vermeiden, nunmehr:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{11}^{ik} e_{11} + \alpha_{12}^{ik} e_{12} + \alpha_{21}^{ik} e_{21} + \alpha_{22}^{ik} e_{22},$$

so wird

$$(19)\qquad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{11}_{11} & \alpha^{11}_{12} \\ \alpha^{11}_{21} & \alpha^{11}_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha^{12}_{11} & \alpha^{12}_{12} \\ \alpha^{12}_{21} & \alpha^{12}_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha^{21}_{11} & \alpha^{21}_{12} \\ \alpha^{21}_{21} & \alpha^{21}_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha^{22}_{11} & \alpha^{22}_{12} \\ \alpha^{22}_{21} & \alpha^{22}_{22} \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

und die zugeordnete vierreihige Matrix ist

$$(20)\qquad \mathfrak{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha^{11}_{11} & \alpha^{11}_{12} & \alpha^{12}_{11} & \alpha^{12}_{12} \\ \alpha^{11}_{21} & \alpha^{11}_{22} & \alpha^{12}_{21} & \alpha^{12}_{22} \\ \hline \alpha^{21}_{11} & \alpha^{21}_{12} & \alpha^{22}_{11} & \alpha^{22}_{12} \\ \alpha^{21}_{21} & \alpha^{21}_{22} & \alpha^{22}_{21} & \alpha^{22}_{22} \end{array}\right],$$

eine vierreihige gewöhnliche Matrix, die in keiner Weise spezialisiert ist, deren Elemente aber auf eine besondere Art bezeichnet sind — eine *Gittermatrix*, wie wir kurz sagen wollen. Die Multiplikationsregel der zweireihigen Quaternionen-matrices,

$$(21)\qquad \begin{gathered} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}, \\ \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} = \gamma_{11}, \qquad \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} = \gamma_{12} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} = \gamma_{21}, \qquad \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} = \gamma_{22} \end{gathered}$$

(vgl. Nr. 12), entpuppt sich damit als eine andere Form der Multiplikationsregel

$$(22)\qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$$

für vierreihige Matrices, deren sechzehn Gleichungen

$$\begin{gathered} \alpha^{11}_{11}\beta^{11}_{11} + \alpha^{11}_{12}\beta^{11}_{21} + \alpha^{12}_{11}\beta^{21}_{11} + \alpha^{12}_{12}\beta^{21}_{21} = \gamma^{11}_{11}, \\ \alpha^{11}_{11}\beta^{11}_{12} + \alpha^{11}_{12}\beta^{11}_{22} + \alpha^{12}_{11}\beta^{21}_{12} + \alpha^{12}_{12}\beta^{21}_{22} = \gamma^{11}_{12}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha^{21}_{21}\beta^{12}_{12} + \alpha^{21}_{21}\beta^{12}_{22} + \alpha^{22}_{21}\beta^{22}_{12} + \alpha^{22}_{22}\beta^{22}_{22} = \gamma^{22}_{22}. \end{gathered}$$

lediglich in der Formel (21) zu vieren zusammengefasst sind.[1]

Die Formel (17) ist ebenfalls eine Zusammenfassung von sechzehn Gleichungen in Gruppen von je vieren; dieselben sechzehn Gleichungen können alle nach dem Schema (22) in eine einzige Formel zusammengefasst und dann also etwa so abgekürzt werden:

[1] Eine solche Zusammenfassung ist gelegentlich auch sonst schon vorgenommen worden.

$$LXR = X^*. \tag{23}$$

Die Gruppe (23), die im komplexen Gebiete eben nur eine andere Schreibart der Gruppe (17) ist, hat nun aber, als — im Wesentlichen einzige — (relative) Invariante die Determinante der vierreihigen Matrix X; auch diese ist, wie ∇, irreduzibel, und vom vierten Grade in den Koordinaten der vier Quaternionen oder Matrices $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$. Unsere Funktion ∇ kann sich also von dieser Determinante höchstens um einen Zahlenfaktor unterscheiden, der sich sogleich als die Einheit herausstellt. Wir haben also die Gleichung

$$\begin{Bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{Bmatrix} = \left|\begin{array}{cc|cc} x_{11}^{11} & x_{12}^{11} & x_{11}^{12} & x_{12}^{12} \\ x_{21}^{11} & x_{22}^{11} & x_{21}^{12} & x_{22}^{12} \\ \hline x_{11}^{21} & x_{12}^{31} & x_{11}^{22} & x_{12}^{22} \\ x^{21} & x_{22}^{21} & x_{21}^{22} & x_{22}^{22} \end{array}\right| = |X|. \tag{24}$$

Das Multiplikationstheorem der ∇-Funktion ist hiernach im Grunde nichts Anderes als das Multiplikationstheorem vierreihiger Matrices, es entsprechen einander die Formeln

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \tag{25}$$

(vgl. Nr. 21) und

$$|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| = |\mathfrak{C}| \tag{26}$$

(vgl. Nr. 22 und die beigegebene Erläuterung). Dabei hängen, nach § 1, die Koordinaten der Quaternionen x_{ik}, α_{ik} u. s. w. mit den Elementen oder Koordinaten der vierreihigen Matrices X, $\mathfrak{A}$ u. s. w. wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} 2x_0^{ik} &= x_{11}^{ik} + x_{22}^{ik}, & 2x_1^{ik} &= -i(x_{12}^{ik} + x_{21}^{ik}), \\ 2x_2^{ik} &= -x_{12}^{ik} + x_{21}^{ik}, & 2x_3^{ik} &= -i(x_{11}^{ik} + x_{22}^{ik}), \end{aligned} \tag{27}$$

Bei alledem ist zu beachten, dass eine Äquivalenz unserer Quaternionenformeln mit denen für zweireihige Matrices nur im komplexen Gebiet stattfindet (nur im Bereich von $\sqrt{-1}$). Das Reelle hat auch seine Existenzberechtigung. Es würde daher verfehlt sein, die eine Theorie lediglich als ein Korollar zur anderen auffassen zu wollen. Berechtigt ist nur die schwächere Forderung, beide Theorien, die ja sehr ähnliche Prämissen haben, soweit es angeht, gemeinsam zu entwickeln; wie es auch im Vorhergehenden geschehen ist.

Der Unterschied zwischen unserer ∇-Funktion und einer vierreihigen Determinante $\triangle$ ist derselbe, wie der Unterschied zwischen der Norm einer einzelnen

Quaternion und einer zweireihigen Determinante. Während bei reellen Argumenten von $\triangle$ die Gleichung $\triangle = 0$ durch ∞^{15} Matrices erfüllt wird, und das Gebiet der ∞^{16} Argumente in zwei Bereiche $\triangle > 0$, $\triangle < 0$ zerlegt, hat bei reellen Argumenten (Quaternionenkoordinaten) die Gleichung $\nabla = 0$ nur ∞^{12} Lösungen, und es besteht die Ungleichung

$$\nabla > 0. \tag{28}$$

Man sieht das an den Formeln (4).

Aus dem Gesagten ergibt sich, wie eine Bemerkung zu beurteilen ist, die sich darbietet, wenn man die Gleichungen (1) von vorn herein als Gleichungen für *Matrices* auffasst, also etwa (1^l) ausführlich so schreibt:

$$\begin{array}{lll} & (a_k) & \alpha^{k1}_{11} x^{(1)}_{11} + \alpha^{k1}_{12} x^{(1)}_{21} + \alpha^{k2}_{11} x^{(2)}_{11} + \alpha^{k2}_{12} x^{(2)}_{21} = y^{(k)}_{11} \\ & (b_k) & \alpha^{k1}_{11} x^{(1)}_{12} + \alpha^{k1}_{12} x^{(1)}_{22} + \alpha^{k2}_{11} x^{(2)}_{12} + \alpha^{k2}_{12} x^{(2)}_{22} = y^{(k)}_{12} \\ (29) & (c_k) & \alpha^{k1}_{21} x^{(1)}_{11} + \alpha^{k1}_{22} x^{(1)}_{21} + \alpha^{k2}_{21} x^{(2)}_{11} + \alpha^{k2}_{22} x^{(2)}_{21} = y^{(k)}_{21} \\ & (d_k) & \alpha^{k1}_{21} x^{(1)}_{12} + \alpha^{k1}_{22} x^{(1)}_{22} + \alpha^{k2}_{21} x^{(2)}_{12} + \alpha^{k2}_{22} x^{(2)}_{22} = y^{(k)}_{22} \end{array}$$

$$(k = 1, 2)$$

Dieses System von acht Gleichungen zerfällt von selbst in zwei Systeme von je vier Gleichungen (a_1, c_1, a_2, c_2) und (b_1, d_1, b_2, d_2), deren jedes nur noch vier der Unbekannten enthält, und die überdies links dieselben Koeffizienten in gleicher Anordnung enthalten. Die Reduzibilität der Determinante D des Systems aller acht Gleichungen tritt hier ohne weiteres in Evidenz, und es wird der Gedanke nahe gelegt, statt des vorgetragenen besonderen Lösungsverfahrens die gewöhnliche Art der Lösung von vier Gleichungen mit vier Unbekannten anzuwenden. Damit würde aber in die ursprünglich vorgelegten Gleichungen (1) eine nicht unbedeutende formale Verwickelung eingeführt, und ausserdem würde so ein natürlicher Zusammenhang zerrissen werden. Die Zerlegung der zusammen auftretenden Quadrupel von Unbekannten entspricht besonders da nicht dem Wesen der Sache, wo sie in der Anwendung auf reelle Quadrupel $x^{(k)}_0, x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, x^{(k)}_3$ (reelle Quaternionen) nur durch eine imaginäre Transformation bewirkt werden kann.[1]

Indessen ergibt sich noch aus dem Gesagten, dass mehr als eine zufällige Übereinstimmung vorliegt, wenn in den Gleichungen (5) gewisse Quaternionen-

[1] Hierzu kommt noch, dass die entwickelte Theorie fast unverändert unter Umständen angewendet werden kann, in denen eine Äquivalenz der zu betrachtenden Grössenquadrupel mit zweireihigen Matrices überhaupt nicht vorhanden ist. Vgl. § 6.

ausdrücke *dritten* Grades auf ähnliche Weise auftreten, wie in der Lösung eines Systems von vier linearen Gleichungen mit vier Unbekannten Determinanten dritten Grades. In der Tat sind die sechszehn Koordinaten dieser vier Quaternionenverbindungen lineare Kombinationen der sechszehn Determinanten dritten Grades, die man der Matrix $\mathfrak{A}$ entnehmen kann, und umgekehrt.

Bemerkt sei schliesslich noch, dass die Aufstellung der Gruppe (17, 18) die Aufgabe löst, *alle* Paare linearer Quaternionengleichungen der Form (1) hinzuschreiben, deren Lösung mit der Lösung der einen oder anderen der Gleichungen (1) selbst äquivalent ist. Es gibt in beiden Fällen zwei Kontinua solcher Gleichungssysteme mit je 31 wesentlichen Parametern, entsprechend den beiden Transformationenschaaren unserer Gruppe.

Insbesondere lässt sich das allgemeinste Paar linearer Gleichungen der Form (1^l) angeben, das durch *dieselben* Werte (Wertsysteme) x_1, x_2 der Unbekannten befriedigt wird, und dessen Auflösung überdies gleichbedeutend ist mit der Auflösung der Gleichungen (1^l) selbst:

$$(30)\qquad \begin{gathered}(\lambda_{k1}\alpha_{11}+\lambda_{k2}\alpha_{21})x_1+(\lambda_{k1}\alpha_{12}+\lambda_{k2}\alpha_{22})x_2=\lambda_{k1}x'_1+\lambda_{k1}x'_2\\ \left(k=1,\,2;\ \begin{vmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{12}\\\lambda_{21}&\lambda_{22}\end{vmatrix}\neq 0,\ \begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{vmatrix}\neq 0\right).\end{gathered}$$

Die übrigen Gleichungen der Form (1^l), die mit den Gleichungen (1^l) selbst äquivalent sind, erhält man hieraus durch die Substitution

$$x_1=\varrho_{11}y_1+\varrho_{12}y_2,\ x_2=\varrho_{21}y_1+\varrho_{02}y_2 \qquad \left(\begin{vmatrix}\varrho_{11}&\varrho_{12}\\\varrho_{21}&\varrho_{22}\end{vmatrix}\neq 0\right).$$

Nach einem Satze des Verfassers, der von CARTAN auf alle sogenannten ursprünglichen Systeme komplexer Grössen ausgedehnt worden ist, bilden die Quaternionenregeln und die Regeln für die Multiplikation zweireihiger Matrices die beiden *einzigen* »Gestalten« eines bestimmten »Typus« der Multiplikation komplexer Grössen mit vier Einheiten.[1]

Nach CARTAN hat *nur* zwei Gestalten auch das — ursprüngliche — System komplexer Grössen mit sechzehn Einheiten, dessen Multiplikationstheorem von den Formeln für die Zusammensetzung oder Multiplikation vierreihiger Matrices gebildet wird. Die eine der zwei Gestalten entspricht jenen Formeln unmittelbar. Sie ist dann dargestellt als sogenanntes Produkt der zweiten Gestalt des Quaternionensystems mit ihr selbst, kann aber auch, in anderer Schreibart, durch »Multiplikation« der ersten Gestalt des Quaternionensystems mit ihr selbst erhalten werden. Die andere Gestalt jenes Systems von sechzehn Einheiten wird gefunden, wenn man die beiden Gestalten der Quaternionen mit einander »multipliziert«. Diese zweite Gestalt wird, wenn man die a_{ik} als Zeichen für reelle *Quaternionen* auffasst, eben von den Formeln (12) gebildet, in denen, wie bei den Formeln der ersten Gestalt, ausschliesslich reelle Koeffizienten ($0, \pm 1$) vorkommen. Die vier Koordinaten jeder einzelnen der Quater-

[1] Vgl. Math. Enc. Bd I, 1, S. 182. Französische Ausgabe I, 1, S. 435.

nionen α_{ik} folgen den gewöhnlichen Regeln des Quaternionenkalkuls, während die Zusammensetzung (Multiplikation) der Quadrupel $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22})$ den Formeln für die Komposition (Multiplikation) zweireihiger Matrices folgt, also nach den Multiplikationsregeln der *zweiten* Gestalt der Quaternionen ausgeführt wird.

Die vorgetragene kleine Theorie ist demnach, wenn man von hier ausgeschlossenen Grenzfällen absieht (die bei anderer Gelegenheit behandelt werden sollen), in gewissem Sinne *erschöpfend*. Das Gleiche gilt von den folgenden Entwickelungen, die übrigens minder vollständig gehalten sind, da nach Analogie des ausführlich behandelten Falles anzustellende Überlegungen wohl grossenteils dem Leser überlassen bleiben dürfen.

3.

Die Nablafunktion von $4m^2$ Argumenten.

Die von uns bei zwei Gleichungen angewendete Methode der direkten Berechnung ist bereits im Falle von drei einseitigen Quaternionengleichungen so gut wie unbrauchbar. Wir haben aber in dem über den Fall $m = 2$ Gesagten schon genug Induktionsmaterial, um das Bildungsgesetz einer Function $\nabla(\alpha_{ik})$ von $4m^2$ Argumenten zu erraten, die zur Auflösung von m einseitigen Quaternionengleichungen dienen kann.

Im Falle $m = 1$ verstehen wir unter $\nabla(\alpha) = \{\alpha\}$ *die Norm* der Quaternion α, also das Produkt $\alpha\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}\alpha$. Im Falle $m = 2$ verbinden wir mit dem Zeichen $\nabla(\alpha_{i\varkappa}) = \{\alpha_{i\varkappa}\}$ den im § 2 beschriebenen Begriff. Wie dann für unbestimmte Werte der Zahl m eine analoge Funktion erklärt werden kann, erkennen wir, wenn wir den Fall $m = 2$ nochmals, und jetzt aus dem Gesichtspunkt der Verallgemeinerung, betrachten.

Wir werden auf die rechte Fährte durch die Bemerkung geleitet, dass die in § 2 erklärte Funktion sich auf das Quadrat einer zweireihigen Determinante reduziert, wenn die Quaternionen α_{ik} sämtlich skalar sind. Wir sehen dann, dass wir auch ohne solche Einschränkung das Bildungsgesetz von ∇ aus dem Bildungsgesetz der Determinanten ableiten können. Wir multiplizieren die beiden Determinanten

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}), \quad (\tilde{\alpha}_{11}\tilde{\alpha}_{22} - \tilde{\alpha}_{12}\tilde{\alpha}_{21})$$

zunächst nach den gewöhnlichen Regeln, mithin so, wie wenn $\alpha_{i\varkappa}$ das Zeichen, nicht für eine Quaternion, sondern für eine einzelne reelle oder komplexe Zahl wäre. In dem gefundenen Ausdruck schreiben wir dann die Glieder hinter einander, die im hinteren (rechten) Index übereinstimmen, bilden also die Produkte

$$\vartheta^1_{11} = \alpha_{11}\tilde{\alpha}_{11}, \quad \vartheta^1_{12} = \alpha_{11}\tilde{\alpha}_{21}, \quad \vartheta^1_{21} = \alpha_{21}\tilde{\alpha}_{11}, \quad \vartheta^1_{22} = \alpha_{21}\tilde{\alpha}_{21},$$

$$\vartheta^2_{11} = \alpha_{12}\tilde{\alpha}_{12}, \quad \vartheta^2_{12} = \alpha_{12}\tilde{\alpha}_{22}, \quad \vartheta^2_{21} = \alpha_{22}\tilde{\alpha}_{12}, \quad \vartheta^2_{22} = \alpha_{22}\tilde{\alpha}_{22}.$$

Hierauf ordnen wir die im Determinantenprodukt vorkommenden Produkte dieser Produkte so, dass die *vorderen* (linken) Indices, also die unteren Indices der Quaternionen ϑ^r_{ik}, *Zyklen* bilden, nämlich eingliedrige Zyklen

$$\vartheta^1_{11},\ \vartheta^1_{22}, \qquad \vartheta^2_{11},\ \vartheta^2_{22},$$

und zweigliedrige Zyklen

$$\vartheta^1_{12}\,\vartheta^2_{21}, \qquad \vartheta^2_{12}\,\vartheta^1_{21}.$$

Dabei achten wir darauf, dass die zweigliedrigen Zyklen paarweise konjugierte Quaternionenprodukte bilden. Wir lassen nämlich den zweiten der zweigliedrigen Zyklen aus dem ersten dadurch entstehen, dass wir die Reihenfolge der Faktoren und gleichzeitig die Reihenfolge der unteren Indices in jedem Faktor ϑ^r_{ik} umkehren. Haben wir das formell gebildete Determinantenprodukt auf diese Art geordnet, so wird

$$\nabla = (\vartheta^1_{11}\cdot\vartheta^2_{22} - \vartheta^1_{12}\,\vartheta^2_{21}) + (\vartheta^2_{11}\cdot\vartheta^1_{22} - \vartheta^2_{12}\,\vartheta^1_{21}),$$
$$\nabla = (\vartheta^1_{11}\cdot\vartheta^2_{22} - \vartheta^2_{21}\,\vartheta^1_{12}) + (\vartheta^2_{11}\cdot\vartheta^1_{22} - \vartheta^1_{21}\,\vartheta^2_{12}).$$

∇ erscheint auf zwei Arten, der Form nach, als Summe zweier Determinanten, und zwar wird die eine von diesen aus der anderen dadurch erhalten, dass man die oberen Indices der Symbole ϑ^r_{ik} vertauscht.

In ähnlicher Weise erklären wir jetzt eine Funktion $\nabla(\alpha_{ik})$, die aus einer Quaternionenmatrix von m^2 Elementen

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\ \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mm} \end{bmatrix} = (\alpha_{ik})$$

abgeleitet, und mit

(I)
$$\begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{mm} \end{Bmatrix} = \{\alpha_{ik}\}$$

bezeichnet werden soll.

Wir multiplizieren zunächst die beiden Determinanten $|\alpha_{ik}|$ und $|\bar{\alpha}_{ik}|$ for-

mell aus. In jedem der $(m!)^2$ Entwickelungsglieder lassen wir sodann die Quaternionen zusammentreten, die im hinteren Index übereinstimmen, wir bilden die Produkte

$$\vartheta_{ik}^r = a_{ir}\tilde{a}_{kr}.$$

In den so entstehenden nur noch m-gliedrigen Produkten von Faktoren ϑ_{ik}^r ordnen wir die Faktoren, in Bezug auf die vorderen Indices, nach Zyklen an, z. B.

$$\vartheta_{11}^r, \quad \vartheta_{12}^r\vartheta_{21}^s, \quad \vartheta_{12}^r\vartheta_{23}^s\vartheta_{31}^t, \ldots$$

Dabei lassen wir den einzelnen Zyklus mit *irgend* einem seiner Elemente beginnen, sorgen aber dafür, dass die benutzten Anordnungen paarweise konjugierte Quaternionenprodukte darstellen, z. B.

$$\vartheta_{12}^r\vartheta_{23}^s\vartheta_{31}^t, \quad \vartheta_{13}^t\vartheta_{32}^s\vartheta_{21}^r.$$

Hierauf ordnen wir im einzelnen m-gliedrigen Produkt die vorkommenden Zyklen *beliebig*, aber *auf gleiche Art* in allen m-gliedrigen Produkten, deren Zyklen nur in ihren oberen Indices verschieden, oder doch zu solchen nur in den oberen Indices abweichenden Zyklen konjugiert sind. Z. B. sollen im Falle $m = 5$ unter anderen die folgenden Anordnungen *zugleich* vorkommen:

$$\vartheta_{12}^r\vartheta_{23}^s\vartheta_{31}^t\cdot\vartheta_{45}^u\vartheta_{54}^v, \quad \vartheta_{12}^r\vartheta_{23}^s\vartheta_{31}^t\cdot\vartheta_{45}^v\vartheta_{54}^u,$$

$$\vartheta_{13}^t\vartheta_{32}^s\vartheta_{21}^r\cdot\vartheta_{45}^u\vartheta_{54}^v, \quad \vartheta_{13}^t\vartheta_{32}^s\vartheta_{21}^r\cdot\vartheta_{45}^v\vartheta_{54}^u.$$

Das Ergebniss unserer Summation ist dann, wie nunmehr gezeigt werden soll, eine *eindeutig* bestimmte skalare Quaternion — eben die zu erklärende Nablafunktion.

Wir haben zunächst eine Summe von Quaternionenprodukten vor uns, die zur Hälfte mit dem Faktor 1, zur Hälfte mit dem Faktor -1 in die Summe eingehen. Jeder diesen Faktoren $1, -1$ ist das Produkt der Faktoren, mit denen die entsprechenden Entwickelungsglieder der beiden Determinanten $|a_{ik}|$, $|\tilde{a}_{ik}|$ behaftet sind. Diese Faktoren ± 1 selbst lassen sich nach bekannter Regel bestimmen. Wir nennen π_l die Permutation der vorderen Indices der ersten Determinante und π_r die Permutation der hinteren Indices derselben Determinante, die in einem wie oben hingeschriebenen Entwickelungsglied vorkommt, und wir verwenden die entsprechenden Zeichen $\tilde{\pi}_l$, $\tilde{\pi}_r$ für die zweite Determinante. Setzen wir dann noch z. B. $(\pi_l) = 1$ oder $(\pi_l) = -1$, je

nachdem π_l eine gerade oder eine ungerade Permutation der Indices $1, \ldots n$ ist, so wird

$$(\pi_l) \cdot (\pi_r) \cdot (\tilde{\pi}_l) \cdot (\tilde{\pi}_r) = (\pi_l) \cdot (\tilde{\pi}_l)$$

der gesuchte Faktor ± 1.

Also nur von den *vorderen* Indices der Faktoren der Produkte $a_{ir} \tilde{a}_{kr}$ hängt das Vorzeichen eines jeden Entwickelungsgliedes von $\bigtriangledown$ ab. Zyklen, die sich nur durch die Anordnung der *oberen* Indices unterscheiden, gehen in die Entwickelung von $\bigtriangledown$ mit dem gleichen Vorzeichen ein, wenn nur die übrigen, das Produkt vervollständigenden Zyklen dieselben oder wenigstens gleichartig sind. Jedem Zyklus haftet ein bestimmter Faktor ± 1 an, 1 bei Zyklen mit einer ungeraden, -1 bei Zyklen mit einer geraden Anzahl von Gliedern; und das Produkt aller dieser Faktoren liefert den Faktor, oder also das Vorzeichen, des einzelnen Entwickelungsgliedes von $\bigtriangledown$.

Sind sodann in irgend einem Entwickelungsglied $\Phi_1 \ldots \Phi_\mu$ die skalaren (eingliedrigen) Zyklen, $\Psi_1 \ldots \Psi_\nu$ die übrigen, so folgt nunmehr, dass die erklärte Summe zugleich mit dem Produkt $\pm \Phi_1 \ldots \Phi_\mu \Psi_1 \ldots \Psi_\nu$ alle Produkte enthält, die in der Entwickelung von

$$\pm \Phi_1 \ldots \Phi_\mu (\Psi_1 + \tilde{\Psi}_1) \ldots (\Psi_\nu + \tilde{\Psi}_\nu)$$

auftreten. Hieraus geht aber sofort hervor, dass weder eine Umstellung der Zyklen $\Psi_1 \ldots \Psi_\nu$, noch auch eine *zyklische* Umstellung der Faktoren irgend eines Zyklus $\Psi_\varkappa$ den Werth der erhaltenen Summe ändern kann. *Es ist also hiermit eine skalare Quaternion $\bigtriangledown(a_{ik})$ eindeutig definiert.*

Das Bildungsgesetz von $\bigtriangledown$ kann hiernach auch so beschrieben werden:

Man entwickele die Determinante

$$\begin{vmatrix} \vartheta^r_{11} \, \vartheta^s_{12} \, \vartheta^t_{13} & \cdot \\ \vartheta^r_{21} \, \vartheta^s_{22} \, \vartheta^t_{23} & \cdot \\ \vartheta^r_{31} \, \vartheta^s_{32} \, \vartheta^t_{33} & \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \end{vmatrix}$$

nach der üblichen formalen Regel, ordne aber in jedem Entwickelungsglied die Faktoren so an, dass die unteren Indices sich in einem oder mehreren Zyklen an einander anschliessen. *Je zwei Zyklen, die dieselben unteren Indices enthalten, lasse man mit demselben Index beginnen und endigen, und in Produkten, die aus solchen gepaarten Zyklen bestehen, ordne man diese auch auf gleiche Weise.* Schliesslich

nehme man über alle diese Summen von je $m!$ Quaternionenprodukten wieder die Summe, indem man nunmehr die oberen Indices $r, s, t, \ldots$ auf alle $m!$ Arten unter einander vertauscht. Das Ergebnis ist dann eine skalare Quaternion, eine gewöhnliche reelle oder komplexe Zahl, eben die Funktion $\nabla(\alpha_{ik})$.

Schliesslich kann man noch, wenn man will, je zwei zusammengehörige (konjugierte) Zyklen zu einem *Ring*, einer skalaren Summe aus einem oder zwei Quaternionenprodukten zusammenfassen. Diese »Ringe« sind dann

$$\vartheta^r_{ii} = \alpha_{ir}\tilde{\alpha}_{ir}, \quad 2S\,\vartheta^r_{ik}\,\vartheta^s_{ki} = \alpha_{ir}\tilde{\alpha}_{kr}\alpha_{ks}\tilde{\alpha}_{is} + \alpha_{is}\tilde{\alpha}_{ks}\alpha_{kr}\tilde{\alpha}_{ir},$$

$$2S\,\vartheta^r_{ik}\,\vartheta^s_{kl}\,\vartheta^t_{li} = \alpha_{ir}\tilde{\alpha}_{kr}\alpha_{ks}\tilde{\alpha}_{ls}\alpha_{lt}\tilde{\alpha}_{it} + \alpha_{it}\tilde{\alpha}_{lt}\alpha_{ls}\tilde{\alpha}_{ks}\alpha_{kr}\tilde{\alpha}_{ir},$$

u. s. w. Aus Produkten solcher Ringe setzt sich dann die Funktion ∇ zusammen, deren skalarer Charakter bei dieser Schreibart ohne Weiteres augenscheinlich wird.

Man erhält z. B. die Entwickelung

$$\left\{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}\right. =$$

$$\sum \{\vartheta^r_{11}\cdot\vartheta^s_{22}\cdot\vartheta^t_{33} + 2S\,\vartheta^r_{12}\,\vartheta^s_{23}\,\vartheta^t_{31} -$$

$$- \vartheta^r_{11}\cdot 2S\,\vartheta^s_{23}\,\vartheta^t_{32} - \vartheta^r_{22}\cdot 2S\,\vartheta^s_{31}\,\vartheta^t_{13} - \vartheta^r_{33}\cdot 2S\,\vartheta^s_{12}\,\vartheta^t_{21}\},$$

worin die Summe über die sechs Permutationen der Indices r, s, t, d. h. 1, 2, 3 zu erstrecken ist. Da alle auf ähnliche Art gebildeten Summen hierin mit gleichem Vorzeichen zur Aufnahme kommen, so kann man noch kürzer, aber ebenfalls schon hinreichend deutlich, auch schreiben

$$\sum_{(6)}\vartheta^r_{11}\cdot\vartheta^s_{22}\cdot\vartheta^t_{33} - \sum_{(6.3)}\vartheta^r_{11}\cdot 2S\,\vartheta^s_{23}\,\vartheta^t_{32} + \sum_{(6.2)} 2S\,\vartheta^r_{12}\,\vartheta^s_{23}\,\vartheta^t_{31};$$

die den Summenzeichen hinzugefügten Zahlen geben dann an, wie sich die $6 + 18 + 12 = 36$ Entwickelungsglieder von ∇ auf die drei vorkommenden Arten von Quaternionenprodukten verteilen. In gleicher Weise, wie die letzte Formel, ist die folgende zu lesen:

$$\left\{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \sum_{(24)} \vartheta^r_{11} \cdot \vartheta^s_{22} \cdot \vartheta^t_{33} \cdot \vartheta^u_{44} - \sum_{(24.6)} \vartheta^r_{11} \cdot \vartheta^s_{22} \cdot 2S\,\vartheta^t_{34}\,\vartheta^u_{43} +$$

$$+ \sum_{(24.3)} 2S\,\vartheta^r_{12}\,\vartheta^s_{21} \cdot 2S\,\vartheta^t_{34}\,\vartheta^u_{43} + \sum_{(24.8)} \vartheta^r_{11} \cdot 2S\,\vartheta^s_{23}\,\vartheta^t_{34}\,\vartheta^u_{42} -$$

$$- \sum_{(24.6)} 2S\,\vartheta^r_{12}\,\vartheta^s_{23}\,\vartheta^t_{34}\,\vartheta^u_{41}. -$$

Wir gehen jetzt dazu über, aus dem geschilderten Bildungsgesetz einige Eigenschaften der Funktion $\bigtriangledown$ abzulesen.

1. In der Beschreibung von $\bigtriangledown$ war keine Zeile und keine Spalte der Quaternionenmatrix (α_{ik}) vor den übrigen Zeilen oder Spalten ausgezeichnet worden. Eine Vertauschung von Zeilen oder von Spalten in der Matrix (α_{ik}) bewirkt aber die entsprechende Vertauschung von Zeilen oder Spalten in der Matrix $(\tilde{\alpha}_{ik})$. Es ergibt sich also:

$\bigtriangledown$ hängt (hierin ungleich einer Determinante von m^2 Elementen) *symmetrisch* ab von den Quaternionen-m-tupeln, die in parallelen Reihen oder Spalten der Matrix (α_{ik}) stehen. Was von der ersten Reihe oder Spalte ausgesagt werden kann, gilt von allen übrigen.

2. Vertauscht man die Reihen mit den Spalten, so erhält man zwar eine $\bigtriangledown$ nahe verwandte, aber sobald $m > 1$, von $\bigtriangledown$ verschiedene Funktion. Dagegen ist

$$(2) \qquad \bigtriangledown(\alpha_{ik}) = \bigtriangledown(\tilde{\alpha}_{ki}).$$

Es gehen nämlich bei Ersetzung der Quaternionenmatrix (α_{ik}) durch $(\tilde{\alpha}_{ki})$ die in der Entwickelung von $\bigtriangledown$ auftretenden skalaren Summen oder Ringe

$$\vartheta^r_{11}, \quad 2S(\vartheta^r_{12}\,\vartheta^s_{21}), \quad 2S(\vartheta^r_{12}\,\vartheta^s_{23}\,\vartheta^t_{31}), \ldots$$

der Reihe nach über in ähnlich gebildete Summen oder Ringe

$$\vartheta^1_{rr}, \quad 2S(\vartheta^2_{rs}\,\vartheta^1_{sr}), \quad 2S(\vartheta^2_{rs}\,\vartheta^3_{st}\,\vartheta^1_{tr}), \ldots,$$

die in gleicher Weise wie die ersten in die Entwickelung von $\bigtriangledown$ eingehen.

Daher kann man aus jeder Eigenschaft der Funktion $\bigtriangledown$, in der eine Aussage über Zeilen der Matrix (α_{ik}) vorkommt, eine solche ableiten, in der an Stelle der Zeilen Spalten treten und umgekehrt — wie bei den Determinanten. Nur sind solche zusammengehörige Aussagen im vorliegenden Falle nicht ganz gleichlautend.

3. $\bigtriangledown$ lässt sich so schreiben, dass *jedes* Glied seiner Entwickelung mit

einem Element der Form α_{1r} beginnt und mit einem der Form $\tilde{\alpha}_{1s}$ endigt. Die Elemente der ersten Reihe kommen dann nur in Verbindungen des Typus

$$\alpha_{1r}(\ldots)\tilde{\alpha}_{1s}$$

— ausserhalb der Klammer $(\ldots)$ — vor.

Zunächst nämlich ist klar, dass $\bigtriangledown$ linear und homogen ist in bezug auf die m Quaternionen α_{1k}, wie auch in bezug auf die zu diesen konjugierten Quaternionen $\tilde{\alpha}_{1k}$. Kommt nun ein Element α_{1r} in einem Zyklus vor, so kann man den Zyklus mit diesem Element beginnen lassen. Er endigt dann notwendig mit einem Element der Form $\tilde{\alpha}_{1s}$. Ist in einem Entwickelungsglied von $\bigtriangledown$ nur dieser eine Zyklus vorhanden, so ist damit die verlangte Form schon hergestellt, da der konjugierte (mit dem ersten gepaarte) Zyklus mit α_{1s} beginnt und mit $\tilde{\alpha}_{1r}$ endigt. Sind noch weitere Zyklen vorhanden, so sind sie entweder eingliedrig, oder sie treten (durch das Zeichen $2S$ zu Ringen zusammengefasst) paarweise auf. Jeder solche Ring kann aber, da er eine skalare Quaternion ist, in den ersten Zyklus an irgend einer Stelle eingeschoben werden, womit wieder die verlangte Form hergestellt ist.

Man kann also setzen

$$(3) \qquad \bigtriangledown = \sum_{r,s} \alpha_{ir} \Theta^i_{rs} \tilde{\alpha}_{is} \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

und zwar, wenn der Index i gegeben ist, im Wesentlichen *nur auf eine Art;* im Wesentlichen, das heisst, wenn man von lediglich formalen Umgestaltungen der Entwickelungskoeffizienten Θ^i_{rs} absieht. Da $\bigtriangledown$ skalar ist, so folgt noch

$$(4) \qquad \Theta^i_{sr} = \tilde{\Theta}^i_{rs},$$

insbesondere $\Theta^i_{kk} = \tilde{\Theta}^i_{kk}$; der letzte Ausdruck ist offenbar nichts Anderes als die $\bigtriangledown$-Funktion von $(m-1)^2$ Elementen, die entsteht, wenn man in der Matrix (α_{ik}) die i^{te} Reihe und die k^{te} Spalte unterdrückt.

Man beachte die Analogie des Ausdrucks (3) mit einer HERMITE'schen Form.

4. Aus der Entwickelung (3) oder also aus der Formel

$$\bigtriangledown = \sum_{r,s} \alpha_{ks} \tilde{\Theta}^k_{rs} \tilde{\alpha}_{kr} \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

erhält man, auf die unter **2.** beschriebene Art, noch eine zweite, zu (3) analoge Entwickelung

$$(5) \qquad \bigtriangledown = \sum_{r,s} \tilde{\alpha}_{sk} H^k_{sr} \alpha_{rk} \qquad (k = 1, 2, \ldots m),$$

$$(6) \qquad H^k_{sr} = \tilde{H}^k_{rs},$$

wobei H_{sr}^k aus $\tilde{\Theta}_{rs}^k$ dadurch entsteht, dass man erstens in allen Quaternionenprodukten die unteren *Indices* der einzelnen Faktoren vertauscht, und zweitens jede so erhaltene Quaternion durch ihre Konjugierte ersetzt. $\tilde{\Theta}_{rs}^k$ aber ist aus Θ_{rs}^k dadurch entstanden, dass man die Reihenfolge aller *Faktoren* umgekehrt und jede Quaternion durch ihre Konjugierte ersetzt hat.

Der Entwickelungskoeffizient H_{sr}^k geht also aus Θ_{rs}^k dadurch hervor, dass man die Reihenfolge aller vorkommenden Quaternionenprodukte und zugleich für jeden einzelnen Faktor die Reihenfolge der beiden unteren Indices umkehrt.

Wir behaupten weiter, dass in beiden Entwickelungen von ∇ die Koeffizienten der Quaternion α_{ik} und ebenso die Koeffizienten der Quaternion $\tilde{\alpha}_{ik}$ übereinstimmen:

$$(7)\qquad \sum_s \Theta_{ks}^i \tilde{\alpha}_{is} = \sum_s \tilde{\alpha}_{sk} H_{si}^k$$

$$(8)\qquad \sum_r \alpha_{ir} \Theta_{rk}^i = \sum_r H_{ir}^k \alpha_{rk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m).$$

Zunächst nämlich müssen, da beide Entwickelungen nur formale Umgestaltungen von einander sind, in ihnen die Glieder übereinstimmen, die überhaupt von dem Element α_{ik} abhängen. Nach dem Vorhergehenden genügt es, den Fall $i = k = 1$ zu betrachten. Wir erhalten dann, wenn wir noch den selbstverständlichen oberen Index 1 unterdrücken, die Identität

$$\alpha_{11} . \Theta_{11} . \tilde{\alpha}_{11} + \alpha_{11} . \sum_2^m \Theta_{1s} \tilde{\alpha}_{1s} + \sum_2^m \alpha_{1s} \Theta_{s1} . \tilde{\alpha}_{11} =$$

$$= \tilde{\alpha}_{11} . H_{11} . \alpha_{11} + \sum_2^m \tilde{\alpha}_{s1} H_{s1} . \alpha_{11} + \tilde{\alpha}_{11} . \sum_2^m H_{1s} \alpha_{s1},$$

die bestehen muss für *alle* Quaternionen α_{11}. Hieraus folgt zunächst, was wir schon wissen, dass Θ_{11} mit H_{11} identisch und ein Skalar ist; es ist ja $\Theta_{11} = \nabla(\alpha_{22}, \ldots \alpha_{mm}) = H_{11}$. Weiter hat man dann eine identische Quaternionengleichung der Form

$$z a + b\tilde{z} = cz + \tilde{z} d$$

vor sich, die nur dann bestehen kann, wenn $a = c$ und $b = d$ (und überdies die Summe der vektoriellen Bestandteile von $a = c$ und $b = d$ gleich Null) ist. Aus (4) folgt aber auch noch, dass die Ausdrücke (7) und (8) *konjugierte* Quaternionen sind. *Man kann also setzen*

(9) $$A_{ik} = \sum_s \Theta^i_{ks}\,\tilde{\alpha}_{is} = \sum_s \tilde{\alpha}_{sk}\,H^k_{si},$$

(10) $$\tilde{A}_{ik} = \sum_s \alpha_{is}\,\Theta^i_{sk} = \sum_s H^k_{is}\,\alpha_{sk}.$$

Es gelten dann die Gleichungen

(11) $$\begin{aligned} \nabla &= \sum_k \alpha_{ik}\,A_{ik} = \sum \tilde{A}_{ik}\,\tilde{\alpha}_{ik}, \quad (i = 1, 2, \ldots m), \\ \nabla &= \sum_i A_{ik}\,\alpha_{ik} = \sum \tilde{\alpha}_{ik}\,\tilde{A}_{ik}, \quad (k = 1, 2, \ldots m), \end{aligned}$$

die an die Entwickelungen einer m-reihigen Determinante nach Zeilen und Spalten erinnern.

Im Falle $m = 3$ z. B. kann der erste Entwickelungskoeffizient A_{11} in die folgenden beiden Formen gesetzt werden:

$$A_{11} = \Theta^1_{11}\,\tilde{\alpha}_{11} + \Theta^1_{12}\,\tilde{\alpha}_{12} + \Theta^1_{13}\,\tilde{\alpha}_{13} =$$

$$= \{\tilde{\alpha}_{22}\,\alpha_{22}\cdot\tilde{\alpha}_{33}\,\alpha_{33} - \alpha_{22}\,\alpha_{23}\,\tilde{\alpha}_{33}\,\alpha_{32} - \tilde{\alpha}_{32}\,\alpha_{33}\,\tilde{\alpha}_{23}\,\alpha_{22} + \tilde{\alpha}_{32}\,\alpha_{32}\cdot\tilde{\alpha}_{22}\,\alpha_{23}\}\,\tilde{\alpha}_{11} +$$

$$+ \{\tilde{\alpha}_{21}\,\alpha_{23}\,\tilde{\alpha}_{33}\,\alpha_{32} - \tilde{\alpha}_{21}\,\alpha_{22}\cdot\tilde{\alpha}_{33}\,\alpha_{33} - \tilde{\alpha}_{31}\,\alpha_{32}\cdot\tilde{\alpha}_{23}\,\alpha_{23} + \tilde{\alpha}_{31}\,\alpha_{33}\,\tilde{\alpha}_{23}\,\alpha_{12}\}\,\tilde{\alpha}_{12} +$$

$$+ \{\tilde{\alpha}_{21}\,\alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{32}\,\alpha_{33} - \tilde{\alpha}_{21}\,\alpha_{23}\cdot\tilde{\alpha}_{32}\,\alpha_{32} - \tilde{\alpha}_{31}\,\alpha_{33}\cdot\tilde{\alpha}_{22}\,\alpha_{22} + \tilde{\alpha}_{31}\,\alpha_{32}\,\tilde{\alpha}_{22}\,\alpha_{23}\}\,\tilde{\alpha}_{13},$$

$$A_{11} = \tilde{\alpha}_{11}\,H^1_{11} + \tilde{\alpha}_{21}\,H_{21} + \tilde{\alpha}_{31}\,H_{31} =$$

$$= \tilde{\alpha}_{11}\,\{\alpha_{33}\,\tilde{\alpha}_{33}\cdot\alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{22} - \alpha_{23}\,\tilde{\alpha}_{33}\,\alpha_{32}\,\tilde{\alpha}_{22} - \alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{32}\,\alpha_{33}\,\tilde{\alpha}_{23} + \alpha_{32}\,\tilde{\alpha}_{32}\cdot\alpha_{23}\,\tilde{\alpha}_{23}\} +$$

$$+ \tilde{\alpha}_{21}\,\{\alpha_{23}\,\tilde{\alpha}_{33}\,\alpha_{32}\,\tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{33}\,\tilde{\alpha}_{33}\cdot\alpha_{22}\,\alpha_{12} - \alpha_{32}\,\tilde{\alpha}_{32}\cdot\alpha_{23}\,\tilde{\alpha}_{13} + \alpha_{32}\,\tilde{\alpha}_{22}\,\alpha_{33}\,\tilde{\alpha}_{13}\} +$$

$$+ \tilde{\alpha}_{31}\,\{\alpha_{33}\,\tilde{\alpha}_{23}\,\alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{23}\,\tilde{\alpha}_{23}\cdot\alpha_{32}\,\tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{22}\,\tilde{\alpha}_{22}\cdot\alpha_{33}\,\tilde{\alpha}_{13} + \alpha_{32}\,\tilde{\alpha}_{22}\,\alpha_{23}\,\tilde{\alpha}_{13}\}.$$

Durch zyklische Vertauschung der an erster und zweiter Stelle stehenden Indices erhält man daraus die übrigen Koeffizienten A_{ik}.

5. *Neben den Gleichungen* (11) *bestehen der bilinearen Gleichungen*

(12) $$0 = \sum_k \alpha_{jk}\,A_{ik}, \quad 0 = \sum_i A_{ik}\,\alpha_{ij} \quad (i \neq j, = 1, 2, \ldots m).$$

Dies ist wieder eine Eigenschaft, die einer solchen m-reihiger Determinanten analog ist. Multipliziert man z. B. die Quaternionen

$$A_{11}, A_{12}, \ldots A_{1m},$$

die nach Art von Unterdeterminanten den Elementen der ersten Zeile der Matrix (a_{ik}) zugeordnet sind, der Reihe nach *vorn* mit $a_{j1}, a_{j2}, \dots a_{jm}$, so wird die Summe der Produkte $\bigtriangledown$ oder Null, je nachdem $j = 1$ oder $j \neq 1$ ist.

Es genügt, die erste der Gleichungen (12) für den Fall $i = 1$, $j = 2$ zu erweisen. Wir verteilen dazu die in der Entwickelung von $\bigtriangledown$ vorkommenden Index-Zyklen auf vier Gruppen. I möge alle Zyklen umfassen, die den Index 1, aber nicht den Index 2 enthalten. Analog erklären wir die Gruppe II, mit Vertauschung der Indices 1, 2. III umfasse alle Zyklen, die beide Indices 1, 2 enthalten, IV endlich die von beiden Indices freien Zyklen. Als uneigentlichen Zyklus rechnen wir zu IV noch die Einheit. Ferner lassen wir jeden Zyklus aus I oder III mit dem Index 1, jeden Zyklus aus II mit dem Index 2 beginnen.

Wir bemerken nun, dass die Glieder der Entwickelung von $\bigtriangledown$ sich paarweise nach dem Schema

$$\pm\{\mathrm{I}\,.\,\mathrm{II} - \mathrm{III}\}\,.\,\mathrm{IV}$$

anordnen lassen. In der Tat erhalten wir aus jedem geordneten Produkt von zwei Zyklen der Typen I, II,

$$\vartheta_{1r} \dots \vartheta_{\varrho 1} \,.\, \vartheta_{2s} \dots \vartheta_{\sigma 2}$$

durch Vertauschung der *ersten* Indices 1, 2 der Faktoren mit 2, 1 und Umstellung der Faktoren einen bestimmten Zyklus des Typus III,

$$\vartheta_{1s} \dots \vartheta_{\sigma 2}\, \vartheta_{2r} \dots \vartheta_{\varrho 1}\,,$$

und offenbar tritt dieser Zyklus in die Entwicklung von $\bigtriangledown$ mit dem Faktor ∓ 1 ein, wenn das Produkt der beiden ersten Zyklen mit dem Faktor ± 1 aufgetreten war. Auch kann man aus dem Zyklus des Typus III eindeutig wieder das Produkt des Typus I . II ableiten.

Ersetzt man nun in beiden Produkten I . II und III den ersten Index (1) durch den Index 2, so erhält man als Faktor des Aggregats IV, das von dieser Operation nicht betroffen wird, eine Differenz

$$\pm\{\vartheta_{2r} \dots \vartheta_{\varrho 1} \,.\, (\vartheta_{2s} \dots \vartheta_{\sigma 2}) - (\vartheta_{2s} \dots \vartheta_{\sigma 2}) \,.\, \vartheta_{2r} \dots \vartheta_{\varrho 1}\}\,,$$

in der Minuendus und Subtrahendus denselben Zyklus als Faktor enthalten, und in der auch die beiden anderen, vorn und hinten auftretenden Faktoren (die nicht Zyklen sind) übereinstimmen.

Bei der Summation über die oberen Indices der Quaternionen $\vartheta_{\lambda\mu}$ müssen sich nun die Differenzen der bezeichneten Form paarweise zerstören, nach dem Schema

$$\{\vartheta_{2r}\ldots\vartheta_{\sigma 1}\,.\,\vartheta^t_{2s}\ldots\vartheta^t_{\sigma 2} - \vartheta^t_{2s}\ldots\vartheta^t_{\sigma 2}\,.\,\vartheta_{2r}\ldots\vartheta_{\sigma 1}\}\,+$$

$$+\,\{\vartheta_{2r}\ldots\vartheta_{\sigma 1}\,.\,\vartheta^t_{2\sigma}\ldots\vartheta^t_{s2} - \vartheta^t_{2\sigma}\ldots\vartheta^t_{s2}\,.\,\vartheta_{2r}\ldots\vartheta_{\sigma 1}\} =$$

$$= 2\,S\,(\vartheta^t_{2s}\ldots\vartheta^t_{\sigma 2})\,\{\vartheta_{2r}\ldots\vartheta_{\sigma 1} - \vartheta_{2r}\ldots\vartheta_{\sigma 1}\} = 0.$$

Man wird z. B. im Falle $n = 5$, unter anderen, die folgenden vier Differenzen zusammenfassen:

$$-\{\vartheta^t_{13}\,\vartheta^r_{31}\,.\,\vartheta^u_{24}\,\vartheta^r_{45}\,\vartheta^s_{52} - \vartheta^u_{14}\,\vartheta^v_{45}\,\vartheta^s_{52}\,\vartheta^t_{23}\,\vartheta^r_{31}\} -$$

$$-\{\vartheta^t_{13}\,\vartheta^r_{31}\,.\,\vartheta^v_{25}\,\vartheta^u_{54}\,\vartheta^s_{42} - \vartheta^v_{15}\,\vartheta^u_{54}\,\vartheta^s_{42}\,\vartheta^t_{23}\,\vartheta^r_{31}\} -$$

$$-\{\vartheta^t_{13}\,\vartheta^r_{31}\,.\,\vartheta^s_{24}\,\vartheta^u_{45}\,\vartheta^v_{52} - \vartheta^s_{14}\,\vartheta^u_{45}\,\vartheta^v_{45}\,\vartheta^t_{23}\,\vartheta^r_{31}\} -$$

$$-\{\vartheta^t_{13}\,\vartheta^r_{31}\,.\,\vartheta^s_{25}\,\vartheta^v_{54}\,\vartheta^u_{42} - \vartheta^s_{15}\,\vartheta^v_{54}\,\vartheta^u_{42}\,\vartheta^t_{23}\,\vartheta^r_{31}\}.$$

Hier sind aus der formalen Entwickelung der Determinante

$$|\,\vartheta^r_{11}\,\vartheta^s_{22}\,\vartheta^t_{33}\,\vartheta^u_{44}\,\vartheta^v_{55}\,|$$

zunächst ein zweigliedriger Zyklus des Typus I, dann ein dreigliedriger Zyklus des Typus II ausgewählt. Damit hat man die erste der vier Differenzen. Durch sie ist die zweite bestimmt, bei der der Zyklus II im umgekehrten Sinne durchlaufen wird. Die dritte Differenz ergibt sich dann aus der ersten durch Permutation der oberen Indices. Sie wird eindeutig bestimmt durch die Forderung, dass der dritte Zyklus des Typus II mit dem zweiten einen Ring bilden soll. Ebenso entsteht die vierte Differenz aus der zweiten, ihr Zyklus vom Typus II bildet einen Ring mit dem ersten dieser Zyklen. Ersetzt man dann $\vartheta^\lambda_{1\varkappa}$ durch $\vartheta^\lambda_{2\varkappa}$, so erhält man eine Summe von vier neuen Differenzen, und in dieser zerstören sich das erste und vierte, sowie das zweite und dritte Glied. —

Die beschriebene Anordnung der Produkte $\vartheta_{\lambda\mu}$ mag noch für den Fall $n=4$ vollständig durchgeführt werden:

$$\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (41) & (42) & (43) & (44) \end{vmatrix} =$$

$$= \{(11)\cdot(22) - (12)\,(21)\}\cdot\{(33)\cdot(44) - (34)\,(43)\} -$$

$$-\{(11)\cdot(23)\,(32) - (13)\,(32)\,(21)\}\cdot(44) -$$

$$-\{(11)\cdot(24)\,(42) - (14)\,(42)\,(21)\}\cdot(33) -$$

$$+\{(11)\cdot(23)\,(34)\,(42) - (13)\,(34)\,(42)\,(21)\} +$$

$$+\{(11)\cdot(24)(43)(32)-(14)(43)(32)(21)\}+$$
$$-\{(13)(31)\cdot(22)-(12)(23)(31)\}\cdot(44)-$$
$$-\{(14)(41)\cdot(22)-(12)(24)(41)\}\cdot(33)+$$
$$+\{(13)(31)\cdot(24)(42)-(14)(42)(23)(31)\}+$$
$$+\{(14)(41)\cdot(23)(32)-(13)(32)(24)(41)\}+$$
$$+\{(13)(34)(41)\cdot(22)-(12)(23)(34)(41)\}+$$
$$+\{(14)(43)(31)\cdot(22)-(12)(24)(43)(31)\}.$$

Das Ganze stellt eine Entwickelung von ∇ nach Art der LAPLACE'schen Determinantenentwickelung in bezug auf die Unterdeterminanten aus den beiden ersten Reihen dar. Behandelt man die Faktoren des Typus IV ebenfalls in der beschriebenen Weise, so erhält man eine auch in der Form völlig bestimmte Darstellung von ∇, eben die im Beispiel $n=4$ angegebene.

Aus dem bewiesenen Satze ergeben sich noch einige Folgerungen analog Sätzen der Determinantentheorie; namentlich sieht man, dass eine ∇-Funktion mit zwei gleichen Reihen oder Spalten den Wert Null hat.

6. Die verschwindenden Ausdrücke (12) sind einseitige lineare homogene Funktionen der Quaternionen $\tilde{\alpha}_{i1}, \ldots \tilde{\alpha}_{im}$ oder $\tilde{\alpha}_{1k}, \ldots \tilde{\alpha}_{1m}$. Diese aber können nicht identisch gleich Null sein, wenn nicht alle Koeffizienten dieser Quaternionen Null sind.

Es ist bequem, hier einen Wechsel der Bezeichnung eintreten zu lassen. Wir setzen

$$\Theta^i_{ks}=\Phi^s_{ik}, \quad H^k_{si}=\Psi^s_{ik},$$

so dass

$$\tilde{\Phi}^s_{ik}=\Phi^k_{is}, \quad \tilde{\Psi}^s_{ik}=\Psi^i_{sk} \tag{13}$$

wird. Wir haben dann

$$A_{ik}=\sum_s \Phi^s_{ik}\tilde{\alpha}_{is}=\sum_s \tilde{\alpha}_{sk}\Psi^s_{ik}, \tag{14}$$

ferner

$$\begin{aligned}\nabla&=\sum_k \alpha_{ik}A_{ik}=\sum_{k,s}\alpha_{ik}\Phi^s_{ik}\tilde{\alpha}_{is},\\ \nabla&=\sum_i A_{ik}\alpha_{ik}=\sum_{i,s}\tilde{\alpha}_{sk}\Psi^s_{ik}\alpha_{ik},\end{aligned} \tag{15}$$

und

$$0 = \sum_k \alpha_{jk} A_{ik} = \sum_{k,s} \alpha_{jk} \Phi^s_{ik} \tilde{\alpha}_{is} \qquad (j \neq i),$$

$$0 = \sum_i A_{ik} \alpha_{il} = \sum_{i,s} \tilde{\alpha}_{sk} \Psi^s_{ik} \alpha_{il} \qquad (l \neq k).$$

Die beiden letzten Gleichungen liefern nun, wie gesagt, je n verschiedene Gleichungen,

$$(16) \qquad \begin{aligned} 0 &= \sum_k \alpha_{jk} \Phi^s_{ik} \qquad (j \neq i,\ s = 1, 2, \ldots m) \\ 0 &= \sum_i \Psi^s_{ik} \alpha_{il} \qquad (l \neq k,\ i = 1, 2, \ldots m) \end{aligned}$$

die wir mit den Gleichungen (14) zusammenstellen wollen:

$$(17) \qquad \begin{aligned} \tilde{A}_{ik} &= \sum_s \alpha_{is} \Phi^k_{is}, & \tilde{A}_{ik} &= \sum_s \Psi^i_{sk} \alpha_{sk}, \\ 0 &= \sum_s \alpha_{js} \Phi^k_{is}, & 0 &= \sum_s \Psi^i_{sk} \alpha_{sl}, \end{aligned}$$

$$(j \neq i,\ k = 1, 2, \ldots m), \quad (l \neq k,\ i = 1, 2, \ldots m).$$

In dem oben ausgeführten Beispiel $m = 3$ (S. 27) sind die Koeffizienten von $\tilde{\alpha}_{11}, \tilde{\alpha}_{12}, \tilde{\alpha}_{13}$ die hier mit $\Phi^1_{11}, \Phi^2_{11}, \Phi^3_{11}$ bezeichneten Funktionen. Ersetzt man $\tilde{\alpha}_{11}, \tilde{\alpha}_{12}, \tilde{\alpha}_{13}$ der Reihe nach durch $\tilde{\alpha}_{21}, \tilde{\alpha}_{22}, \tilde{\alpha}_{23}$, oder durch $\tilde{\alpha}_{31}, \tilde{\alpha}_{32}, \tilde{\alpha}_{33}$, so erhält man die Summe Null.

7. ∇ ist eine irreduzible Funktion der $4m^2$ Koordinaten der Quaternionen α_{ik}. Diese Behauptung, die ja in den Fällen $m = 1$ und $m = 2$ zutrifft, muss für $m = n + 1$ richtig sein, wenn sie es für den Wert $m = n$ ist. Die $(n+1)$-reihige ∇-Funktion geht nämlich in das Quadrat einer beliebigen $(n+1)$-reihigen Determinante, also in das Quadrat einer irreduzibeln Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades über, wenn alle Quaternionen α_{ik} skalar werden. Daher kann ein irreduzibler Teiler von ∇ nur den Grad $n+1$ oder den Grad $2(n+1)$ haben. Der erste Fall aber ist unmöglich, da die ∇-Funktion $(2n+2)^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{00}, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & \alpha_{11}, & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \alpha_{n1}, & \ldots & \alpha_{nn} \end{Bmatrix} = \{\alpha_{00}\} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{Bmatrix}$$

einen Teiler vom Grade $2n$ hat, der selbst eine nicht-spezialisierte ∇-Funktion ist.

4.

Einseitige Quaternionengleichungen mit beliebig vielen Unbekannten. Weitere Eigenschaften der Nablafunktion.

Die Auflösung der Gleichungssysteme

$$(1^l) \qquad \alpha_{i1} x_1 + \cdots + \alpha_{im} x_{1m} = x'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

$$(1^r) \qquad \xi'_k = \xi_1 \alpha_{1k} + \cdots + \xi_m \alpha_{mk} \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

ergibt sich nun ohne Weiteres in allen Fällen, in denen überhaupt eine eindeutig bestimmte Lösung existiert, aus den Gleichungen (11) und (12) in § 3. Ist nämlich $\nabla(\alpha_{ik}) \neq 0$, so folgt

$$(2^l) \qquad A_{1k} x'_1 + \cdots + A_{mk} x'_m = \nabla . x_k \qquad (k = 1 \ldots m)$$

$$(2^r) \qquad \xi_i . \nabla = \xi'_1 A_{i1} + \cdots + \xi'_m A_{im} \qquad (i = 1, \ldots m).$$

Wie schon im Falle $m = 2$ (und auch im Falle $m = 1$) ist eine eindeutig bestimmte Lösung immer dann und nur dann vorhanden, wenn $\nabla \neq 0$ ist. Zwischen ∇ und der Determinante D der in je $4m$ gewöhnliche lineare Gleichungen zerlegten Systeme (1) besteht die Beziehung

$$(3) \qquad D = \nabla^2.$$

Ferner lassen sich die an den Fall $m = 2$ geknüpften gruppentheoretischen Überlegungen ohne sonderliche Änderung auf unbestimmte Werte der Zahl m ausdehnen. Namentlich ergibt sich auch *eine Multiplikationsregel für die ∇-Funktion.* Wir erklären das Produkt zweier Quaternionenmatrices, unter der Annahme, dass der erste Index (i) die Reihen, der zweite $(\varkappa)$ die Spalten einer solchen Matrix charakterisiert, nach der gewöhnlichen Regel: Wir schreiben

$$(\alpha_{ik})(\beta_{ik}) = (\gamma_{ik}),$$

wenn

$$\alpha_{i1} \beta_{1k} + \cdots + \alpha_{im} \beta_{mk} = \gamma_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots m)$$

ist. *Es wird dann*

$$(4) \qquad \{\alpha_{ik}\} \cdot \{\beta_{ik}\} = \{\gamma_{ik}\}.$$

Ferner lässt sich die ∇-Funktion, genau so wie im Falle $m = 2$, als $2m$-reihige Determinante darstellen, deren Elemente beliebig, nur in der Bezeichnung zu m^2 zweireihigen Matrices (*als Gittermatrix*) angeordnet sind. Die ganze vorge-

tragene Theorie findet ohne Weiteres auf solche Matrices, und die zugehörigen Gleichungen — Gleichungen für Matrices — Anwendung.

Es versteht sich, dass von der Multiplikationsregel (4) ein ähnlicher Gebrauch gemacht werden kann, wie von der Multiplikationsregel für *m-reihige* Determinanten. Ich habe nicht die Absicht, in dieser Hinsicht Vollständigkeit anzustreben, will aber einen Lehrsatz ableiten, von dem wir sogleich Gebrauch zu machen haben werden.

Wir bilden zunächst das Produkt

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{Bmatrix} = \nabla^{2m},$$

erhalten also

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{Bmatrix} = \nabla^{2m-1}; \tag{5}$$

hierauf bilden wir das Produkt

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{Bmatrix} = \{A_{11}\} \cdot \nabla^{2m-2},$$

und erhalten

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{Bmatrix} \cdot \nabla = \{A_{11}\} = N A_{11}. \tag{6}$$

Hieraus folgt allgemein der zuvor schon unter der Annahme $m = 2$ bewiesene Satz, *dass* ∇ *semidefinit ist,*

$$\nabla \geq 0,$$

wenn die $4m$ *Koordinaten der Quaternionen* α_{ik} *reell sind*[1] $(m > 1)$.

[1] Siehe weiterhin S. 36.

In gleicher Weise liefert das Produkt

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \ldots & \alpha_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1m} & A_{2m} & \ldots & A_{mm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \ldots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \ldots & A_{m2} \\ 0 & 0 & \nabla & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \nabla \end{Bmatrix}$$

die Formel

$$\begin{vmatrix} \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m3} & \ldots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \cdot \nabla^{3} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix};$$

allgemein erhält man auf diese Art

$$\begin{vmatrix} \alpha_{k+1,k+1} & \ldots & \alpha_{k+1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m,k+1} & \ldots & \alpha_{m,m} \end{vmatrix} \cdot \nabla^{2k-1} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{k1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1k} & A_{2k} & \ldots & A_{kk} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Anlass zur Verwertung der Formel (6) gibt uns das Gleichungssystem (17) in § 3. Hieraus folgt nämlich unmittelbar, dass man *in der Regel* die Lösung der Gleichungen (1) noch auf mannigfache andere Arten darstellen kann. Wir erhalten

$$\Psi^i_{1k} x'_1 + \cdots + \Psi^i_{mk} x'_m = \tilde{A}_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, \ldots m) \tag{8^l}$$

$$\xi_i \tilde{A}_{ik} = \xi'_1 \Phi^k_{i1} + \cdots + \xi'_m \Phi^k_{im} \qquad (k, i = 1, \ldots m). \tag{8^r}$$

Es ist nicht ohne Interesse, diese Lösungen der Gleichungen (1), die wir vielleicht als *Nebenlösungen* bezeichnen dürfen, mit der *Hauptlösung* (2) zu vergleichen, die der Bequemlichkeit halber nochmals hergesetzt werden soll:

$$A_{1k} x'_1 + \cdots + A_{mk} x'_m = \nabla \cdot x_k, \qquad (k = 1, \ldots m) \tag{9^l}$$

$$\xi_i \cdot \nabla = \xi'_1 A_{i1} + \cdots + \xi'_m A_{im} \qquad (i = 1, \ldots m). \tag{9^r}$$

Zunächst sehen wir:

Die Hauptlösung lässt sich in jedem der zwei Fälle (l, r) *als lineare Kombination der* m *Nebenlösungen darstellen* (deren Koeffizienten in den Koordinaten der

Quaternionen α_{st} Gradzahlen haben, die um je eine Einheit geringer sind als die Gradzahlen der entsprechenden Koeffizienten der Hauptlösung).

In der Tat bestehen nach Nr. (13), (15) und (17) in § 3 die Gleichungen

$$(10^l)\qquad \sum_i \tilde{\alpha}_{ik} \Psi^i_{sk} = A_{sk}, \quad \sum_i \tilde{\alpha}_{ik} \tilde{A}_{ik} = \nabla \quad (k, s = 1, \dots m),$$

$$(10^r)\qquad \sum_k \Phi^k_{is} \tilde{\alpha}_{ik} = A_{is}, \quad \sum_k \tilde{A}_{ik} \tilde{\alpha}_{ik} = \nabla \quad (i, s = 1, \dots m).$$

Ferner erhalten wir aus (6), oder aus der gleichbedeutenden Formel

$$(11)\qquad N A_{ik} = \nabla \cdot \Phi^k_{ik} = \nabla \cdot \Psi^i_{ik}$$

die Formeln, die den Übergang von den einzelnen Nebenlösungen zur Hauptlösung vermitteln; multiplizieren wir nämlich beide Seiten der Gleichungen (8) mit A_{ik}, um auf diese Art zu Gleichungen mit skalarem Nenner überzugehen, so erhalten wir die Gleichungen (9) mit einem Faktor

$$\Phi^k_{ik} = \Psi^i_{ik},$$

dessen Verschwinden also jene Nebenlösung unbrauchbar macht.

Endlich ergeben sich noch, wenn man die Produkte $\tilde{A}_{ik} x_k$ und $\nabla \cdot x_k$, $\xi_i \tilde{A}_{ik}$ und $\xi_i \cdot \nabla$ aus den Gleichungen (8) und (9) eliminiert, die merkwürdigen Formeln

$$(12)\qquad \nabla \cdot \Phi^s_{ik} = A_{ik} \tilde{A}_{is}, \quad \nabla \cdot \Psi^s_{ik} = \tilde{A}_{sk} A_{ik}.$$

Man sieht aus diesen Ausdrücken, deren Substitution in einer Reihe zuvor entwickelter Gleichungen Identitäten entstehen lässt, dass die bilinearen Formen, die uns zur Darstellung von ∇ gedient haben,

$$\sum_{k,s} \alpha_{ik} \Phi^s_{ik} \tilde{\alpha}_{is} = \nabla = \sum_{i,s} \tilde{\alpha}_{sk} \Psi^s_{ik} \alpha_{ik}$$

sehr spezielle Koeffizientensysteme besitzen: Es bestehen die sämtlichen Gleichungen

$$(13)\qquad \Phi^s_{ir} \Phi^t_{is} - \Phi^s_{is} \cdot \Phi^t_{ir} = 0, \quad \Psi^s_{rk} \Psi^t_{sk} - \Psi^s_{sk} \cdot \Psi^t_{rk} = 0,$$

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} \Phi^s_{ik} & \Phi^t_{ik} \\ \Phi^s_{il} & \Phi^t_{il} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \Psi^s_{ik} & \Psi^s_{jk} \\ \Psi^t_{ik} & \Psi^t_{jk} \end{vmatrix} = 0.$$ [1]

[1] Die Gleichungen (12) lassen noch erkennen, dass die Produkte

$$\Phi^s_{ik} = \Theta^i_{ks}, \quad \Psi^s_{ik} = \Pi^k_{si}$$

Zu beachten ist, dass die vorgetragene Lösungsmethode eben so wenig die Bedeutung eines Universalrezepts hat, wie die allgemeine Theorie der linearen Gleichungen. Es wird das durch den Fall erläutert, in dem alle Quaternionen oder Matrices a_{ik} skalar sind. ∇ wird dann das Quadrat der Determinante jener Grössen, und in den Nennern der sachgemäss gebildeten Ausdrücke für die Unbekannten erscheint nur diese Determinante an Stelle von ∇.

Das zuvor über das Vorzeichen der ∇-Funktion Gesagte wird ergänzt durch einen Satz von I. Schur:

Sind die Koordinaten der m^2 Quaternionen $a_{11}, \ldots a_{mm}$ reell, so kann, wenn $m > 1$ ist, die zugehörige ∇-Funktion nicht als Summe von Quadraten reeller ganzer rationaler Funktionen (homogener Formen) jener Koordinaten dargestellt werden.

Es genügt offenbar, den Beweis, den ich ebenfalls einer Mitteilung von I. Schur verdanke, für den Fall $m = 2$ zu führen.

Es wird dann

$$\nabla = \begin{Bmatrix} x & y \\ z & u \end{Bmatrix} = \begin{cases} (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \\ (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - \end{cases}$$

$$- 2(x_0z_0 + x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)(u_0y_0 + u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3) +$$

$$+ 2(x_0z_1 - x_1z_0 + x_2z_3 - x_3z_2)(u_0y_1 - u_1y_0 + u_2y_3 - u_3y_2) +$$

$$+ 2(x_0z_2 - x_2z_0 + x_3z_1 - x_1z_3)(u_0y_2 - u_2y_0 + u_3y_1 - u_1y_3) +$$

$$+ 2(x_0z_3 - x_3z_0 + x_1z_2 - x_2z_1)(u_0y_3 - u_3y_0 + u_1y_2 - u_2y_1).$$

Wäre nun $\nabla = f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_{n-1}^2$, wo $f_0, \ldots f_{n-1}$ reelle quadratische Formen der sechzehn Veränderlichen $x_0 \ldots u_3$ bedeuten, so könnte man

$$f_\nu = x_0 U_{\nu 0} + x_1 U_{\nu 1} + x_2 U_{\nu 2} + x_3 U_{\nu 3} + z_0 Y_{\nu 0} + z_1 Y_{\nu 1} + z_2 Y_{\nu 2} + z_3 Y_{\nu 3}$$

setzen; $U_{\nu k}$ wäre dann eine lineare homogene Funktion (Form) von u_0, u_1, u_2, u_3, und $Y_{\nu k}$ eine ebensolche Funktion von y_0, y_1, y_2, y_3. Diese linearen Formen müssten unter Anderem den folgenden Bedingungen genügen:

---

für die Matrix (A_{ik}) eine ganz ähnliche Bedeutung haben, wie für die Matrix (a_{ik}) die Produkte

$$\vartheta_{ks}^i = a_{ki}\tilde{a}_{si}, \quad \eta_{si}^k = \tilde{a}_{ks}a_{ki},$$

von denen wir die ersten zur Beschreibung des Bildungsgesetzes der ∇-Funktion benutzt hatten. — Natürlich würde sich das Bildungsgesetz der ∇-Funktion auch mit Hülfe der Produkte η_{si}^k haben beschreiben lassen. —

(a) $$\sum_\nu U_{\nu 0}^2 = \sum_\nu U_{\nu 1}^2 = \sum_\nu U_{\nu 2}^2 = \sum_\nu U_{\nu 3}^2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

(b) $$\sum_\nu Y_{\nu 0}^2 = \sum_\nu Y_{\nu 1}^2 = \sum_\nu Y_{\nu 2}^2 = \sum_\nu Y_{\nu 3}^2 = y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

(c) $$\sum_\nu U_{\nu 0} Y_{\nu 0} = - u_0 y_0 - u_1 y_1 - u_2 y_2 - u_3 y_3,$$

(d_1) $$\sum_\nu U_{\nu 0} Y_{\nu 1} = \quad u_0 y_1 - u_1 y_0 + u_2 y_3 - u_3 y_2,$$

(d_2) $$\sum_\nu U_{\nu 0} Y_{\nu 2} = \quad u_0 y_2 - u_2 y_0 + u_3 y_1 - u_1 y_3,$$

(d_3) $$\sum_\nu U_{\nu 0} Y_{\nu 3} = \quad u_0 y_3 - u_3 y_0 + u_1 y_2 - u_2 y_1,$$

(e_1) $$\sum_\nu U_{\nu 1} Y_{\nu 0} = - u_0 y_1 + u_1 y_0 - u_2 y_3 + u_3 y_2,$$

(e_2) $$\sum_\nu U_{\nu 2} Y_{\nu 0} = - u_0 y_2 + u_2 y_0 - u_3 y_1 + u_1 y_3,$$

(e_3) $$\sum_\nu U_{\nu 3} Y_{\nu 0} = - u_0 y_3 + u_3 y_0 - u_1 y_2 + u_2 y_1.$$

Dem Beweise unserer Behauptung schicken wir voraus den folgenden *Hilfssatz:* »Genügen n reelle lineare Formen

$$y_\nu = a_{\nu 1} x_1 + \cdots + a_{\nu m} x_m \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

der Gleichung

(f) $$y_1^2 + \cdots + y_n^2 = x_1^2 + \cdots + x_m^2$$

(woraus $n \geq m$ folgt), so lässt sich eine reelle orthogonale Transformation

$$\begin{aligned} y'_1 &= p_{11}\, y_1 + \cdots + p_{1n}\, y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y'_m &= p_{m1}\, y_1 + \cdots + p_{mn}\, y_n \end{aligned}$$

so bestimmen, dass

$$y'_1 = x_1, \ldots y'_m = x_m,$$

und ausserdem (wenn $n > m$ ist)

$$y'_{m+1} = 0, \ldots y'_n = 0$$

wird.»

Er handelt sich natürlich nur um den Fall $n > m$, und es kommt darauf an, zu zeigen, dass die verlangten Gleichungen auch dann durch eine *orthogonale* Transformation hergestellt werden können.

Die Gleichung (f) sagt lediglich aus, dass die m linearen Formen

$$v_\mu = a_{1\mu} u_1 + \cdots + a_{n\mu} u_n \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

(in denen $u_1 \ldots u_n$ unabhängige Veränderliche bedeuten) ein System normiert-orthogonaler Formen bilden. Man bestimme nun (was bekanntlich immer möglich ist) $n - m$ weitere reelle Formen

$$v_k = a_{1k} u_1 + \cdots + a_{nk} u_n \qquad (k = m + 1, \ldots n)$$

derart, dass $v_1, \ldots v_n$ ein vollständiges System von normiert-orthogonalen Formen bilden. Setzt man hierauf

$$y'_k = a_{1k} y_1 + \cdots + a_{mk} y_n \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

so wird

$$y'_k = \sum_1^m{}^\mu x_\mu \sum_1^n{}^\nu a_{\nu k} a_{\nu\mu} = \begin{cases} = x_k \text{ für } k \leq m, \\ = 0 \text{ für } k > m. \end{cases} —$$

Im Falle der ersten Gleichung unter (a),

$$\sum_0^{n-1}{}^\nu U_{\nu 0}^2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

muss $n \geq 4$ sein. Man kann dann, nach dem bewiesenen Hilfssatz, eine reelle orthogonale Transformation

$$U'_{k0} = p_{k0} U_{00} + \cdots + p_{k, n-1} U_{n-1, 0}$$

so bestimmen, dass

$$U'_{00} = u_0, \; U'_{10} = u_1, \; U'_{20} = u_2, \; U'_{30} = u_3,$$

und ausserdem, wenn $n > 4$ ist,

$$U'_{40} = 0, \ldots U'_{n-1, 0} = 0$$

wird. Bildet man jetzt die Funktionen

$$f'_\nu = p_{\nu 0} f_0 + \cdots + p_{\nu, n-1} f_{n-1} \quad (\nu = 0, 1, \ldots n - 1),$$

so haben diese dieselbe Form wie die ursprünglichen Funktionen $f_0, \ldots f_{n-1}$, und

auch dieselbe Quadratsumme, an Stelle von $U_{\nu 0}$ erscheint aber jetzt $U'_{\nu 0}$. *Man darf daher annehmen, dass von vorn herein*

$$U_{00} = u_0,\ U_{10} = u_1,\ U_{20} = u_2,\ U_{30} = u_3;\ U_{40} = \cdots = 0$$

ist.

Aus (*c*) folgt nunmehr

$$Y_{00} = -y_0,\ Y_{10} = -y_1,\ Y_{20} = -y_2,\ Y_{30} = -y_3,$$

und aus (*b*) — *da die Veränderlichen y_k alle reell sein sollen* — $Y_{40} = \cdots = 0$. Ebenso können wir aus (*d*) und (*b*) die linearen Formen $Y_{\nu 1}$, $Y_{\nu 2}$, $Y_{\nu 3}$ berechnen, und schliesslich, auf Grund der Gleichungen (*e*) und (*a*), auch die Formen $U_{\nu 1}$, $U_{\nu 2}$, $U_{\nu 3}$. Das Ergebnis ist, dass nur noch der Fall $n = 4$ in Betracht kommt, und dass man auch in diesem nur die eine Annahme

$$f_0 = x_0 u_0 - x_1 u_1 - x_2 u_2 - x_3 u_3 - z_0 y_0 + z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3,$$

$$f_1 = x_0 u_1 + x_1 u_0 + x_2 u_3 - x_3 u_2 - z_0 y_1 - z_1 y_0 - z_2 y_3 + z_3 y_2,$$

$$f_2 = x_0 u_2 + x_2 u_0 + x_3 u_1 - x_1 u_3 - z_0 y_2 - z_2 y_0 - z_3 y_1 + z_1 y_3,$$

$$f_3 = x_0 u_3 + x_3 u_0 + x_1 u_2 - x_2 u_1 - z_0 y_3 - z_3 y_0 - z_1 y_2 + z_2 y_1$$

zu untersuchen braucht. Diese Funktionen genügen aber *nicht* der Gleichung

$$\nabla = f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2,$$

denn in ihrer Quadratsumme ist z. B. der Koeffizient von $2 x_2 z_3$ verschieden von dem entsprechenden Koeffizienten in der Entwickelung von ∇.[1]

5.

Die allgemeine Nablafunktion.

Setzt man an Stelle der Quaternionen oder zweireihigen Matrices ein unbestimmtes System komplexer Grössen (solcher mit Haupteinheit), so wird es nicht leicht sein, die Theorie »einseitiger» linearer Gleichungen so weit durchzuführen, wie es in dem konkreten und dabei verhältnismässig sehr einfachen Beispiel der Quaternionen noch thunlich war. Indessen lässt sich doch einiges Allgemeines aussagen, das beim Studium anderer konkreter Fälle nützlich sein kann.

Wir betrachten zunächst das in der Form $\alpha\alpha' = \alpha''$ abgekürzte Multiplikationstheorem irgend eines Systems komplexer Grössen mit reellen oder gewöhn-

[1] Vgl. hierzu HILBERT, Math. Ann. Bd 32 (1888), S. 342, Acta Mathematica, Bd 17 (1893) S. 169. Archiv f. Math. (3), Bd 1 (1901), S. 224, und Grundlagen der Geometrie (3. Aufl., 1909) Kap. VII, § 38.

lichen komplexen Koordinaten für die einzelnen Grössen des Systems, und bilden die Gleichungen

$$(1^l) \qquad \alpha x = x',$$

$$(1^r) \qquad \xi' = \xi \alpha,$$

in denen α, x', ξ' gegebene und x, ξ zu bestimmende Grössen des Systems bedeuten sollen. n sei die Zahl der linear-unabhängigen Grössen des Systems, also die Anzahl der in irgend einer *Basis* des Systems vorkommenden Einheiten, e_0 die Haupteinheit, die wir von der Einheit der gewöhnlichen reellen oder komplexen Grössen nicht unterscheiden ($e_0 = 1$). *Die n Koordinaten von α, und ebenso die von x' und ξ', sollen als unabhängige Veränderliche betrachtet werden.* Zu den Gleichungen (1^l) und (1^r) gehören dann, wenn man sie explizite schreibt, d. h. durch ein System von n gewöhnlichen linearen Gleichungen ersetzt, zwei nicht notwendig übereinstimmende Determinanten D_l und D_r, die als (ganze homogene) Funktionen (n^{ten} Grades) der Koordinaten $\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1}$ bekanntlich dieselben irreduziblen Teiler haben. Wir nehmen an, dass diese Determinanten von Null verschieden sind.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich z. B. die Gleichung (1^l) eindeutig auflösen.

Dabei tritt die Determinante D_l in den Nenner des sich für x ergebenden Ausdrucks, und in den Zählern der Koordinaten von x erscheinen lineare Kombinationen der sämtlichen Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von D_l. Wir denken uns die Faktoren, die die Determinante D_l mit *allen* ihrer Unterdeterminanten gemein hat, weggehoben; in den Nennern bleibt dann eine Funktion ϱ^{ten} Grades $\nabla(\alpha)$ der Koordinaten $\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1}$ stehen, und diese wird eindeutig bestimmt sein, wenn wir festsetzen, dass $\nabla(1) = 1$ sein soll. Nennen wir noch $\tilde{\alpha}$ die dann ebenfalls eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $\alpha x = \nabla(\alpha)$, so erhalten wir die Lösungen *beider* Gleichungen (1^l) und (1^r) in der *reduzierten* Form

$$(2^l) \qquad \nabla . x = \tilde{\alpha} x',$$

$$(2^r) \qquad \xi . \nabla = \xi' \tilde{\alpha} .$$

Die hier eingeführte Zahl ϱ, der Grad des nach Möglichkeit reduzierten Nenners $\nabla(\alpha)$, ist die als Rang des betrachteten Systems bekannte Zahl. Sie ist der niedrigste Grad einer algebraischen Gleichung mit skalaren Koeffizienten, der eine unbestimmte (frei veränderliche) Grösse des betrachteten Systems genügt.[1] In der Tat, verstehen wir unter r eine *skalare* Grösse des Systems, d. i. ein Multiplum der Haupteinheit, so kann man schreiben

[1] Th. Molien, Math. Ann. Bd 41 (1893), S. 113.

$$\nabla(r-\alpha) = r^{\varrho} + a_1 r^{\varrho-1} + \cdots + a_{\varrho},$$

und es folgt

(3) $$0 = \alpha^{\varrho} + a_1 \alpha^{\varrho-1} + \cdots + a_{\varrho};$$

dabei ist

(4) $$a_{\varrho} = \nabla(-\alpha) = (-1)^{\varrho}\nabla(\alpha).$$

Gäbe es nun eine für alle α richtige Gleichung der Form

$$0 = a'_0 \alpha^{\varrho'} + a'_1 \alpha^{\varrho'-1} + \cdots + a'_{\varrho'},$$

mit ebenfalls skalaren Koeffizienten, so dass $\varrho' < \varrho$ wäre und zugleich einen möglichst kleinen Wert hätte, so müsste die Gleichung (3) eine Folge von ihr sein, was nur möglich ist, wenn a'_0 den Grad Null hat. Man kann dann von vorn herein $a'_0 = 1$ setzen.

Es müsste ferner $a'_{\varrho'}$ von Null verschieden sein, da andernfalls

$$\alpha\{\alpha^{\varrho'-1} + a'_1 \alpha^{\varrho'-2} + \cdots + a'_{\varrho'-1}\} = 0$$

wäre, unter der über die Zahl ϱ' gemachten Annahme ein Widerspruch gegen die Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen (2). Man hätte also schliesslich in dem Ausdruck

$$-(a'_{\varrho'})^{-1}\{\alpha^{\varrho'-1} + a'_1 \alpha^{\varrho'-2} + \cdots + a'_{\varrho'-1}\} = \alpha^*$$

eine Lösung der Gleichung $\alpha x = 1$, und damit hätte man auch eine Lösung der Gleichungen (2), in der $\nabla(\alpha)$ durch eine Funktion niedrigeren Grades, $a'_{\varrho'}$, ersetzt wäre.

Es ergibt sich noch

(5) $$\nabla(\alpha) = \alpha\tilde{\alpha}, \quad \tilde{\alpha} = (-1)^{\varrho-1}\{\alpha^{\varrho-1} + a_1 \alpha^{\varrho-2} + \cdots + a_{\varrho-1}\}.$$

Um die komplexe Grösse $\tilde{\alpha}$ und mit ihr den skalaren Ausdruck $\nabla(\alpha)$ zu bilden, hat man hiernach die skalaren Funktionen ersten bis $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades $a_1, \ldots a_{\varrho-1}$ der Koordinaten einer unbestimmten Grösse α des betrachteten Systems zu bilden. Hierzu ist aber nur nötig, dass man den ersten dieser Koeffizienten a_1 bilden kann. Bezeichnen wir nämlich mit $r_1, \ldots r_{\varrho}$ die Wurzeln der (zuvor schon gebildeten) *Ranggleichung* des betrachteten Systems,

(6) $$\nabla(r-\alpha) = r^{\varrho} + a_1 r^{\varrho-1} + \cdots + a_{\varrho} = 0,$$

und setzen wir (nach Analogie des in der Quaternionentheorie Üblichen)

(7) $$\mathfrak{S}\alpha = -\frac{1}{\varrho}\cdot a_1,$$

so folgt unmittelbar[1]

(8) $$r_1^\lambda + \cdots + r_\varrho^\lambda = \varrho\,.\,\mathfrak{S}\alpha^\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, \varrho - 1, \ldots);$$

es lassen sich aber die symmetrischen Funktionen $a_1, \ldots a_\varrho$ der Wurzeln $r_1, \ldots r_\varrho$ in bekannter Weise durch die Potenzsummen (8) ausdrücken. Man hat z. B.

$$a_1 = -\varrho\,\mathfrak{S}\alpha,\ 2\,!\,a_2 = \varrho^2(\mathfrak{S}\alpha)^2 - \varrho\,\mathfrak{S}\alpha^2,$$

$$3\,!\,a_3 = -\varrho^3(\mathfrak{S}\alpha)^3 + 3\varrho^2\,\mathfrak{S}\alpha\,\mathfrak{S}\alpha^2 - 2\varrho\,\mathfrak{S}\alpha^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir ein System von m linearen Gleichungen der Form

(9^l) $$\alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{im}x_m = x'_i \qquad (i = 1, \ldots m)$$

oder

(9^r) $$\xi'_k = \xi_1\alpha_{1k} + \cdots + \xi_m\alpha_{mk} \qquad (k = 1, \ldots m),$$

in denen $\alpha_{11} \ldots \alpha_{mm}$, $x'_1 \ldots x'_m$, $\xi'_1 \ldots \xi'_m$ wiederum Grössen des betrachteten Systems (α) sein sollen, und $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{mm}$ frei-veränderliche Grössen dieses Systems, nur beschränkt durch die Annahme, dass etwa die Gleichungen (9^l) eindeutig-auflösbar sein sollen. Die Lösungen dieser Gleichungen (9^l) denken wir uns in eine reduzierte Form gesetzt, derart, dass in allen Nennern von $x_1, \ldots x_n$ eine gewisse notwendig homogene Funktion der nm^2 Koordinaten von $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{mm}$ erscheint, deren Grad nicht weiter hinabgedrückt werden kann. Diese nach Voraussetzung nicht verschwindende Funktion (*Nablafunktion*) bezeichnen wir durch das Symbol

(10) $$\nabla(\alpha_{ik}) = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mm} \end{Bmatrix},$$

indem wir noch einen zunächst willkürlich bleibenden Zahlenfaktor aus der Forderung

[1] Vgl. etwa Molien, a. a. O., S. 110.

$$(11)\qquad 1 = \begin{Bmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{Bmatrix}$$

bestimmen. Wir behaupten:

Zu den Gleichungen (9^l) *und* (9^r) *gehört dieselbe Nablafunktion. Diese ist eine homogene Funktion des Grades* $m\varrho$ *der Koordinaten der Grössen* $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{mm}$, *und zwar ist sie homogen vom Grade* ϱ *in bezug auf die Koordinaten der Elemente irgend einer Zeile oder Spalte der Matrix* (α_{ik}), *und sie erreicht überdies den Grad* ϱ *in bezug auf die Koordinaten eines jeden dieser Elemente* α_{ik}.

Zunächst ergibt sich, dass $\nabla(\alpha_{ik})$ in irgend einem Grade ϱ' homogen sein muss in bezug auf die Elemente der ersten Zeile, da eine proportionale Änderung der Grössen $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{1m}, x'_1$ die Werte von $x_1, \ldots x_m$ nicht ändern kann; auch leuchtet es ein, dass diese Gradzahl ϱ' für alle Zeilen dieselbe sein muss. Ferner ist sicher $\varrho' \geqq \varrho$, da im Spezialfall $\alpha_{11} x_1 = x'_1, \ldots \alpha_{mm} x_m = x'_m$ dieser Grad tatsächlich erreicht wird. Es kann sodann der Schluss von m auf $m + 1$ angewendet werden, da der zu erweisende Satz für $m = 1$ richtig ist.

Wir betrachten zu diesem Zweck das weitere Gleichungssystem

$$(a)\qquad \begin{aligned} \alpha_{00} X_0 + \alpha_{01} X_1 + \cdots + \alpha_{0m} X_m &= X'_0, \\ \alpha_{10} X_0 + \alpha_{11} X_1 + \cdots + \alpha_{1m} X_m &= X'_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_{m0} X_0 + \alpha_{m1} X_1 + \cdots + \alpha_{mm} X_m &= X'_m; \end{aligned}$$

in der zugehörigen Nablafunktion seien die Glieder zusammengefasst, die in bezug auf die Koordinaten von α_{00} denselben Grad haben,

$$(b)\qquad \nabla(\alpha_{00}, \alpha_{11}, \ldots \alpha_{mm}) = \psi^{\varrho'}(\alpha_{00}) + \psi^{\varrho'-1}(\alpha_{00}) + \cdots.$$

Lösen wir sodann die m letzten unter den Gleichungen (a) nach den Unbekannten $X_1, \ldots X_m$ auf, so erhalten wir diese in Form von Quotienten, in denen Nennern die Nablafunktion (10) erscheint, während von den Zählern angenommen werden darf, dass sie alle in der Form $a X_0 + b$ geschrieben sind. Die Substitution dieser Ausdrücke in die erste Gleichung unter (a) liefert eine Gleichung von der Form (1^l),

$$(c)\qquad \{\nabla(\alpha_{11}, \ldots \alpha_{mm}) \cdot \alpha_{00} + A\} X_0 = B,$$

in der, nach Voraussetzung, der Faktor von α_{00} den Grad $m\varrho$ und A den Grad

$m\varrho + 1$ hat. Die formale Auflösung von (c) nach der zuvor entwickelten Regel liefert dann für X_0 einen Quotienten, dessen Nenner eine homogene Funktion vom Grade ϱ in bezug auf die Koordinaten von $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \ldots \alpha_{0m}$ ist, in dem ferner auch ein Glied ϱ^{ten} Grades in bezug auf α_{00} vorkommt, nämlich das Produkt

$$\{\nabla(\alpha_{11}, \ldots \alpha_{mm})\}^{\varrho} \cdot \nabla(\alpha_{00}).$$

Wir sehen also, dass $\varrho' = \varrho$ ist, und dass die Funktion $\psi^{\varrho}(\alpha_{00})$ das Produkt von $\nabla(\alpha_{00})$ mit einer (skalaren) Funktion der Koordinaten von $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{mm}$ sein muss. Diese letzte Funktion ist ferner ein Teiler vom Grade $m\varrho$ der Funktion des Grades $m\varrho^2$

$$\{\nabla(\alpha_{11}, \ldots \alpha_{mm})\}^{\varrho};$$

sie kann aber nichts anderes sein als $\nabla(\alpha_{11}, \ldots \alpha_{mm})$ selbst, da sie im Falle $\alpha_{01} = 0, \ldots \alpha_{0m} = 0,\ \alpha_{10} = 0, \ldots \alpha_{m0} = 0$ von vorn herein diesen Wert hat.

Hiermit ist der aufgestellte Satz erwiesen, soweit er sich auf das Gleichungssystem (9^l) bezieht. Ausserdem hat sich auch ergeben, dass die auf der Bildung der Gleichung (c) beruhende Lösungsmethode der Gleichungen (a) den Ausdruck für X_0 mit dem fremden Faktor

$$\{\nabla(\alpha_{11}, \ldots \alpha_{mm})\}^{\varrho-1}$$

in Zähler und Nenner liefert, dass sie also nicht allgemein brauchbar ist.

Zu beweisen bleibt noch, dass die Nablafunktion sich nicht ändert, wenn man die Gleichungen (9^l) durch die Gleichungen (9^r) ersetzt. Dies folgt daraus, dass die Gleichungen (9) im Grunde schon in Gleichungen des Typus (1) enthalten sind.

In der Tat, setzen wir an Stelle der m Gleichungen (9^l) oder (9^r) je m solche Systeme, die links dieselben Koeffizienten haben,

$$(12^l) \qquad \alpha_{i1}x_{1k} + \cdots + \alpha_{im}x_{mk} = x'_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots m),$$

$$(12^r) \qquad \xi'_{ik} = \xi_{i1}\alpha_{1k} + \cdots + \xi_{im}\alpha_{mk} \qquad (i, k = 1, \ldots m),$$

so werden die Lösungen dieser *speziellen* Gleichungen (12^l) noch denselben reduzierten Nenner $\nabla(\alpha_{ik})$ haben, wie die Lösungen der Gleichungen (9^l). Wir bezeichnen diesen Nenner hier mit ∇_l, und nennen ∇_r die entsprechend aus (12^r) abgeleitete Funktion. Die Gleichungen (12) haben nun genau dieselbe Form wie die Definitionsgleichungen des Produkts von zwei gewöhnlichen Matrices,

$$(13^l) \qquad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & \dots & x_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{11} & \dots & x'_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x'_{m1} & \dots & x'_{mm} \end{bmatrix},$$

$$(13^r) \qquad \begin{bmatrix} \xi'_{11} & \dots & \xi'_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi'_{m1} & \dots & \xi'_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{m1} & \dots & \xi_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix},$$

nur dass die zu einer neuen Matrix komponierten Matrices zu Elementen nicht gerade gewöhnliche (reelle oder) komplexe Grössen, sondern solche aus dem beliebigen System (α) haben. Nichts hindert aber dann, den Inbegriff der m^2 komplexen Grössen $\alpha_{11}, \dots \alpha_{mm}$ selbst wieder als eine einzige komplexe Grösse A höherer Ordnung aufzufassen. Die Gleichungen (12) oder (13) werden dann subsumiert unter den Typus der Gleichungen (1),

$$(14^l) \qquad A\,X = X';$$

$$(14^r) \qquad \Xi' = \Xi\,A;$$

die Einheiten des neuen Systems (A) sind die Produkte der Einheiten des Systems (α) mit m^2 Einheiten e_{ik}, deren Multiplikationsregeln

$$e_{ij}\,e_{jk} = e_{ik}, \qquad e_{ij}\,e_{kl} = 0 \quad (j \neq k)$$

die Multiplikationsregel gewöhnlicher Matrices liefern: *Das System (A) ist das sogenannte Produkt aus dem System (α) mit dem System, dessen Einheiten die e_{ik} sind.*

Der Rang des neu gebildeten Systems ist $m \,.\, \varrho$, für die durch (12) definierten Grössen A aber hat man, eben nach (12):

$$\nabla_l^m = \nabla(A) = \nabla_r^m.$$

Daher könnte sich ∇_r von ∇_l höchstens um einen Zahlenfaktor unterscheiden, dieser aber esweist sich als die Einheit: $\nabla_r = \nabla_l = \nabla(\alpha_{ik})$.

Unmittelbar einleuchtend ist nunmehr auch, dass die Nablafunktion an gewissen Eigenschaften der Determinanten teilnimmt. So ziehen die Gleichungen (13) die als *Multiplikationsregel der Nablafunktion* zu bezeichnenden Gleichungen

$$(15^l) \qquad \nabla(\alpha_{ik}) \,.\, \nabla(x_{ik}) = \nabla(x'_{ik}),$$

$$(15^r) \qquad \nabla(\xi'_{ik}) = \nabla(\xi_{ik}) \,.\, \nabla(\alpha_{ik})$$

nach sich. Hieraus, und aus den nachgewiesenen Homogeneitätseigenschaften der Nablafunktion folgt dann ohne Weiteres: Die Nablafunktion ändert ihren Wert nicht, wenn man zu irgend einer Zeile (Spalte) der Matrix (α_{ik}) ein vorderes (hinteres) Multiplum einer anderen Zeile (Spalte) addiert. Sie verschwindet also, wenn zwei Zeilen (Spalten) einander gleich werden; was übrigens auch schon daraus hervorgeht, dass sie ein Teiler der Determinanten $D_l^{(m)}$ und $D_r^{(m)}$ der beiden Gleichungen (9) sein muss. Sie nimmt den Faktor $\nabla(\varrho)$ an, wenn man die Elemente einer Zeile (Spalte) vorn (hinten) mit ϱ multipliziert. Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten, so wird die Nablafunktion mit einem Faktor reproduziert, der eine Quadratwurzel aus der Einheit sein muss. Um diesen Faktor zu bestimmen, genügt es offenbar, eine zweireihige Nablafunktion, und auch diese im Falle eines Zahlenbeispiels zu betrachten. Es ist aber

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\} = (-1)^{\varrho} \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\};$$

die Nablafunktion wechselt also bei Vertauschung von zwei Zeilen oder Spalten ihr Vorzeichen, oder sie bleibt ungeändert, je nachdem $\varrho \equiv 1$ mod. 2 oder $\varrho \equiv 0$ mod. 2 ist. Endlich ist allgemein z. B.

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\mu} & 0 \ldots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1} \ldots \alpha_{\mu\mu} & 0 \ldots 0 \\ \alpha_{\mu+1,1} \ldots \alpha_{\mu+1,\mu} & \alpha_{\mu+1,\mu+1} \ldots \alpha_{\mu+1,m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{m1} \ldots \alpha_{m\mu} & \alpha_{m,\mu+1} \ldots \alpha_{mm} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1\mu} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1} \ldots \alpha_{\mu\mu} \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} \alpha_{\mu+1,\mu+1} \ldots \alpha_{\mu+1,m} \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{m,\mu+1} \ldots \alpha_{mm} \end{matrix}\right\},$$

u. A. m.

Hiermit haben wir also eine allgemein anwendbare Definition der Nablafunktion erlangt. Gelingt es, wie bei den Quaternionen, ihr Bildungsgesetz zu ermitteln, so darf man eine Verbesserung der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen in solchen Fällen erwarten, in denen der Rang ϱ des Systems (α) kleiner ist als die Zahl n seiner Einheiten. Eine weitere Vereinfachung wird eintreten, wenn die komplexe Grösse A speziell gewählt ist und zu denen gehört, bei denen schon eine frühere Potenz als $A^{m\varrho}$ durch niedrigere Potenzen ausdrückbar ist.[1] Ist das System (α) reduzibel, so ist es auch seine

[1] Übrigens gibt es auch noch anders geartete Fälle, in denen eine weitere Reduktion möglich ist. Vgl. § 7.

Nablafunktion; sie ist das Produkt der Nablafunktionen, die zu den Teilsystemen gehören, in die das System (α) zerfällt. Dies tritt bekanntlich immer ein, wenn $\varrho = n$ ist, mit der einen Ausnahme eines Systems, dessen Multiplikationsregeln in der Form

$$(16) \qquad \begin{array}{ll} \varepsilon_i \varepsilon_k = \varepsilon_{i+k} & (i + k \leq n - 1) \\ \varepsilon_i \varepsilon_k = 0 & (i + k > n - 1) \end{array} \quad \{i, k = 0, 1, \ldots n - 1\}$$

geschrieben werden können. Die Nablafunktion fällt dann zusammen mit der Determinante

$$(17) \qquad \nabla(\alpha_{ik}) = D = \triangle^n = \begin{vmatrix} \alpha_{00}^{(0)} & \ldots & \alpha_{0,m-1}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m-1,0}^{(0)} & \ldots & \alpha_{m-1,m-1}^{(0)} \end{vmatrix}^n$$

der Gleichungen (9). Entspricht das System (α) selbst schon dem Multiplikationstheorem der (gewöhnlichen) Matrices,

$$(18) \qquad \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{ik}, \ \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = 0 \quad (j \neq k),$$

so dass $n = \varrho^2$ wird, so lässt sich die Nablafunktion als gewöhnliche Determinante (Gitterdeterminante) darstellen, analog dem, was wir im Falle $\varrho = 2$ gefunden hatten,

$$(19) \qquad \nabla = \begin{vmatrix} (\alpha_{11}) & \ldots & (\alpha_{1m}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (\alpha_{m1}) & \ldots & (\alpha_{mm}) \end{vmatrix}.$$

Bei allem Vorgetragenen ist nur auf solche Eigenschaften der betrachteten Systeme (α) Rücksicht genommen, die von der Wahl der Basis unabhängig sind. Bei spezieller Wahl der Basis können für einzelne Gruppen der Unbekannten sehr wohl weitere Reduktionen eintreten, wie es z. B. der Fall ist bei dem System (16).

6.

Beispiele.

Am leichtesten zugänglich sind, ausser gewissen in § 5 schon gelegentlich betrachteten Systemen mit kommutativer Multiplikation, die Systeme (α), die den Rang 2 haben, bei denen also alle Grössen des Systems, wie im Falle der Quaternionen, einer Gleichung der Form

$$x^2 - 2\,\mathfrak{S}x \,.\, x^1 + \mathfrak{N}x \,.\, x^0 = 0$$

mit skalaren Koeffizienten genügen. Man hat dann

$$\tilde{x} = 2\,\mathfrak{S}x - x, \quad \mathfrak{N}x = x\tilde{x} = \tilde{x}x,$$

und man kommt ganz ähnlich wie bei den Quaternionen oder den zweireihigen Matrices zur Auflösung eines Systems einseitiger linearer Gleichungen.

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 3$, in dem nur ein einziges System komplexer Grössen (*ein* Typus mit *einer* Gestalt) existiert, dessen Multiplikationsregel dem Kommutationsgesetz nicht gehorcht. Die Multiplikationstabelle dieses Systems, das übrigens als Unter- oder Teilsystem im System der zweireihigen Matrices enthalten ist, nehmen wir in der für die Rechnung bequemsten Form an:

I.

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	e_3
e_2	0	e_2	0
e_3	0	e_3	0

$\{e_1 + e_2 = e_0 = 1\}$.

Es findet sich, wenn

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1^{11} & \dots & \alpha_1^{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{m1} & \dots & \alpha_1^{mm} \end{vmatrix}, \quad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_2^{11} & \dots & \alpha_2^{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_2^{m1} & \dots & \alpha_2^{mm} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird,

$$D_l = \varDelta_1^2 \,.\, \varDelta_2, \quad D_r = \varDelta_1 \,.\, \varDelta_2^2,$$

ferner

$$2\,\mathfrak{S}x = x_1 + x_2, \quad \mathfrak{N}x = x_1 x_2,$$

$$\tilde{x} = x_2 e_1 + x_1 e_2 - x_3 e_3.$$

Die nach der früheren Vorschrift gebildete Funktion $\bigtriangledown$ kann sich vom Produkt der irreduziblen Faktoren von D_l und D_r nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden, der sich gleich der Einheit findet:

$$\bigtriangledown(\alpha_{ik}) = \varDelta_1 \,.\, \varDelta_2.$$

Im Übrigen kann nach Analogie der Quaternionen verfahren werden.

Ähnlich liegt die Sache bei dem der Annahme $n = 4$ entsprechenden System mit der Multiplikationstafel

II.

e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	0
e_3	e_2	0	0

$\{e_0 = 1\}$,

das als Grenzfall der Quaternionen in Anwendungen auftritt. Gleich den Quaternionen selbst hat auch dieser Typus von Systemen komplexer Grössen zwei reelle Gestalten, wir betrachten aber der Kürze halber nur diese eine. Man hat hier

$$\mathfrak{S}\, x_0 = x_0, \quad \mathfrak{N} x = x_0^2 + x_1^2, \quad \tilde{x} = x_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3.$$

Wendet man in diesem Falle auf ein wie früher gegebenes System einseitiger Gleichungen die gewöhnliche Lösungsmethode an, indem man zunächst nur die Unbekannten $x_0^{(i)}$, $x_1^{(i)}$, oder $\xi_0^{(k)}$, $\xi_1^{(k)}$ $(i, k = 1, \ldots m)$ berechnet, so erhält man Ausdrücke, in deren Nenner eine sogenannte VOIGT'sche Determinante erscheint. Diese hat bereits den Grad $2m$, sie kann sich also von der ∇-Funktion, die auch in den reduzierten Nennern der Unbekannten $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$, $\xi_2^{(k)}$, $\xi_3^{(k)}$ erscheinen muss, höchstens um einen Faktor unterscheiden, der gleich der Einheit gefunden wird:

$$\nabla = \left|\begin{array}{cc|c|cc} \alpha_0^{11} & -\alpha_1^{11} & \ldots & \alpha_0^{1m} & -\alpha_1^{1m} \\ \alpha_1^{11} & \alpha_0^{11} & \ldots & \alpha_1^{1m} & \alpha_0^{1m} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \alpha_0^{m1} & -\alpha_1^{m1} & \ldots & \alpha_0^{mm} & -\alpha_1^{mm} \\ \alpha_1^{m1} & \alpha_0^{m1} & \ldots & \alpha_1^{mm} & \alpha_0^{mm} \end{array}\right|.$$

Die ∇-Funktion hängt hier nur von den Koordinaten α_0^{ik}, α_1^{ik} ab. Ausserdem aber ist sie im komplexen Gebiet (bei der zweiten Gestalt schon im Reellen) reduzibel; setzt man

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_0^{11} + i\alpha_1^{11} \ldots \alpha_0^{1m} + i\alpha_1^{1m} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \alpha_0^{m1} + i\alpha_1^{m1} \ldots \alpha_0^{mm} + i\alpha_1^{mm} \end{vmatrix}, \quad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_0^{11} - i\alpha_1^{11} \ldots \alpha_0^{1m} - i\alpha_1^{1m} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \alpha_0^{m1} - i\alpha_1^{m1} \ldots \alpha_0^{mm} - i\alpha_1^{mm} \end{vmatrix},$$

so wird, wie bekannt,

$$\nabla = \varDelta_1 \,.\, \varDelta_2, \quad D = (\varDelta_1 \varDelta_2)^2.$$

Bei reellen Koordinaten α_j^{ik} ist also, wie im Falle der Quaternionen, $\nabla \geq 0$; ∇ ist aber hier als Summe von zwei Quadraten reeller Ausdücke darstellbar. Im Falle $m = 2$ z. B. hat man

$$\begin{vmatrix} x & y \\ z & u \end{vmatrix}$$

$$= (x_0^2 + x_1^2)(u_0^2 + u_1^2) + (y_0^2 + y_1^2)(z_0^2 + z_1^2) -$$

$$- 2(x_0 z_0 + x_1 z_1)(u_0 y_0 + u_1 y_1) +$$

$$+ 2(x_0 z_1 - x_1 z_0)(u_0 y_1 - u_1 y_0) =$$

$$= (x_0 u_0 - x_1 u_1 - y_0 z_0 + y_1 z_1)^2 +$$
$$+ (x_0 u_1 + x_1 u_0 - y_0 z_1 - y_1 z_0)^2;$$

vgl. S. 36. Im Wesentlichen gilt jedoch die für den Fall der Quaternionen entwickelte Theorie auch hier.

Ähnlich wie das System II verhält sich auch das System

$$\text{III.} \qquad \begin{array}{c|ccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \{e_0 = 1\},$$

das ebenfalls Ausartung der Quaternionen, und überdies Grenzfall von II ist, aber, abweichend von II, nur diese eine reelle Gestalt hat.

Hier erscheint in den Ausdrücken für die skalaren Bestandteile $x_0^{(k)}$ der komplexen Grössen x_k nur die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0^{11} & \dots & a_0^{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{m1} & \dots & a_0^{mm} \end{vmatrix}$$

der skalaren Bestandteile der Koeffizienten der Gleichungen (1), während in den reduzierten Ausdrücken für die übrigen Koordinaten $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ im Nenner das Quadrat eben dieser Determinante auftritt. Es folgt

$$\nabla = \Delta^2, \; D = \Delta^4.$$

Ebenso verhält sich endlich die letzte Ausartung des Quaternionensystems, deren Multiplikationstafel

$$\text{IV.} \qquad \begin{array}{c|ccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \{e_0 = 1\},$$

dem Kommutationsgesetz gehorcht.

Als letztes Beispiel betrachten wir, unter der Annahme $m = 2$, das System der *Nonionen*

$$\text{V.} \qquad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jl} = \varepsilon_{il}, \; \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = 0 \qquad \{i, j, k, l = 1, 2, 3; \; j \neq k\},$$

das der Annahme $\varrho = 3$, $n = 9$ entspricht, und (für $m = 2$) zu einer Nablafunktion vom Grade sechs führen muss.

Um die Ableitung der zu entwickelnden Formeln kurz und übersichtlich zu gestalten, bediene ich mich, trotz ihrer Unbeliebtheit, der symbolischen Methode der Invariantentheorie.

Die Multiplikationsregeln der *Nonioneneinheiten* ε_{ik} sind nichts Anderes als die Regeln für die Multiplikation oder Komposition der speziellen ternären bilinearen Formen $x_i u_k$ (vgl. § 1). Wir können also Nonionen $A, B, C, \ldots$ symbolisch als Produkte ternärer linearer Formen darstellen,

$$A = (ax)(u\alpha), \quad B = (bx)(u\beta), \qquad \text{u. s. w.};$$

$$E = (ux)$$

ist die sogenannte Einheitsform, die im Rechnen mit den bilinearen Formen die Stelle der Einheit des gewöhnlichen Zahlenrechnens vertritt. Es wird, wenn

$$AB = (ax)(b\alpha)(u\beta)$$

gesetzt wird, $AE = EA = A$.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{S}A$ den *skalaren Bestandteil* von A, d. i. die lineare Invariante von A (gegenüber kontragredienten linearen Transformationen von x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3), deren Zahlenkoeffizienten wir so normieren, dass $\mathfrak{S}E = 1$ wird. Wir setzen also (übereinstimmend mit der Bezeichnungsweise des § 5)

$$\mathfrak{S}A = \frac{1}{3}(a\alpha),$$

und folglich, bei Beziehung des Operationszeichens $\mathfrak{S}$ auf das Ganze eines nachfolgenden Produkts,

$$\mathfrak{S}AB = \mathfrak{S}BA = \frac{1}{3}(a\beta)(b\alpha)$$

$$\mathfrak{S}ABC = \mathfrak{S}ACB = \cdots = \frac{1}{3}(a\beta)(b\gamma)(c\alpha),$$

u. s. f. Ferner werde

$$(A, B) = -(B, A) = \frac{1}{2}(\alpha\beta x)(abu) =$$

$$= \frac{1}{2}\{AB + BA - 3\,\mathfrak{S}A \,.\, B - 3\,\mathfrak{S}B \,.\, A -$$

$$- 3(\mathfrak{S}AB - 3\,\mathfrak{S}A \,.\, \mathfrak{S}B) \,.\, E\}$$

gesetzt, und analog

$$(A\,|\,B\,|\,C) = (B\,|\,C\,|\,A) = (C\,|\,A\,|\,B) =$$

$$= (A\,|\,C\,|\,B) = (B\,|\,A\,|\,C) = (C\,|\,B\,|\,A) =$$

$$= \frac{1}{6}(abc)(\alpha\beta\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathfrak{S}ABC + \mathfrak{S}ACB - 3\,\mathfrak{S}A\,.\,\mathfrak{S}BC - 3\,\mathfrak{S}B\,.\,\mathfrak{S}CA$$

$$- 3\,\mathfrak{S}C\,.\,\mathfrak{S}AB + 9\,\mathfrak{S}A\,.\,\mathfrak{S}B\,.\,\mathfrak{S}C\}.$$

Es folgt dann

(1) $$(A\,|\,E) = \frac{1}{2}\{3\,\mathfrak{S}A\,.\,E - A\}, \quad (E\,|\,E) = E$$

(2) $$(A\,|\,B\,|\,E) = \mathfrak{S}(A\,|\,B) = \frac{1}{2}\{3\,\mathfrak{S}A\,.\,\mathfrak{S}B) - \mathfrak{S}AB\}$$

(3) $$(A\,|\,E\,|\,E) = \mathfrak{S}A, \quad (E\,|\,E\,|\,E) = 1,$$

ferner

(4) $$(A\,|\,B\,|\,C) = \mathfrak{S}A\,(B\,|\,C) \qquad \text{(u. s. w.)},$$

und

(5) $$(A\,|\,B\,|\,C)\,.\,E =$$

$$= \frac{1}{3}\{A\,(B\,|\,C) + B\,(C\,|\,A) + C\,(A\,|\,B\} =$$

$$= \frac{1}{3}\{B\,|\,C)\,A + (C\,|\,A)\,B + (A\,|\,B)\,C\}. -$$

(6) $$|A| = (A\,|\,A\,|\,A) =$$

$$= \frac{1}{2}\{2\,\mathfrak{S}A^3 - 9\,\mathfrak{S}A\,.\,\mathfrak{S}A^2 + 9\,\mathfrak{S}A\,.\,\mathfrak{S}A\,.\,\mathfrak{S}A\}$$

ist die *Determinante* der bilinearen Form oder Nonion A, oder die zugehörige *Nablafunktion;*

(7) $$\tilde{A} = (A\,|\,A) = \frac{1}{2}(\alpha\alpha' x)(aa'u) =$$

$$= \frac{1}{2}\{2\,A^2 - 6\,\mathfrak{S}A\,.\,A + 3\,(3\,\mathfrak{S}A\,.\,\mathfrak{S}A - \mathfrak{S}A^2)\,E\}$$

ist die zu A *adjungierte* bilineare Form oder Nonion; ist die Determinante $|A|$ von Null verschieden, so existiert die Form oder Nonion A^{-1}, und es ist

(8) $$A^{-1} = |A|^{-1} . \tilde{A} = |A|^{-1} . \frac{1}{2} (\alpha\alpha' x)(aa' u)$$

die zu A *reziproke* Form oder Nonion. Man hat also

(9) $$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| . E, \quad \tilde{\tilde{A}} = |A| . A.$$

Die *charakteristische Gleichung* der Form A, die *Ranggleichung* des Nonionensystems, ist

(10) $$A^3 - 3\,\mathfrak{S}A . A^2 + 3\,\mathfrak{S}\tilde{A} . A - |A| . E = 0.$$

Schliesslich folgt noch

(11) $$|A + B| = \tilde{A}A + 3\,\mathfrak{S}\tilde{A}B + 3\,\mathfrak{S}A\tilde{B} + B\tilde{B};$$

z. B., wenn Δ eine Zahl, ΔE *skalar*, ein numerisches Multiplum von E ist,

(12) $$|\Delta E - A| = \Delta^3 - 3\,\mathfrak{S}A . \Delta^2 + 3\,\mathfrak{S}\tilde{A} . \Delta - |A|.$$

(Vgl. Nr. 10.)

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir die Gleichungen

(13^l) $$\alpha x + \gamma y = x', \qquad \beta x + \delta y = y',$$

(13^r) $$\xi' = \xi\alpha + \eta\beta, \qquad \eta' = \xi\gamma + \eta\delta,$$

in denen wir die Koeffizienten und die Unbekannten *Nonionen* bedeuten lassen.

Wie in § 2 kann man zunächst aus den Gleichungen (13) eine der zu suchenden Nonionen eliminieren. Die zu bestimmende Funktion ∇ ergibt sich dann als gemeinsamer Teiler der Determinanten gewisser Nonionen wie $\delta\tilde{\gamma}\alpha - \gamma\tilde{\gamma} . \beta$ oder $\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma}\alpha - \tilde{\gamma}\gamma . \tilde{\beta}\beta$. Nach kurzer Rechnung, bei der die Formeln (9) und (11) oder (12) zu benutzen sind, erhält man

(14) $$\nabla = \begin{Bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{Bmatrix} =$$

$$= \alpha\tilde{\alpha} . \delta\tilde{\delta} - 3\,\mathfrak{S}(\tilde{\alpha}\gamma\tilde{\delta}\beta) + 3\,\mathfrak{S}(\alpha\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma}) - \beta\tilde{\beta} . \gamma\tilde{\gamma};$$

$\nabla \neq 0$ ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichungen (13) eindeutig aufgelöst werden können, und zwischen ∇ und der Determinante $D_l = D_r$ oder D der Gleichungssysteme (13) besteht die Beziehung

(15) $$D = \nabla^3.$$

Ferner ist $\bigtriangledown$ als Determinante darstellbar,

(16) $$\bigtriangledown = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \\ \hline \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{array}\right|;$$

endlich hat sie ein Multiplikationstheorem gleich dem der *zweireihigen* Determinanten — alles wie im analogen Falle $m = 2$, $\varrho = 2$ (§ 2, Nr. 15). Natürlich aber wechselt die vorliegende Funktion ihr Vorzeichen, wenn man in der entsprechenden zweireihigen Nonionenmatrix die beiden Zeilen oder beiden Spalten vertauscht (§ 5, S. 46).

Während die Formel (16) auf einer besonderen Gestalt (ε_{ik}) der Nonionenbasis beruht, ist (14) hiervon unabhängig, *dieselbe Formel gilt für jede Wahl der neun Einheiten*, falls man nur den skalaren Bestandteil und die Adjungierte einer Nonion gehörig erklärt hat. Und es gibt auch — was die Formel (16) jedenfalls nicht ohne Weiteres zeigen kann — eine Lösungsmethode der Gleichungen (13), die ebenfalls unabhängig ist von der Wahl der Basis, und *bei der die* 4.9 *Koordinaten* $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}, \delta_{ik}$ *in den Nonionenkomplexen* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *belassen werden.* Es lassen sich nämlich explizite vier Nonionen A, B, C, D analog den Unterdeterminanten einer *zweireihigen* Determinante herstellen, die Gleichungen der Form

(17) $$\begin{aligned} \alpha A + \gamma C &= \bigtriangledown, & \alpha B + \gamma D &= 0, \\ \beta A + \delta C &= 0, & \beta B + \delta D &= \bigtriangledown, \\ \bigtriangledown &= A\alpha + B\beta, & 0 &= C\alpha + D\beta, \\ 0 &= A\gamma + B\delta, & \bigtriangledown &= C\gamma + D\delta \end{aligned}$$

genügen; womit offenbar die Auflösung der Gleichungen (13) geleistet sein wird.

Es ist ausreichend, Folgendes zu beweisen:

1. $\bigtriangledown$ lässt sich in die Form $\alpha A + \gamma C$ setzen, und es wird dann $\beta A + \delta C = 0$.

2. $\bigtriangledown$ lässt sich auch in die Form $A^*\alpha + B^*\beta$ setzen, und es wird dann $A^*\gamma + B^*\delta = 0$.

3. Es ist $A = A^*$.

Man hat nun nach (4) und (5) z. B.

$$3\,\mathfrak{S}\alpha\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma}\,.\,E = 3\,\mathfrak{S}\alpha\tilde{\beta}\delta(\gamma\,|\,\gamma)\,.\,E =$$

$$= 3\,(\alpha\tilde{\beta}\delta\,|\,\gamma\,|\,\gamma)\,.\,E = \alpha\tilde{\beta}\delta(\gamma\,|\,\gamma) + 2\gamma\,(\alpha\tilde{\beta}\delta\,|\,\gamma),$$

also, wenn man das besondere Zeichen für die Einheitsform unterdrückt (wenn man die entsprechende Nonion mit der Einheit des gewöhnlichen Rechnens identifiziert),

$$3\,\Xi\,\alpha\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} = 3\,\Xi\,\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma}\alpha$$

$$= \alpha\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} + 2\gamma(\alpha\tilde{\beta}\delta\,|\,\gamma) =$$

$$= \tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma}\alpha + 2(\beta\,|\,\delta\tilde{\gamma}\alpha)\beta,$$

und analog

$$3\,\Xi\,\tilde{\alpha}\gamma\tilde{\delta}\beta = 3\,\Xi\,\gamma\tilde{\delta}\beta\tilde{\alpha} =$$

$$= \gamma\tilde{\delta}\beta\tilde{\alpha} + 2\alpha(\gamma\tilde{\delta}\beta\,|\,\alpha) =$$

$$= \tilde{\alpha}\gamma\tilde{\delta}\beta + 2(\alpha\,|\,\gamma\tilde{\delta}\beta)\alpha.$$

Es folgt somit

$$\nabla = \alpha\{\tilde{\delta}\delta\,.\,\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} - 2(\gamma\tilde{\delta}\beta\,|\,\alpha)\} -$$

$$- \gamma\{\tilde{\beta}\beta\,.\,\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}\beta\tilde{\alpha} - 2(\alpha\tilde{\beta}\delta\,|\,\gamma)\} =$$

$$= \{\tilde{\delta}\delta\,.\,\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} - 2(\alpha\,|\,\gamma\tilde{\delta}\beta)\}\alpha -$$

$$- \{\tilde{\gamma}\gamma\,.\,\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\gamma\tilde{\delta} - 2(\beta\,|\,\delta\tilde{\gamma}\alpha)\}\beta.$$

Die Koeffizienten der Nonion α in diesen beiden Entwickelungen von ∇ sind einander gleich. Ausserdem aber wird behauptet, dass z. B.

$$0 = \beta\{\tilde{\delta}\delta\,.\,\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma} - 2(\gamma\tilde{\delta}\beta\,|\,\alpha)\} -$$

$$- \delta\{\tilde{\beta}\beta\,.\,\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}\beta\tilde{\alpha} - 2(\alpha\tilde{\beta}\delta\,|\,\gamma)\}.$$

ist, d. h.

$$\beta(\gamma\tilde{\delta}\beta\,|\,\alpha) = \delta(\alpha\tilde{\beta}\delta\,|\,\gamma),$$

oder, in der Formelsprache der bilinearen Formen, da $\gamma\tilde{\delta}\beta$ der bilinearen Form

$$\frac{1}{2}(cx)(\delta\delta'\gamma)(dd'b)(u\beta)$$

entspricht, dass die identische Gleichung besteht:

$$(bx)(\alpha\beta'\beta)(\delta\delta'\gamma)(dd'b')(acu) =$$

$$= (dx)(\gamma\delta'\delta)(\beta\beta'\alpha)(bb'd')(cau).$$

In der Tat ist

$$(\alpha\beta\beta')(\gamma\delta\delta')(acu)\{(dd'b')(bx)+(bb'd')(dx)\}=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha\beta\beta')(\gamma\delta\delta')(acu)\{(dd'b')(bx)-(dd'b)(b'x)+$$

$$+(bb'd)(dx)-(bb'd)(d'x)\}=0.$$

Es bestehen also wirklich Gleichungen der Form (17); und zwar ist

$$\begin{aligned}
A &= \quad \tilde{\delta}\delta\,.\,\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\delta\tilde{\gamma}-2\,(\alpha\,|\,\gamma\tilde{\delta}\beta),\\
B &= -\tilde{\gamma}\gamma\,.\,\tilde{\beta}-\tilde{\alpha}\gamma\tilde{\delta}+2\,(\beta\,|\,\delta\tilde{\gamma}\alpha),\\
C &= -\tilde{\beta}\beta\,.\,\tilde{\gamma}-\tilde{\delta}\beta\tilde{\alpha}+2\,(\gamma\,|\,\alpha\tilde{\beta}\delta),\\
D &= \quad \tilde{\alpha}\alpha\,.\,\tilde{\delta}+\tilde{\gamma}\alpha\tilde{\beta}-2\,(\delta\,|\,\beta\tilde{\alpha}\gamma).
\end{aligned} \tag{18}$$

Es ist klar, dass auch hier, wie im Falle $\varrho=2$, diese Koeffizienten A, B, C, D der Gleichungen (17) nur auf eine Weise bestimmt werden können.

6.

Anhang: Gleichungen mit schief-symmetrischer Determinante. Pfaff'sche Aggregate.

Zu den Fällen, in denen die Anwendung der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen kein ganz erfreuliches Ergebnis liefert, gehören, wie in der Einleitung schon erwähnt, die Systeme linearer Gleichungen mit schief-symmetrischer Determinante. Im wichtigsten Fall, in dem die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten gerade und die zugehörige Determinante nicht Null ist, hat Jacobi eine Lösungstheorie entwickelt, die kaum etwas zu wünschen übrig lässt, wenn man möglichst elementar zu Werke gehen will.[1] Aber diese Theorie, in deren Mittelpunkt die sogenannten Pfaff'schen Aggregate stehen, passt nicht ganz in den Rahmen, innerhalb dessen das genannte Problem aufzutreten pflegt. Die Pfaff'schen Aggregate sind (relative) *Invarianten* gegenüber beliebigen (kogredienten) linearen Transformationen, und das kann, soviel ich sehe, bei der üblichen Behandlung des Stoffs nur daraus erschlossen werden, dass ihre Quadrate Determinanten sind. Die symbolische Methode der Invariantentheorie liefert dagegen

[1] Jacobi's Ges. Werke, Bd IV, S. 25 u. ff. Neuere Darstellungen bei Kowalewski, Determinanten, Leipzig 1909, Kap. 9, und E. v. Weber, Pfaff'sches Problem, Leipzig 1900, Kap. I. Vgl. auch F. Engel in Grassmann's Werken I, 2, S. 474 u. ff., Leipzig 1896.

für die PFAFF'schen Aggregate und für die damit zusammenhängenden Ausdrücke ein Bildungsgesetz, dem man die Invarianteneigenschaft auch ansieht. Es will mir scheinen, dass auch eine weniger elementare Behandlung des Gegenstandes nützlich sein kann, wenn sie zu einer vertieften Einsicht führt.

Es sei, in symbolischer Bezeichnung,

$$S = (ax)(by) = (a'x)(b'y) = \cdots \tag{1}$$

eine alternierende bilineare Form mit n Paaren von Veränderlichen $x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$, also eine Form, deren symmetrische lineare Kovariante

$$\frac{1}{2}\{(ax)(by) + (ay)(bx)\}$$

identisch verschwindet, so dass

$$S = \frac{1}{2}\{(ax)(by) - (ay)(bx)\}$$

gesetzt werden kann.

Mit Hülfe der üblichen (oder vielmehr früher einmal üblichen) Umformungen sieht man, dass im Falle eines ungeraden n jede Kovariante von S, die einen ganz mit Symbolen von S ausgefüllten Determinantenfaktor hat, identisch verschwindet, und dass bei geraden Werten $(n = 2m)$ der Stufenzahl n jede solche Kovariante durch die Invariante $(a'b'a''b'' \ldots a^{(m)}b^{(m)})$ teilbar sein muss, während die übrigen invarianten Bildungen im Wesentlichen die Kovarianten

$$\begin{gathered}(a'b' \ldots a^{(m-1)}b^{(m-1)}uv)\\ (a\,b' \ldots a^{(m-2)}b^{(m-2)}uvu'v')\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

sind. Er gibt also bei ungerader Stufenzahl keine Invariante von S, und bei gerader Stufenzahl $n = 2m$ eine einzige irreduzibele Invariante, nämlich, bei zweckmässiger Wahl des Zahlenfaktors, die Invariante

$$P = \frac{1}{2^m \cdot m!}(a'b'a''b'' \ldots a^{(m)}b^{(m)}), \tag{2}$$

von deren Quadrat daher die Determinante der Form S,

$$|S| = \frac{1}{n!}(a'a'' \ldots a^{(m)})(b'b'' \ldots b^{(m)}) \tag{3}$$

sich höchstens um einen Zahlenfaktor unterscheiden kann. Das Beispiel

$$S = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1})$$

zeigt, dass

$$D = |S| = P^2 \tag{4}$$

ist.

Betrachten wir jetzt die Kovariante

$$(a'b'a''b'' \ldots a^{(m-1)} b^{(m-1)} uv),$$

die wieder eine — eventuell identisch verschwindende — alternierende bilineare Form in den zu x, y kontragredienten Veränderlichen (Systemen von Veränderlichen) u, v ist, so folgt

$$(ax)(a'b'a''b'' \ldots a^{(m-1)} b^{(m-1)} bv) =$$

$$= -\frac{1}{n}(aba'b' \ldots a^{(m-1)} b^{(m-1)}) \, . \, (vx) =$$

$$= -2^{m-1}(m-1)! \, P \, . \, (vx);$$

es ist also, wenn $P \neq 0$ ist,

$$\Sigma = (u\alpha)(v\beta) = \frac{1}{2}\{(u\alpha)(v\beta) - (u\beta)(v\alpha)\} =$$
$$= -\frac{1}{2^{m-1}(m-1)! \, P}(a'b' \ldots a^{(m-1)} b^{(m-1)} uv) \tag{5}$$

die gewöhnlich mit S^{-1} bezeichnete zu S reziproke Form, deren Komposition (Multiplikation) mit S die Einheitsform liefert,

$$(ax)(b\alpha)(v\beta) = (vx), \quad (u\alpha)(a\beta)(by) = (uy); \tag{6}$$

im angeführten Beispiel

$$\Sigma = -(u_1 v_2 - u_2 v_1) - (u_3 v_4 - u_4 v_3) - \cdots - (u_{n-1} v_n - u_n v_{n-1}).$$

Zwischen den Determinanten D, Δ von S und Σ besteht die Beziehung $D\Delta = 1$, und daher zwischen den Invarianten P, Π beider Formen die Beziehung $P \, . \, \Pi = \pm 1$. Tatsächlich ist, wie wieder das Beispiel zeigt,

$$P \, . \, \Pi = (-1)^m. \tag{7}$$

Lassen wir jetzt die Form S einem System linearer Gleichungen mit derselben Koeffizientenmatrix entsprechen,

$$(8) \qquad (ax)\,b_k = u_k \qquad (k = 1, \ldots n),$$

so haben wir in dem ebenso aus Σ abgeleiteten Gleichungssystem

$$(9) \qquad (u\alpha)\,\beta_k = x_k \qquad (k = 1, \ldots n)$$

nach Nr (6) die Auflösung des Systems (8) vor uns; und zwar erhalten wir so die Lösung *in reduzierter Form*, mit der Invariante P im Nenner an Stelle von P^2, das die Anwendung der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen liefern würde.

Hiermit, oder vielmehr schon vorher durch die Gleichungen (6), ist die gestellte Aufgabe gelöst, da P sich sogleich als irreduzibel erweist. Es bleibt aber noch Einiges zu sagen über den Zusammenhang unserer Formeln mit den sonst üblichen, die ja anders aussehen. Wir geben also jetzt die symbolische Bezeichnung auf, und ersetzen die symbolischen Produkte durch reale (reelle oder komplexe) Zahlen,

$$a_i b_k = a'_i b'_k = \cdots = p_{ik}, \quad \alpha_i \beta_k = \alpha'_i \beta'_k = \cdots = \pi_{ik}.$$

Die Gleichungen (8) werden dann, ausführlich geschrieben, diese:

$$\begin{array}{l} * \qquad p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + \cdots + p_{1n}x_n = u_1, \\ p_{21}x_1 \qquad * \qquad + p_{23}x_3 + \cdots + p_{2n}x_n = u_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + p_{n3}x_3 + \cdots + \quad * \quad = u_n. \end{array}$$

Entwickelt man jetzt den Determinantenfaktor im Ausdruck (2), also die symbolische Determinante n^{ten} Grades

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} a'_1\ b'_1 & a''_1\ b''_1 & \ldots & a_1^{(m)}\ b_1^{(m)} \\ a'_2\ b'_2 & a''_2\ b''_2 & \ldots & a_2^{(m)}\ b_2^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_m\ b'_m & a''_m\ b''_m & \ldots & a_m^{(m)}\ b_m^{(m)} \end{array}\right|$$

nach Spaltenpaaren unter Befolgung der LAPLACE'schen Regel, so erhält man eine Summe von Produkten von je m der Grössen p_{ik}, in deren Entwickelungs-

gliedern jeder der Indices i oder k gerade einmal vorkommt, und in die ausserdem jedes p_{ik}, wenn überall die Grössen p_{ik} mit $i > k$ eliminiert werden, mit dem Faktor $2 \cdot (-1)^{i+k-1}$ eingeht. Da immer $m(m-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ dieser Produkte einander gleich sind, so kommen in der Entwickelung von P, nach Weghebung des Zahlenfaktors $2^m \cdot m!$ aus Zähler und Nenner, die einzelnen m-gliedrigen Produkte von Grössen $p_{ik} (i < k)$ nur noch mit Faktoren ± 1 vor; es entsteht ein aus $(n-1)(n-3) \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1$ m-gliedrigen Produkten zusammengesetztes *Pfaff'sches Aggregat*, eine ganze Funktion der Grössen p_{ik}, die linear ist in bezug auf alle solchen Grössen, die einen vorgeschriebenen Index i oder k tragen. Im Falle $n = 4$ z. B. entsteht der Plücker'sche Ausdruck; schreibt man nur die Indices, setzt man also etwa $p_{ik} = (ik)$, so erhält man

$$(12)(34) - (13)(24) + (14)(23) =$$
$$= (12)(34) + (13)(42) + (14)(23).$$

Wird sodann dieser Ausdruck wiederum durch ein analoges Symbol (1234) (das Jacobi'sche Symbol) bezeichnet, so lässt sich P im Falle $n = 6$ einfach schreiben:

$$(12)(3456) - (13)(2456) + (14)(2356) -$$
$$- (15)(2346) + (16)(2345).$$

Jedes Entwickelungsglied erscheint mit dem positiven Vorzeichen, wenn die entsprechende Permutation der Ziffern $1, \ldots 6$ gerade ist, und mit dem negativen, wenn sie ungerade ist. Andere äquivalente Ausdrücke erhält man, wenn man die Ziffern beliebig vertauscht und die erforderlichen Zeichenwechsel vornimmt.[1] In dieser Weise kann man fortfahren.

Allgemein ergibt sich, wenn nunmehr

$$P = (123 \ldots n) \tag{10}$$

gesetzt wird, die Regel, dass P sein Vorzeichen wechselt, wenn man zwei der Zahlen $1, \ldots n$ im Symbol (10) vertauscht. Ferner folgt, dass P, als Summe von Faktoren geschrieben, deren erster immer den Index k trägt, die Form

$$P = p_{1k} P_{1k} + \cdots + p_{nk} P_{nk} \tag{11}$$

hat, worin $P_{ik} = -P_{ki}$ wieder ein Pfaff'sches Aggregat mit einem Faktor ± 1 ist $\{i \neq k\}$. Das Symbol dieses Aggregats entsteht aus dem von P dadurch, dass

[1] Von $n = 8$ an kommen noch weitere Entwickelungen nach Art der Laplace'schen Determinantenformeln hinzu, z. B.

$$P = \frac{1}{3} \{(1234)(5678) \mp \ldots\}$$

man die Indices i und k unterdrückt, und sein Zahlenfaktor ist $(-1)^{i+k-1}$, wenn $i<k$, und $(-1)^{i+k}$, wenn $i>k$ ist. Weiter folgt

(12) $$0 = p_{1k} P_{1i} + \cdots + p_{nk} P_{ni} \qquad \{i \neq k\}.$$

Die Gleichungen (11) und (12) liefern wieder die Lösung der Gleichungen (8) in reduzierter Form. Stellt man diese Lösung neben die in den Gleichungen (9) enthaltene, sowie neben die von der allgemeinen Gleichungstheorie gelieferte Lösung in Determinantenform, so ergeben sich die bekannten Relationen zwischen Unterdeterminanten von D und PFAFF'schen Aggregaten. Wir nennen D_{ik} das algebraische Komplement des Elementes p_{ik} in der Entwickelung von D, so dass

$$D = p_{1k} D_{1k} + \cdots + p_{nk} D_{nk},$$

$$0 = p_{1k} D_{1i} + \cdots + p_{nk} D_{ni}$$

wird. Dann folgt

(13) $$D_{ik} = P \,.\, P_{ik} = P^2 \,.\, \Pi_{ik}.$$

(Vgl. Nr 5.) Bezeichnen wir ferner noch die Koeffizienten von $p_{ij} p_{jk}$ in der Entwickelung von D mit D^j_{ik} oder D^j_{ki}, so dass

$$D = \sum_{(i,k)} p_{ij} D^i_{ik} p_{jk} = - \sum_{(i,k)} p_{ij} p_{jk} D^j_{ik}$$

wird, so folgt aus

$$D = P^2 = \sum_i p_{ij} P_{ij} \,.\, \sum_k P_{jk} p_{jk} = - \sum_{(i,k)} p_{ij} p_{jk} P_{ij} P_{jk}$$

(14) $$D^j_{ik} = P_{ij} \,.\, P_{jk}. \text{ —}$$

Die Systeme linearer Gleichungen, mit denen wir es hier zu tun gehabt haben, unterscheiden sich von den zuvor betrachteten wesentlich dadurch, dass sie, als Transformationen gefasst, keine Gruppe bilden. Daher gibt es auch kein Multiplikationstheorem für PFAFF'sche Aggregate, das dem der Determinanten oder ∇-Funktionen vergleichbar wäre. Aus eben diesem Grunde leistet auch der Satz BRIOSCHI's, wonach jede Determinante gerader Ordnung als PFAFF'sches Aggregat geschrieben werden kann, nicht das, was er auf den ersten Blick vielleicht zu versprechen scheint.

Eine bei der Korrektur ausgefallene Anmerkung soll hier nachgetragen werden: Die Determinantenformel auf Seite 22 hat, noch vor mir, auf einem anderen Wege auch Herr J. SCHUR abgeleitet, den ich von meiner Untersuchung in Kenntniss gesetzt hatte.

THE CLASSIFICATION OF SETS OF POINTS.

BY

ERIC H. NEVILLE.

TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

Preface.

The origin of this paper was a desire for a definition of a plane curve which should require a curve to be in some sense in one piece without requiring it to be closed or to be of the very special character of a Jordan curve. To take a simple example, there must be some sense in which a lemniscate deprived of any point but the node is a single curve but a lemniscate deprived of the node is two curves. The discovery of the property of a set which I define in section 20 and describe by saying that a set is united led to the definition of a curve on a surface which is given below in section 38 of the paper,[1] but aroused a fresh discontent, since this definition gave no clue to the distinction in three-dimensional space between a curve and a surface, a distinction which the definition since evolved, given in section 36, enables me to draw.

Although the work was begun for the sake of a theory of dimensions, it is not on account of the theory suggested in the concluding sections that this paper is published; much remains to be done before that theory can be proved valuable or valueless. But of the thirty-nine sections of this paper the first thirty-five are concerned only with ideas which certainly have technical use as well as intrinsic interest; among these, the fundamental idea of which I have found [2] no

[1] These definitions of a united set and of a curve on a surface were given in a short note entitled »Definition of a plane curve» in *The Journal of the Indian Mathematical Society*, Vol. vii. pp. 175—177 (1915), the set being there described as *perfectly connected*.

[2] (Added November 1916) This statement only reveals my ignorance when it was written. Undeniable traces are to be found in SCHOENFLIES' definition (*Math. Annalen*, bd. 58 (1904), s. 210) of a plane set of a special kind as *coherent* if every pair of its members can be joined by a simple path within the set, and in a footnote (*American Journal of Mathematics*, v. 33 (1911)

trace elsewhere is the idea associated here with the word unity, and the paper is essentially the offer of this idea for consideration.

The paper contains no proofs. It seems to me that proofs are almost worthless unless given in fundamental logical symbols, and at present I have not the time to prepare detailed proofs for publication. Moreover, many of the ideas here put forward, and in particular the idea of unity and the derived idea of a cell, are to be justified less by propositions than by examples, and in any case an account of a subject in general terms is a valuable preliminary to a formal development.

Certain acknowledgments of debt I am glad to make: my definition of a congregate of points was suggested in part by JORDAN's treatment of a closed set *d'un seul tenant*, in part by the desire for a definition expressible in a simple form with the symbolism of »Principia Mathematica», the use of this symbolism alone has enabled me to construct proofs of the propositions which I assert and of others that shew the importance of the various definitions, and to the influence of RUSSELL and WHITEHEAD are due among other features the form in which the subject matter of the paper is described in section 2 and the recognition at various points of the relevance of the multiplicative axiom.

This work was done in the first instance in ignorance of FRÉCHET's theory [1] of dimension-types, but a comparison of the definitions of section 36 with his definitions is to be found in the closing section. Since the idea of a united set does not enter into FRÉCHET's theory, my work is altogether independent of his, but probably an earlier acquaintance with FRÉCHET's paper would have led me to develop the present theory as a contribution to the classification rather of abstract aggregates than of sets of points. The universe with which I deal explicitly is less general than FRÉCHET's class L (l. c., s. 145) and more general than his class E (l. c., s. 160), inasmuch as I assume the existence of separating numbers but assume neither that two points separated by the number zero *necessarily* coincide nor that the inequality $xz \overline{<} xy + yz$ is true for *every* set of three elements; exactly how much of my paper is in fact independent of the use of numbers I do not

p. 319) in which LENNES remarks that obviously there are complete connected sets which contain no continuous arcs joining certain pairs of their points, the one writer using »simple path» and the other »continuous arc» according to a precise definition. LENNES' definition, unlike SCHOENFLIES', is applicable to aggregates in general, but neither writer anticipates the kind of use made of the conception in the present paper.

[1] MAURICE FRÉCHET, »*Les dimensions d'un ensemble abstrait*», *Math. Annalen*, bd. lxviii, s. 145–168 (1910): the study of dimensions is now associated so closely with the name of BROUWER that it is as well for me to state definitely that none of his work that I have seen indicates a perception of what I call unity, and that there is therefore nothing in this paper for which I am indebted to Prof. BROUWER.

know, but it is evident that the definitions of *united sets* and of *cells* require only the assumption that such limits as exist are members of the universe, and that if limits are defined by means of neighbourhoods, then *plots* and *confined limiting points* also can be defined, whether or not the definition of a neighbourhood is numerical. On one detail, not of logic but of nomenclature, I incline to disagree with M. FRÉCHET, who wishes to restrict the phrase »of n dimensions» to an aggregate whose type is that of the complete geometrical space with n coordinates; since there is no ordinal similarity between the types of dimensions and the signless real numbers, insistence on a one-one correlation in the particular case in which the numbers are integral is actually misleading, and I prefer to allow that the surface of a sphere may be described legitimately as well as popularly as two-dimensional. Nevertheless, not actually to contradict M. FRÉCHET, I have spoken of the dimension-integer rather than of the number of dimensions of a set.

Table of Contents.

1. Introduction.

The vocabulary of the theory of sets of points is evidence that it has been left too much to the writers whose interests are primarily philosophical to insist on the extent to which the nature of the derivative of a set of points Γ depends on the nature of the universe of points V of which Γ is a part. Technical mathematicians, instead of recognising frankly that they need to deal sometimes with a universe of one kind, sometimes with a universe of another kind, have expended a considerable amount of ingenuity in reducing their special universes by a variety of more or less elaborate conventions to a common pattern. What is most surprising is that the chosen pattern is a universe of a different kind from Euclidean space and that the conventional reduction of Euclidian space to the standard form is no easy task.

A universe of points V is said to be limited or closed if every infinite set of points in V has a limiting point in V. Thus the surface of a sphere is a closed universe, and so is the set formed of all the points inside or on the perimeter of a plane triangle: on the other hand, the points inside a sphere do not compose a closed universe, neither do the points inside a triangle, nor, to take the most important cases of all, do the points of Euclidean space or of a Euclidean plane. Mathematicans, fully alive in some connections to the advantages of dealing with open rather than with closed sets, as is shewn in the use made of circular domains

in the theory of functions of a complex variable, have nevertheless shewn curious and I think unwarrantable reluctance to contemplate an open universe of points.

The first difficulty for which this reluctance is responsible in the treatment of Euclidean space is in the application of the words closed and open to unlimited sets, that is, to sets tending in some manner to infinity. The obvious interpretation, sanctioned by the effects of establishing, for example, a point-to-point correspondence between the finite points of a plane and all the points except one on a sphere, is to regard an unlimited set as closed or open according as points at infinity have or have not an actual existence. This interpretation does not meet the difficulty: unless by the invention of ideal points existence has been conferred on points at infinity, such limiting points as a set posesses must be in the finite part of the universe, and a set which tends to infinity but has no finite limiting point simply has no limiting point whatever, and cannot be regarded as an open set without a change in the fundamental definitions; moreover, the introduction of ideal points and points at infinity is often accompanied by a change in the definition of distance, and if a point at infinity is to be regarded as a limiting point the definition of a limiting point must be changed from the form which is naturally the first to be adopted.

We must not be supposed to assert that the difficulties in this subject cannot be surmounted, or rather evaded, by a multiplication of conventions. Every student of the theory of functions of a complex variable knows that much can be accomplished by introducing what is really an incomplete symbol z_∞ or ∞, a symbol of which only the uses are defined, it being agreed for example that to write

$$|z - \infty| < \varrho$$

is to mean

$$|z| > 1/\varrho.$$

But even in this case the properties of ∞ as a limit are different from those of any other limit; for example, if (u_n) and (v_n) are two sequences of complex numbers with a common finite limit, $u_n - v_n$ must tend to zero, while if (u_n) and (v_n) both tend to ∞, that is, to infinity, $u_n - v_n$ may behave in any manner as n increases, converging to any finite number, oscillating in any way, or diverging to infinity. It is not, however, on technical troubles of any particular kind that the case for a candid consideration of facts is based: to be content rather to evade a difficulty than to analyse it and to understand it is the mark distinguishing not the technical mathematician from the philosopher but the computer from the mathematician.

2. Points and Separating Numbers.

The one requirement of the theory before us is a one-many relation, subject to certain conditions, between signless real numbers and cardinal couples of individuals. The individuals, in virtue solely of the fact that every member of the converse domain of the fundamental relation is a pair of them, are called points, and the real number associated with a pair of points is called the separating number of the two points, or between the two points, forming the pair, or the number separating one of the points from the other. We use for points the letters v, w, x, y, z and we denote the separating number of x and y by xy; because the separating number of x and y is a number related to the cardinal couple composed of x and y, not to either of the ordinal couples composed of the same individuals, yx is the same as xy, and the further hypotheses as to the nature of the fundamental relation must be enumerated. It is assumed not only that it is between pairs of points that there are separating numbers, but also that if there are separating numbers yv and zw there is a separating number yz, an assumption we express by saying that our points compose a universe. It is assumed that if the two points forming a cardinal couple are identical, the number associated with the couple is zero, that is, that if x is any point, the separating number xx is zero, but it is not assumed that the separating number of two distinguishable points is necessarily different from zero. It is assumed that the class of signless real numbers defined by the criterion that ϱ belongs to the class if for every group of three points x, y, z the separating number xz is equal to or less than the sum of the separating numbers xy, yz provided only that xy and yz are both less than ϱ is a class which has members other than zero: from the form of the class, if σ belongs to it so does every number less than σ; in Euclidean space every real number belongs to this class, and by dealing with the class itself we avoid both the indefinite and unnecessary restriction involved in choosing one of its members and the introduction symbolically of an infinite number. From the assumption just explained it follows that if the separating number yz is zero, then for every point x for which either xy or xz is sufficiently small, xy is equal to xz, and we make the final assumption that in fact if yz is zero then for *every* point x the numbers xy and xz are the same.

It must be realised that the separating number of two points need not be the distance between the points in any space in which they can be represented. As an example of the latitude we allow, the universe might consist of the surfaces of two non-intersecting spheres in Euclidean space, and we might take for the separating number of two points on the same sphere their least geodesic

distance apart and for the separating number of two points of which one is on each of the spheres their distance apart in space. Moreover, the separating number regarded as a function of the two points on which it depends, may vary considerably in form without involving any change in the classification of classes of points with reference to any of the properties which it is our object to describe. Indeed, in the case in which the universe is space of a finite number n of dimensions and a point x is determined by its n coordinates $x_1, x_2, \dots x_n$, while some writers use for the separating number of two points $\dot{x}, \ddot{x}$ the distance between them, which if the axes are orthogonal is $\sqrt{\{\Sigma(\dot{x}_r - \ddot{x}_r)^2\}}$, others, following JORDAN, use for the separating number $\Sigma|\dot{x}_r - \ddot{x}_r|$, and others again, including MOSKOWSKI, use[1] the greatest among the numbers of the form $|\dot{x}_r - \ddot{x}_r|$; none of the properties of classes of points which separating numbers are used to described are affected by a choice between these three functions.

An excellent example of the mode of embodying ideas in the definition of separating numbers when these numbers are divorced entirely from distances is to be found in the geometrical treatment of the complex variable. To justify the usual method of dealing with the point at infinity, it is common to suppose a sphere drawn to touch the plane of the variable z at the origin O, and to say that often a value z of the complex variable is associated not with a point z_p of the plane but with a corresponding point z_s of the sphere, z_s being obtained by joining z_p to the point of the sphere diametrically opposite to O; if we wish to concentrate our attention on the plane, we have only to say that limiting points are determined not with reference to distances in the plane but with reference to a distinct system of separating numbers, the separating number of two points $\dot{z}_p$, $\ddot{z}_p$ of the plane being the distance between the corresponding points $\dot{z}_s$, $\ddot{z}_s$ of the sphere or some other number suggested by geometry, but the most satisfactory method is to regard the complex variable itself as a point, and the separating number not as a number separating two points of a plane or of a sphere but as a number separating two values of the complex variable. Probably the most useful number separating the complex numbers $\dot{z}$, $\ddot{z}$ is

$$|\dot{z} - \ddot{z}| / \sqrt{\{(1 + |\dot{z}|^2)(1 + |\ddot{z}|^2)\}},$$

which is the actual distance in space between the corresponding points on a sphere of unit diameter, but the number

[1] This last choice has the advantage of being far more widely applicable in space of an infinity of dimensions than either the Cartesian measure or JORDAN'S: I have found the consideration of this kind of space with this species of separating number valuable in removing prejudices.

$$(|\dot{x}-\ddot{x}|+|\dot{y}-\ddot{y}|)/\{(1+|\dot{x}|+|\dot{y}|)(1+|\ddot{x}|+|\ddot{y}|)\},$$

constructed on JORDAN's model, is equally effective; denoting either of these separating numbers by $(\dot{z}\ddot{z})$ we can define the uses of the symbol ∞ by the assertion that $(z\infty)$ denotes $1/\sqrt{(1+|z|^2)}$ or $1/(1+|x|+|y|)^2$ and that $(\infty\infty)$ is zero, and ∞ then *exists*, for the statement that the complex number ∞ exists *means* only that the numbers separating ∞ from all complex numbers including itself are defined and satisfy certain conditions.

More interesting is the treatment of RIEMANN surfaces, which we may illustrate by the simple example of the surfaces connected with the representation of $w^{1/2}$. In the primitive form, these are a double plane and a double sphere, with cross-connections along the positive halves of the real axes in one case and along overlying semicircles in the other case. Logically, in the space in which $w^{1/2}$ is a one-valued function each point consists of a complex number z and a variable t which has only two values (most conveniently, 1 and 2); if m and n coincide and if in a plane corresponding to the one variable z the chord joining $\dot{z}_p$ to $\ddot{z}_p$ does not cross the positive half of the real axis, or if m and n are different and if in this plane the chord does cross this half-axis, then the number $\dot{z}_m\ddot{z}_n$ separating the RIEMANN point $\dot{z}_m$ from the RIEMANN point $\ddot{z}_n$ is a number $(\dot{z}\ddot{z})$ such as was defined in the last paragraph, while in other cases the separating number $\dot{z}_m\ddot{z}_n$ is the smaller of the two numbers $(\dot{z}\,0)+(\ddot{z}\,0)$, $(\dot{z}\infty)+(\ddot{z}\infty)$, where 0 denotes the complex number zero. Here we have distinct points at zero distance apart, for it is simpler to say that there are two points $0_1, 0_2$ and two points ∞_1, ∞_2 and that $0_1 0_2$ and $\infty_1\infty_2$ are zero than to say that while almost every point of the RIEMANN surface consists of a complex number and a two-valued variable there are certain points which consist of complex numbers alone.

3. Sets and Classes of Sets.

Our subject is the classification of classes of points, and for the sake of emphasis a class of points is called a set of points, or simply a set, while set is not regarded in any other sense as equivalent to class. A set is usually determined by the statement of a group of conditions which a point is to satisfy if it is to belong to the set; if there are no points satisfying simultaneously all the prescribed conditions, the group of conditions is said to determine the null set. For sets in general we use the letters Γ, Δ, Θ, Φ, Ω, the universe is itself a set, which is denoted by V, and the null set is denoted by Λ. For a general class of sets we use γ, while $\varkappa'\Gamma$ and $\tau'\Gamma$ denote classes of sets related in a special

manner to a set Γ; thus each of the letters $\varkappa$, τ may be regarded as denoting either a relation between a class of sets and a single set or an operation by which from any set is derived a class of sets having a particular relation to that set. Similarly we use Latin capitals other than V to denote particular relations between one set and another, or operators deriving from any given set certain other sets related to it, while we use $K^{\varepsilon}(x, \Gamma)$ and $T^{\varepsilon}(x, \Gamma)$ for special sets connected with a point x and a set Γ.

When we have to deal with classes of sets, the whole theory of selections is applicable to our work, and we have to consider whether or not in a class of sets γ every member Γ has a representative. We say that the universe is a Zermelo universe if in every class of existent sets each set has a representative, or in other words if every class of mutually exclusive existent sets is multipliable, and we say that a set Γ is a Zermelo set if every class of mutually exclusive existent sets contained in Γ is multipliable; in a Zermelo universe every set is a Zermelo set.

4. Bounded Sets and Sets with Separating Numbers Finite; the Span of a Set.

Sets and universes may be classified according to the magnitude of the separating numbers which are possible between points belonging to them. A set is bounded with reference to an origin v if there is a finite upper limit or maximum to the numbers separating its points from v. If there is a number σ, necessarily different from zero, such that if x, y belong to Γ, then xy is less than σ, there is a least number ϱ which is such that if x, y belong to Γ and σ is greater than ϱ, then xy is less than ϱ; this number is an upper limit or maximum to numbers separating pairs of members of Γ, and is called the span of Γ. If xz is never greater than $xy + yz$, a set bounded with reference to any origin has a finite span.

A set is a set with infinite separating numbers or a set with separating numbers finite according as it does or does not contain two points whose separating number is infinite. Every set with separating numbers limited is a set with separating numbers finite, but the converse is not true: for example, in Euclidean space, not subjected to any conventional closing, the distance between any two points is finite, but there is no upper limit or maximum to the distances possible; by replacing the points and lines of Euclidean space by ideal points and lines we can obtain a space in which there are actual points at infinity, and in this space infinite distances are possible.

5. Units.

A set which includes a point x need not include all the points separated from x by the number zero, and we denote by $T`(x, \Gamma)$ the set composed of all the points of $\Gamma$ separated from the point $x$ of $\Gamma$ by the number zero, calling $T`(x, \Gamma)$ the unit of Γ containing x; if x does not belong to Γ, the set $T`(x, \Gamma)$ is defined to be null, even if $\Gamma$ contains points separated from $x$ by the number zero. A set is called a unit of $\Gamma$ if it is the unit containing some point of $\Gamma$, and we denote by $\tau`\Gamma$ the class of units of Γ. If y is a member of $T`(x, \Gamma)$, the units $T`(x, \Gamma)$ and $T`(y, \Gamma)$ are identical, and $x$ and $y$ contribute the same member to the class $\tau`\Gamma$.

If Γ is not null, the class $\tau`\Gamma$ is a class of mutually exclusive existent sets whose sum is $\Gamma$; even if $\Gamma$ is null, the null set is not a member of $\tau`\Gamma$: if Γ is null, $\tau`\Gamma$ is the null class of sets, not the class whose member is the null set.

The set $T`(x, V)$ is a unit of the universe, and while every unit of a set $\Gamma$ is contained in some unit of the universe, a unit of $\Gamma$ need not coincide with the unit of $V$ which contains it, and the class $\tau`\Gamma$ need not be contained in the class $\tau`V$.

6. The Cardinal Number and the Reduced Number of a Set.

The number of different points belonging to a set Γ is called the cardinal number of the set and denoted by $Nc`\Gamma$. A set is called finite or infinite according as its cardinal number is or is not inductive, and is called singular if it has only one member, plural if it has more members than one.

For many purposes the number connected with a set Γ which is of greatest importance is not the number of points belonging to Γ but the number of units contained in Γ, that is, the number of sets belonging to $\tau`\Gamma$; this number, $Nc`\tau`\Gamma$, we call the reduced number of $\Gamma$ and denote by $Ncr`\Gamma$. We say that a set is scattered finitely or infinitely according as its reduced number is or is not inductive, and we call a set a unit set if it has only one unit, a multiple set if it has more units than one.

In formal work unit sets, both singular and plural, require attention out of all proportion to their interest, which is negligible. The universe may itself be finite, in which case every set is finite, or finitely scattered, when every set is finitely scattered, but none of our definitions give any but the most trivial results when applied to sets in a finitely scattered universe.

7. Reduction and Expansion.

To reduce a set is to omit from it any set of points each of which is separated by the number zero from some one of the points retained. Reduction is possible as long as the set contains units which are not singular, and we say that a set or a universe is fully reduced if all its units are singular, that is, if it includes no two distinguishable points whose separating number is zero. If a set is fully reduced its cardinal number is the same as its reduced number, but the converse implication holds only if the set is finite. A set is called a reduced form of a set Γ if it is contained in Γ and includes one and only one member of each unit of Γ; in more technical language, the reduced forms of Γ are the selected sets of the class of units of Γ. To say that reduced forms of Γ exist is to assert that the class of units of Γ is multipliable, and since this assertion can not be made of every set unless the multiplicative axiom is assumed, we content ourselves with describing a set as reducible if there are reduced forms of it. In a fully reduced universe every set is fully reduced, but a reducible universe may contain sets that are not reducible; in a ZERMELO universe all sets are reducible, but we have no reason to suppose that if every set is reducible the universe is a ZERMELO universe, for every class of unit sets might be multipliable while some classes including multiple sets were not multipliable. It is important to notice that every finitely scattered set is reducible.

The converse of reducing a set is adding to it any set each of whose points is separated by the number zero from some point already included, and this process is called expanding the set. Expansion is possible if there are units of the set which do not coincide with the units of the universe containing them, and we say that a set is fully expanded if every pair of points of which one belongs to the set and the other does not has a separating number different from zero. The set obtained by expanding Γ fully is the sum of the class of units of the universe containing points of Γ, and we denote it by $E`\Gamma$. If $\Gamma$ is a set having points in common with another set $\Delta$, to expand $\Gamma$ in $\Delta$ is to add to $\Gamma$ any members of $\Delta$ separated by the number zero from points belonging to both $\Gamma$ and $\Delta$, and we denote by $E_\Delta`\Gamma$ the set obtained by expanding as far as possible in Δ the part of Γ contained in Δ; the set $E_\Delta`\Gamma$ is contained in both $E`\Gamma$ and Δ, but there may be points common to $E`\Gamma$ and $\Delta$ which do not belong to $E_\Delta`\Gamma$.

8. Sequences.

Of infinitely scattered sets the simplest are fully reduced sets whose members can be put into a one-one correlation with the inductive cardinals; if such a

correlation has been established, and x_n is the point corresponding to n, then the relation of n to x_n is called a sequence and denoted by (x_n), and the set of points is the converse domain of this relation.

9. Complements.

The points which do not belong to a set Γ compose a set called the complement of Γ, which we denote by $C' \Gamma$. If Γ and Δ are any two sets, the points of Δ which do not belong to Γ form a set called the complement of Γ in Δ, which we denote by $C_\Delta' \Gamma$; if Δ is contained in Γ, there is no point of Δ which does not belong to Γ, and $C_\Delta' \Gamma$ is null.

10. Neighbourhoods.

By the neighbourhood of x with radius ϱ we mean the set composed of all points separated from x by numbers less than ϱ. The character of a neighbourhood depends on the nature of the universe; for example, if the numbers separating x from points outside the unit to which it belongs have a lower limit or minimum σ other than o, then for any value of ϱ between o and σ the neighbourhood of x with radius ϱ coincides with the unit which includes x. Whatever the character of the universe, the neighbourhood of any point x with zero radius is null, but every other neighbourhood of x includes at least the one point x, and neighbourhoods with radii that are not zero may be distinguished as existent neighbourhoods.

11. Limiting Points and Limited Sets.

Having agreed rather to classify universes according to their properties than to consider only universes of special kinds, we define the limiting points of a set by the definition that x is a limiting point of Γ if there is a point of Γ outside the unit containing x in every existent neighbourhood of x, and we admit no modification which leads to a change in the content of the set of limiting points of any set whatever. The set whose members are the limiting points of Γ is called the derivative of Γ and denoted by $D' \Gamma$.

It is a fundamental proposition that every set which has a limiting point is infinitely scattered; the converse is not true. There are universes in which every infinitely scattered set has a limiting point, and such universes are said to be limited; for many purposes the distinction between a limited universe and an unlimited universe is the most important distinction between one universe

and another. In any universe a set is called unlimited or limited according as it does or does not contain an infinitely scattered set without a limiting point, and a limited universe may be defined as a universe in which every set is limited. It was proved by Weierstrass and is said by Young to have been known to earlier writers that in the simplest types of space every infinitely scattered bounded set has a limiting point. But it is easy to show that this proposition is not true for all spaces: if the universe consists of all signless rational numbers in a finite stretch and separating numbers are arithmetical differences, then every set is bounded but no set is limited which in a wider universe would have irrational limits; again, if the point is a progression of numbers $(x_1, x_2, \ldots\ldots)$ and the separating number $\dot{x}\ddot{x}$ is the greatest among the differences $|\dot{x}_1 - \ddot{x}_2|, |\dot{x}_1 - \ddot{x}_2|, \ldots,$ the sequence $(1, 0, 0, \ldots)$, $(0, 1, 0, \ldots)$, $(0, 0, 1, \ldots), \ldots.$ in which the nth point has its nth coordinate unity and its other coordinates zero, is an infinitely scattered bounded set, with span unity, but with no limiting points.

12. Simple Sets.

A set which is the converse domain of a sequence may have no limiting points, or any finite number of limiting points; indeed, as is shewn by the familiar correlations of the rational numbers in a finite interval with the natural numbers, the cardinal number of the derivative of such a set may be an infinite number greater than the cardinal number of the set itself. A set is said to be simple if it is the converse domain of a sequence and has not more than one limiting point, and a sequence is said to be simple if its converse domain is simple. The use of simple sets comes from the theorem that each limiting point of any Zermelo set Γ is the unique limiting point of some simple set contained in Γ, from which it follows that a Zermelo universe is limited if every simple set has a limiting point.

In Euclidean space of any number of dimensions, if (y_n) is a sequence whose converse domain is simple and unlimited and x is any point of the universe, and if the separating number of two points is the distance between them, then xy_n tends to infinity, but this property is not common to all unlimited universes.

13. Adherences and Coherences, Isolated Points and Internal Points, Edges and Boundaries.

There is no general relation of inclusion between a set and its derivative. Points which belong to Γ but not to $D'\Gamma$ are called isolated points of Γ and

compose a set known as the adherence of Γ, and points which belong both to Γ and to $D^{\text{‘}}\Gamma$ form a set called the coherence of Γ. Points of Γ which are limiting points of the complement of Γ constitute the edge of Γ, and points of Γ which do not belong to the edge of Γ are called internal points of Γ. Of the points of the derivative $D^{\text{‘}}\Gamma$, those which belong to Γ can of course be distinguished from those which belong to $C^{\text{‘}}\Gamma$, but it is unnecessary to invent names for the two sets indicated by this distinction, for the points common to $D^{\text{‘}}\Gamma$ and Γ compose the coherence of Γ, and the points common to $D^{\text{‘}}\Gamma$ and $C^{\text{‘}}\Gamma$ form the edge of the complement of Γ. Here we may add that the sum of the edges of Γ and $C^{\text{‘}}\Gamma$ is called the boundary of Γ.

If x is an isolated point of Γ, every point of the unit of Γ containing x is an isolated point, and the unit itself is called an isolated unit of Γ. If x is a limiting point of Γ, every point separated from x by the number zero is a limiting point of Γ, and therefore every derivative is a fully expanded set.

14. Complete Sets and Closed Sets.

We say that a set of points, limited or unlimited, is complete if it contains all its limiting points; thus in Euclidean space hyperbolas and helices are no less complete than circles, and a universe is necessarily complete. It is only to sets that are both complete and limited that we give the description of closed; a set is open if it is either incomplete or unlimited. Since a universe can not be incomplete, to say that a universe is closed is the same as to say that it is limited; moreover, in a limited universe all sets are limited, and therefore in a limited universe there is no difference between closed sets and complete sets.

15. Extension and Completion.

Extension of a set is addition to it of any set of its limiting points which it does not include originally, that is, addition of any part of the edge of the complement. If to a set Γ is added the whole of the edge of $C^{\text{‘}}\Gamma$, the set Γ is said to be completed or fully extended, and we denote the set obtained, which may be described simply as the sum of Γ and $D^{\text{‘}}\Gamma$, by $G^{\text{‘}}\Gamma$. If Γ is not limited, neither is $G^{\text{‘}}\Gamma$, and therefore $G^{\text{‘}}\Gamma$ is not necessarily closed, but the limiting points of $G^{\text{‘}}\Gamma$ are those of Γ itself and belong to $G^{\text{‘}}\Gamma$, whence it follows that $G^{\text{‘}}\Gamma$ is in all circumstances complete. The adherence of $G^{\text{‘}}\Gamma$ is the same as the adherence of Γ, and so $G^{\text{‘}}\Gamma$ need not be fully expanded, and for some purposes we have to use the set $E^{\text{‘}}G^{\text{‘}}\Gamma$ obtained by expanding $G^{\text{‘}}\Gamma$ fully, which is the same as the set $G^{\text{‘}}E^{\text{‘}}\Gamma$ obtained by completing $E^{\text{‘}}\Gamma$.

16. Dense Sets and Perfect Sets.

If every point of a set is a limiting point of the set, the set is said to be dense, and a set which is both complete and dense is called a perfect set, whether or not it is limited. A dense universe is necessarily perfect, but although the commonest and most important universes are dense, there is no logical necessity for a universe to be dense even if it is infinitely scattered. The simplicity of a dense universe comes chiefly from the fact that in a dense universe if Γ is any set whatever every point is a limiting point either of Γ or of $C{}^{\backprime}\Gamma$.

Any set obtained by extending a dense set is itself dense, and therefore the set obtained by completing any dense set is perfect. Although a dense universe must contain perfect sets, it is not every dense universe that contains sets both perfect and limited.

17. Inseparability.

We say that two sets are inseparable if the corresponding completed and fully expanded sets have at least one point in common; thus Γ and Δ are inseparable if there is a point which belongs to both $E{}^{\backprime}G{}^{\backprime}\Gamma$ and $E{}^{\backprime}G{}^{\backprime}\Delta$, that is, if there is a unit of the universe which contains members of both $G{}^{\backprime}\Gamma$ and $G{}^{\backprime}\Delta$. With this definition the null set is not inseparable from any set.

18. Congregates of Points.

A set in any universe we call a congregate of points if in every expression of it as the sum of two existent sets the two components are inseparable. If two sets have a common point they are certainly inseparable, and therefore although it is only a division into mutually exclusive sets that it is natural to contemplate when considering whether or not a set is a congregate, there is no need to complicate the definition of a congregate by requiring the sets considered to be mutually exclusive; since, however, the null set is not inseparable from any other set, it is necessary to insist that in every case neither of the components is null. Removing the word inseparable we may say that a set is a congregate if however it is expressed as the sum of two existent components the completed and fully expanded sets corresponding to the two components have at least one common point.

19. Connected Sets.

American writers have adopted a definition of considerable interest, which implies cohesion of a higher order than is essential to a congregate: a set is said to be connected if in every expression of it as the sum of two existent complementary components one of these components includes a limit of the other; the definition recalls the Dedekindian axiom of continuity. Obviously every connected set is a congregate, and it is easy to shew that every complete congregate is connected, but the set formed of those points of a sphere which do not lie on a particular great circle presents a simple example of a congregate that is not connected.

The step from a congregate to a connected set introduces precisely the condition essential for a theorem that is both interesting and valuable: a connected set that includes both a point that belongs to a set $\varDelta$ and a point that does not belong to $\varDelta$ necessarily includes a point on the boundary of $\varDelta$.

20. United Sets.

We come now to an idea[1] which appears to be of fundamental importance. We say that a set Γ is united if every pair of members of Γ is contained in a closed congregate contained in the fully expanded set $E^{\prime}\Gamma$. It can be shewn that every closed congregate is united, but while a united set is a congregate in the original sense it may be incomplete or unlimited and may indeed be both incomplete and unlimited. Closed congregates are necessary as a means to the definition and study of united sets, but the properties of closed congregates which are valuable and arise from the combination of their qualities seem to be precisely those which belong equally to all united sets.

As simple an example as there is of an open united set is the set formed of all the points on one side of a straight line in a reduced Euclidean plane, the distance between two points being chosen for their separating number. In Euclidean space of any number of dimensions, if y and z are any two points the set formed of y and z and all points between them on the straight line through them is called the closed chord joining them; this set is closed and connected. If y and z lie on the same side of any straight line in a plane every point of the closed chord joining them lies on the same side of that line. Hence in the set described, the closed chord joining any two points of the set is a closed congre-

[1] This idea seems narrowly to have escaped formulation by Prof. R. Baire, but I have failed to find an account of it in any of his writings that I have seen.

gate containing the points and contained in the set, and the set is therefore united, although it is unlimited because it extends to infinity and incomplete because the points of the straight line used in defining it are limiting points which it does not include. In Euclidean space a set Γ is called convex when if y and z are any two points belonging to Γ every point of the closed chord joining y and z belongs to Γ, and after what has been said it is hardly necessary to point out that if the separating numbers are distances every convex set is united.

The nature of unity may be illustrated further by means of a reduced Euclidean circle deprived of one point or of two points, the separating numbers again being distances. If Γ is such a circle and v, w are distinct points of Γ, then Γ itself, the set obtained by removing v from Γ, and the set obtained by removing from Γ both v and w, are all limited congregates, but only the first of them is complete.. The second of these three sets is, however, united, since if y, z are any two of its points the arc of Γ which has y and z for its end points and does not include v is a closed congregate containing y and z and contained in the set in question. But the third set is not united, for there are two arcs of Γ which have v and w for end points, and if y is any point distinct from v and w in one of these arcs and z is any point distinct from v and w in the other, every complete congregate contained in Γ and containing both y and z includes either v or w, and there is therefore no closed congregate containing y and z and contained in the set obtained by depriving Γ of v and w.

An example even more instructive than the last is given by a lemniscate or any other figure which might be described as a figure-of-eight. This is a closed connected figure and the set obtained by removing from it any one point is a congregate although it is incomplete; if the point removed is any other point than the node, or if the curve is supposed to have two distinct points at the node and only one of these is removed, the set remaining is united, but if the node is regarded as one point and is removed, or if all the points at zero distance from the node are removed, there remain two distinct sets, each in itself united, which do not together form a united whole.

A multiple united set is necessarily connected, but an example proves that the converse is not true, and that even a complete connected set may fail to be united. As simple an example as any is given by a branch of a hyperbola in a Euclidean plane together with any stretch contained in one of the asymptotes and a sequence of lines in which every line is parallel to this asymptote and cuts the curve and the sequence has the asymptote for sole limit: this set is connected and is complete if the stretch consists of the whole asymptote but every connected component which includes both a point in the asymptote and a

point not on that line is unbounded and is therefore open since the space is Euclidean. In this example it is to be remarked that the set deprived of the points belonging to the asymptote is a united set, whence follows the interesting theorem that extension, whether partial or full, of a united set may result in a loss of the unity.

Since every multiple united set is connected, such a set cannot leave any other set without crossing the boundary of that set. In a dense universe, if a unit contains both points of a set Γ and points of the complement $C^{\text{c}}\Gamma$, either all the points of Γ in the unit or all the points of $C^{\text{c}}\Gamma$ in the unit belong to the boundary of Γ, and therefore in a dense universe the theorem just stated can be enunciated of all united sets and not of such only as are multiple. More generally, if a united set which is not contained in an isolated unit of the universe includes both a point of a set Γ and a point of the complement of Γ, it includes a point of the boundary of Γ.

To illustrate the way in which the result enunciated in the last paragraph may be used to endorse the conclusions of common sense, let the universe be a reduced Euclidean plane, let Δ be a straight line in this plane, and let Θ be the set formed of points on one side of this straight line and Φ the set formed of points on the other side, separating numbers being distances. Then as already remarked, Θ and Φ are both united. If, however, y is a point of Θ and z a point of Φ, then since z belongs to the complement of Θ and every closed congregate is connected, every closed congregate containing both y and z contains a point of the boundary of Θ, that is, a point of Δ. If then Γ is the sum of Θ and Φ, there are points y and z belonging to Γ such that every closed congregate containing y and z contains a point of the complement of Γ, or in other words such that there does not exist a closed congregate containing y and z and contained in Γ; that is to say, the complement of a straight line in a Euclidean plane is the sum of two united sets but is not itself united. If, however, to the set Γ we add a single point x belonging to the line Δ, then if y and z are any two points of the resulting set, the sum of the closed chords joining y to x and x to z is a closed congregate containing y and z and contained in the set considered, and this set is therefore united.

21. The Separating Number of Two Sets.

From this point we propose a digression to compare the qualities we indicate by calling a set a congregate with the properties associated with the word

connex. The digression, interesting in itself, begins with the introduction of a notion that can be made to serve many useful purposes.

If Γ and Δ are any two sets, the class of signless real numbers each of which is not less than the number separating some point of Γ from some point of Δ is such that if σ belongs to it so does every number greater than σ; this class has therefore a lower limit or minimum, and this lower limit or minimum we call the separating number of the two sets Γ and Δ. If the separating number is a true minimum, that is, an attained minimum, of the class by which it is defined, then there exist points y, z belonging one to each of the sets Γ, Δ, such that the separating number of the two sets is the separating number yz of the two points, but if the separating number of the two sets is an unattained lower limit, then even to be entitled to assert that either there are a point y belonging to one of the sets and a simple sequence (z_n) whose converse domain is contained in the other set such that the separating number yz_n tends to the separating number of the sets, or there are simple sequences (y_n), (z_n) whose converse domains are contained one in each of the sets Γ, Δ such that $y_n z_n$ tends to the separating number of the sets, we must know that the sets are Zermelo sets. It is convenient to modify the conclusion just reached as to Zermelo sets by using the fact that a simple sequence (x_n) such that for every value of n the point x_n belongs to a set Θ is either limited or unlimited and if limited has a limiting point belonging to $D`\Phi$. We deduce that if two sets $\Gamma, \Delta$ are Zermelo sets, and their separating number is $\varrho$, then either there are points $y, z$ belonging one to each of the completed sets $G`\Gamma$, $G`\Delta$ such that the separating number yz is equal to ϱ, or there are a point y belonging to the set obtained by completing one of the sets Γ, Δ and a sequence (z_n) whose converse domain is contained in the other of the sets Γ, Δ and has no limiting point, such that yz_n tends to ϱ, or there are sequences (y_n), (z_n) whose converse domains are contained one in each of the sets and have no limiting points, such that $y_n z_n$ tends to ϱ. This is a result to which it is easy to apply knowledge of distinctive properties of the sets Γ, Δ or of the universe; for example, in Euclidean space of any finite number of dimensions with distances for separating numbers the second case cannot occur, while in any limited ZERMELO universe if the separating number of two sets is ϱ, there are points y, z belonging one to each of the corresponding completed sets such that yz is equal to ϱ. It is noteworthy that extension and expansion, partial or full, are without effect on the separating number of two sets.

An example in which the separating number of two sets is an unattained limit will prove useful for reference. In a Euclidean plane with distances for

separating numbers, let Γ be a branch of a hyperbola and Δ a line parallel to one of the asymptotes of the curve, at distance ϱ from this asymptote, and on such a side of the asymptote if ϱ is not zero that it does not intersect Γ. Then the separating number of Γ and Δ is ϱ, but Γ and Δ are both complete and the distance of any point of Γ from any point of Δ is greater than ϱ. This example emphasises the difficulty of giving a satisfactory description of such features as this by a process beginning with a conventional closing of the universe; there are different methods of closing the Euclidean plane, but in all of them parallel lines meet at infinity, and so it must be agreed if the universe is closed either that in this example the separating number of Γ and Δ is zero whatever the value of ϱ, on the ground that Γ and Δ have a common point, or that a point at infinity may be at a distance greater than zero from itself.

By means of the general idea of the separating number of two sets it is possible to simplify particular definitions in many important cases. For example, if Δ has only one member, x, the separating number of Δ and Γ is called the number separating x from Γ, and if this number is zero either there is a point of Γ in the unit of the universe which contains x or x is a limiting point of Γ. Again, the number separating x from the set obtained by depriving Γ of all its points in the unit of the universe containing x is the isolating radius of x and Γ; if y is any point separated from x by a number which is not zero but is less than this isolating radius, y belongs to the complement of Γ, and if x belongs to Γ, the unit of Γ containing x is an isolated unit if the isolating radius is not zero but x belongs to the coherence of Γ if the isolating radius is zero.

22. Connex Sets.

The first definition of a connex set was given by CANTOR, according to whom a set Γ is connex if given any signless number ϱ other than zero and any two points y, z of Γ, there can be formed a set Δ including y and z, contained in Γ, and consisting of a finite number n of points which can be correlated with the first n natural numbers in such a way that if x_m corresponds to m, the first point x_1 is y, the last point x_n is z, and every pair of consecutive points of Δ has a separating number not greater than ϱ.

A definition of an entirely different kind was proposed by JORDAN, who drew attention to the property possessed by a limited complete set if the separating number of every pair of existent sets of which it can be expressed as the sum is zero. Such a set is, in our sense of the word, united, and it is evident from

Jordan's work[1] that it is this characteristic that he wishes to emphasise, though he defines it only for closed sets. If we detach the property which Jordan describes from the elementary properties which he adds in order to obtain a united set, we are led to consider the nature of any set which is such that the separating number of every pair of existent sets of which it is the sum is zero, and we have no difficulty in shewing that the sets which have this property are the sets which are connex according to Cantor's definition.

23. The Relation between Connex Sets and Congregates.

In any universe a set which is a congregate is connex, but an unlimited connex set may fail to be a congregate, and it is only in a limited universe that every connex set is a congregate.

An example that we have already used will serve again. Let the universe be a reduced Euclidean plane with distances for separating numbers, let Γ be a branch of a hyperbola and Δ an asymptote, and consider the set obtained by adding Γ and Δ. If this set is expressed as the sum of two existent sets Θ, Φ, either Γ contains both a point of Θ and a point of Φ, or Δ contains both a point of Θ and a point of Φ, or Θ coincides with one of the sets Γ, Δ and Φ coincides with the other. In the first two cases, from the properties of straight lines and hyperbolas, it is true both that $G^{\epsilon}\Theta$ and $G^{\epsilon}\Phi$ have a common point and that the separating number of Θ and Φ is zero; in the last case the separating number is zero, but the sets are not inseparable. Thus there is a division of the whole set into two separable sets but there is no division into two sets whose separating number is not zero, and therefore the set is not a congregate but by Jordan's criterion it is connex. The same example will serve to illustrate Cantor's definition. Of any pair of points of the set, either both members belong to Γ, or both members belong to Δ, or one member belongs to Γ, and the other to Δ. If y, z are any two points of Γ or are any two points of Δ, let λ_{yz} denote the length of the curve or line between y and z, and if σ is any signless real number let $[\sigma]$ denote the integer next below σ (which is $\sigma - 1$ if σ is itself an integer). Then if ϱ is any signless number other than zero and if y and z are distinct points of Γ or distinct points of Δ, the curve or line between y and z can be divided into $[\lambda_{yz}/\varrho] + 1$ parts of equal length, and the end points of these parts, $[\lambda_{yz}/\varrho] + 2$ in number, compose a set of the required form; if, however, with the same value of ϱ, we have to consider two points y, z of which y

[1] Above all, from his phrase *d'un seul tenant*.

belongs to Γ and z to Δ, the first step is to select a point v of Γ and a point w of Δ whose distance apart is not greater than ϱ, a selection that is possible because Δ is an asymptote of Γ, and we can then find a set of the required kind with the finite number $[\lambda_{yv}/\varrho] + [\lambda_{zw}/\sigma] + 4$ of points.

We have said that a limited connex set is necessarily a congregate. Since in practice mathematicians have dealt almost exclusively with limited sets, it is impossible at present to pronounce on the importance of connexity when possessed by a set which is not a congregate. But there is no doubt that in many cases it is easier to apply the criterion of inseparability than to utilise either Cantor's criterion or Jordan's, and I think it is safe to predict that for logical developments the hypothesis that the separating number of two sets is zero will prove to be conveniently analysed into the form that either the sets are inseparable or they are separable but their separating number is zero and one at least of them is unlimited.

It should be added that the idea of congregates as distinct from connex sets is not necessary to the definition of united sets, since in that definition closed congregates only are used and there is no extensional difference between closed congregates and closed connex sets. For the theory of sets of points it might seem more elegant, because more economical, to define united sets by means of connex sets and not by means of congregates, but for the course we have adopted there is a double justification that the definition of a congregate lends itself more readily than the definition of a connex set to symbolic treatment and that while the notion of a connex set is inapplicable except to sets of points the idea of a congregate can be extended to any universe in which aggregates have derivatives of their own type. Here concludes our digression.

24. Continuous Sets and Continua.

A study of the formal definitions reveals that every unit set is united. This result is in fact desirable, but there are many properties of multiple united sets which do not belong to unit sets: to mention the simplest, a multiple united set is dense, as is any multiple congregate, but a unit set is not dense. On account of the differences of which this is a typical example, a distinctive epithet is given to a united set which has more than one unit: a multiple united set is said to be continuous.

There appears to be no agreement among mathematicians as to the use of the word continuum; in simple cases, to some writers a continuum is essentially

complete, while to others a continuum must have a complete complement; to all writers a continuum is a multiple set, and therefore the universe is the only set which is not inherently incapable of satisfying every definition that has been used. To us it would seem natural to define a continuum in the terms we have just used of a continuous set, but in spite of the absence of unanimity in its present employers we hesitate to appropriate the name; the sets which one class of writers calls continua can be described with sufficient brevity as complete continuous sets, and the sets which writers of the other class find it convenient to use add to continuity a property which we shall presently associate with the word domain and can be called continuous domains.

25. The Cells of a Set.

When the nature of a united set has been grasped, a valuable analysis of any set presents itself, following naturally on some of the examples we have given. If x is any point of a set Γ, what is conveyed in untechnical language by saying that y is a point which we can reach from x without leaving Γ is that there is a closed congregate containing x and y and contained in Γ. The points which we can reach from a point x of a set Γ without leaving Γ compose a set which we call the cell of Γ containing x and denote by $K'(x, \Gamma)$. If y is a point of the cell of Γ containing x, the cell containing y is identical with the cell containing x, and we call a set a cell of Γ if it is the cell of Γ containing some point of Γ; the class whose members are the cells of Γ we denote by $\varkappa' \Gamma$. Every cell of Γ is a united set contained in Γ, no two cells have a common point, and every point of Γ belongs to one cell; by means of its cells, Γ is expressed as the sum of a class of mutually exclusive sets, and the members of this class $\varkappa' \Gamma$ are precisely the sets which common sense regards as the distinct pieces of which Γ is composed. The number of the cells of a set is a number of considerable importance; for example if Γ is a plane set this number is related to the connectivity of the complement of Γ, while a united set is a set with only one cell and properties are not wanting which are peculiar to sets with other specific cell-numbers.

The definitions of this section may be illustrated by examples some of which we have already used. A circle deprived of two units, a hyperbola, a figure of eight deprived of its node, the set complementary to a straight line, are all sets in a Euclidean plane which have two cells, while a circle deprived of one unit and the set obtained by adding to the complement of a straight line any existent

set of points contained in the line itself are sets with only one cell; more generally, by depriving a circle of n units we obtain a set with n limited cells, while by depriving a Euclidean straight line of n units we obtain a set with $n + 1$ cells of which 2 are unlimited and $n - 1$ are limited.

It is to be noticed that a limiting point of one cell of a set may actually belong to another cell of the same set; in particular, the individual cells of a universe may be incomplete, although the universe as a whole is necessarily complete.

26. Sets Continuous in Every Part.

A cell of a set may be either unit or multiple and therefore every cell is either a unit cell or a continuous set. A set of which every cell is continuous is said to be continuous in every part. A set may be continuous in every part without being continuous as a whole, and without being complete or limited, but a set continuous in every part is necessarily dense.

27. Plots.

If x is any point and Γ any set, there may be no value of ϱ such that the points of Γ separated from x by numbers less than ϱ form a united set, and even if this set is united for a particular value σ of ϱ there may be values of ϱ both smaller and larger than σ for which the set is not united. But if x belongs to Γ, then for every value of ϱ other than zero x belongs to the set formed of points of Γ in the neighbourhood of x with radius ϱ, and the cell of this set containing x we call the plot of Γ with centre x and radius ϱ. If x does not belong to Γ, or if ϱ is zero, the plot of Γ with centre x and radius ϱ is null. The plot of Γ with centre x and radius ϱ must not be confounded with the part of the cell of Γ containing x which lies within the neighbourhood of x with centre Γ; the plot is contained in the set last described, but this set is not necessarily united.

Given any point x and any number ϱ, there is a plot of the universe itself which has centre x and radius ϱ; this plot, which is not null unless ϱ is zero, may be only a part of the neighbourhood with centre x and radius ϱ, and only a part of the cell of the universe containing x. Every plot of the universe is fully expanded, but a plot of any other set Γ is contained in Γ and if Γ is not fully expanded some of its plots are not fully expanded.

28. Confined Limiting Points.

We say that a point x is a confined limiting point of a set Γ with respect to a set Δ if there is a point of Γ outside the unit containing x in every existent plot of Δ which has x for centre, and we denote the set of limiting points of Γ confined with respect to Δ by $D_\Delta{}^\text{c}\Gamma$. It follows at once from the definition that whatever Δ may be, the confined derivative $D_\Delta{}^\text{c}\Gamma$ is contained in the derivative $D^\text{c}\Gamma$, but we note that even $D_V{}^\text{c}\Gamma$, the derivative confined with respect to the universe, is not necessarily the same as $D^\text{c}\Gamma$. The derivative of Γ confined with respect to Δ is the same as the derivative confined with respect to Δ of the product of Γ and Δ, that is, of the set composed of the points common to Γ and Δ.

29. Brinks and Borders.

The set formed of the points of a set Γ which belong to a set Δ and are confined limiting points of $C^\text{c}\Gamma$ with respect to Δ we call the brink of Γ in Δ, and the sum of the brinks in Δ of Γ and $C^\text{c}\Gamma$ we call the border of Γ in Δ and denote by $B^\text{c}{}_\Delta\Gamma$. The brink and the border of Γ in the universe are called simply the brink and the border of Γ, or if a contrast is felt to be desirable the absolute brink and the absolute border. Since the brink and the border in Δ of Γ are identical with the brink and the border in Δ of the part of Γ contained in Δ, it is an easy matter to pass from theorems concerning absolute brinks and borders to theorems concerning brinks and borders in sets other than the universe. The absolute brink of any set is contained in the edge of the set, and the absolute border is contained in the boundary, but before proceeding with abstract work we describe cases in which the brink differs from the edge and the border from the boundary, and we shall see in these examples the kind of part that confined limiting points may play.

Suppose that in Euclidean space of three dimensions v, w are two points and Ω is a set contained in the chord joining v and w and such that both Ω and its complement are dense in this chord. First let the universe V be the family of concentric spheres whose centre is v and whose radii are the distances from v of the points of Ω, let distances be separating numbers, let Σ be one of these spheres, let Θ be a great circle on this sphere, and let Γ, Δ be the unbounded hemispheres lying one on each side of Θ. Every point of Σ is a limiting point of sets contained in the other spheres, and therefore is a limiting point of $C^\text{c}\Gamma$; hence Γ is contained in $D^\text{c}C^\text{c}\Gamma$ and Γ is its own edge. But if there is no

connection between Σ and the spheres composing $C^{\text{c}}\Sigma$, the cell of V containing any point of Σ is Σ itself,[1] and $D^{\text{c}}{}_V C^{\text{c}}\Gamma$ is the sum of Δ and Θ, so that Γ has no brink, but Θ is the brink of $C^{\text{c}}\Gamma$ and the border of Γ. If, however, we add to the universe just considered all the points of the chord joining v and w, still using distances for separating numbers, and if this chord cuts Σ in a point y, then if x is any point of Σ and ϱ is not greater than xy, the plot of the universe which has x for centre and ϱ for radius is contained in Σ, and if x is distinct from y then x is a confined limiting point of a set Φ if and only if x is a limiting point of the part of Φ in Σ, but if x coincides with y then x is a confined limiting point of $C^{\text{c}}\Sigma$ and of the complement of every set contained in Σ, and every set contained in Σ and including y has y upon its brink. In the case of the unbounded hemispheres Γ and Δ, if y lies in Δ or Θ the brink and the border of Γ are alike unaffected by the addition to the universe, but if y lies in Γ then the brink of Γ contains this one point only, the brink of $C^{\text{c}}\Gamma$ is the great circle Θ as before, and the border of Γ is the set obtained by adding the point to the circle.

30. The Relation between Unity and Borders.

Far more fundamental than the relation between connected sets and boundaries is the relation between united sets and borders, expressible in the form that if a united set contained in a set Δ but not in an isolated unit of Δ includes both a point which belongs to a set Γ and a point which does not belong to Γ, then it includes at least one point of the border of Γ in Δ. Whenever the border of a set differs from the boundary, and in particular in the cases in which a set is contained in its boundary but not in its border, the present theorem gives results of greater value than the similar theorem enunciated earlier.

An important application of the theorem of this section is to the determination of the criterion for the existence of a border; it is readily proved that an existent set Γ in a universe V has an existent border if there is a cell of Γ which does not coincide with the cell of V in which it lies and is not contained

[1] We notice that if y, z are any two points of this universe the points of V belonging to the closed chord joining y and z form a set which in V is complete and connected, but this set is unlimited, for it contains sequences which have no limiting points in V; to meet such cases as this, we should have to make unity depend on *closed* congregates and not on *complete* congregates, even if we had no examples in Euclidean space of complete congregates that are not united.

in an isolated unit of V, and to pass from this result to a theorem giving the condition for the existence of a border of any one set Γ in any other set $\varDelta$ requires little more than verbal modifications.

31. Partitions and Permeation.

Deserving of passing notice is an idea closely related to ideas involved in the theorem of the last section. A set Θ is said to part two sets $\Gamma, \varDelta$ or to be a partition between them if no point of Γ or $\varDelta$ belongs to Θ but every united set containing a point of Γ and a point of $\varDelta$ necessarily includes a point of Θ. For example, in a reduced Euclidean plane a straight line parts any two sets of which one lies wholly on one side of the line and the other wholly on the other side. We recognise from this example that a point of a partition between two sets may be a common limiting point of the sets. One set is said to permeate another if there is no partition possible between them, and inseparable sets which do not permeate each other have a common limiting point.

32. Fronts.

The border $B_V^2{}^{\backprime}\Gamma$ of the border of a set Γ is not necessarily identical with the original border $B_V{}^{\backprime}\Gamma$, but is a set which we call the front[1] of Γ, and similarly the border in $\varDelta$ of the border of Γ in $\varDelta$, which we call the front of Γ in $\varDelta$, may differ from $B_\varDelta{}^{\backprime}\Gamma$. For example, if the universe is a Euclidean plane with distances for separating numbers, and Γ is contained in a circular area every point of which is a limiting point of both Γ and $C{}^{\backprime}\Gamma$, the border $B_V{}^{\backprime}\Gamma$, which in this case is the boundary, consists of the whole circular area together with the circumference, but the front is the circumference alone.

It is not difficult to prove that in any universe the border of any set is a complete set and the front and the border of any complete set coincide; from these propositions it follows that the border of every front is the front itself, so that for every value of n greater than two $B_\varDelta^n{}^{\backprime}\Gamma$ is identical with $B_\varDelta^2{}^{\backprime}\Gamma$, and it is this theorem which gives unique value to the front.

[1] Jordan gave the name of *frontière de Γ* to the set we are calling the boundary of Γ, and both boundary and frontier are in use in English as equivalent to his word *frontière*. It is unfortunate that in a subject requiring so extensive a vocabulary as does the theory of sets of points two expressive terms have been consecrated to a single idea, but an attempt to recover the word boundary for fresh service, leaving frontier to fulfil its original function, would lead to confusion.

33. Domains.

An existent set is called a domain if the corresponding fully expanded set has no brink. The simplest domains are fully expanded, and the characteristic property of a fully expanded domain may be expressed in a variety of ways; for example, a fully expanded domain is an existent set of which the border is contained in the complement, and a fully expanded set is a domain if it exists and its complement is complete, note being made that a null set is formally complete.

In the definitions of the brink and the border of a set Γ in a set Δ it is irrelevant whether or not Γ is contained in Δ; we do not, however, say that Γ is a domain in Δ unless not only does the fully expanded set $E'\Gamma$ exist and have no brink in Δ but Γ itself is contained in Δ. In general, if there are points of Γ in Δ but $E'\Gamma$ has no brink in Δ, it is the part of Γ in Δ which is a domain in Δ.

If Γ is a domain and x is any point of Γ, there is a number ϱ such that every point separated from x by a number less than ϱ is separated by the number zero from some point of Γ, while if Γ is a fully expanded domain and x is any point of Γ there is a number ϱ such that every point separated from x by a number less than ϱ actually belongs to Γ.

34. Capacious Sets.

If the set $E'\Gamma$ obtained by expanding fully a set Γ is contained in its own brink, there are no domains contained in Γ, but if $E'\Gamma$ has points not belonging to its brink then whether or not Γ is a domain there are domains contained in Γ; we call[1] a set capacious if it contains domains, and we call one set Γ capacious in another set Δ if there is a set contained in Γ which is a domain in Δ.

35. Extreme Points.

An important idea derived from that of a domain is that of the extremity of a set. A point is an extreme point[2] of a set Γ if there is no domain in Γ to which it belongs, and the extreme points of Γ compose a set we call the extremity of Γ. To determine whether or not a point is an extreme point of Γ it is not necessary to consider Γ as contained in a more comprehensive set.

[1] What Jordan calls a *domaine* is what we are calling a capacious set; our use of domain is the use common in English mathematical writings, but we require a phrase to embody Jordan's idea.

[2] In the case of a plane curve an end point as defined by W. H. and G. C. Young, The Theory of Sets of Points, p. 221 (1906) is not necessarily an extreme point in our sense.

36. The Dimension-Integer of a Set, and the Definitions of Curves and Surfaces.

We do not need the definition of a domain in order to define a curve, a surface, and inductively a set of any finite dimension-integer. A set Γ is a curve if it is united, if it is not a unit set, and if every existent cell of the front in Γ of every set contained in Γ is a unit cell. A set Γ is a surface if it is united, if it is neither a unit set nor a curve, and if every existent cell of the front in Γ of every set contained in Γ is either a unit set or a curve. In general a united set has the dimension-integer n if it has a dimension-integer not smaller than n and if every existent cell of the front in Γ of every set contained in Γ has a dimension-integer smaller than n, a unit set being regarded as having dimension-integer zero; and if a set is not united its dimension-integer is the greatest number occurring among the dimension-integers of its cells.

It is interesting to notice that extension, partial or full, may increase indefinitely the dimension-integer of a set; perhaps the most important classification of sets with a common dimension-integer is based on the increase effected by completion, the simplest sets of dimension-integer n being those whose completions also have dimension-integer n. From a theorem stated in section 19 it follows that extension even if full may increase the number of cells of a set, so that extension of a curve or a surface may result in a set which is not a single curve or a single surface even if it does not result in an increase of the dimension-integer.

37. Pure Sets and Mixed Sets.

Reference must be made to the distinction between a pure set and a mixed set of dimension-integer n, a distinction that in contrast to the notion of the dimension-integer involves an idea derived from that of a domain, namely, the idea of a capacious set. The cylindroid is a locus furnished analytically which is united but in some sense consists of a surface together with curves which do not lie in the surface. We say that a set Γ of dimension-integer n is a pure set if the front in Γ of every fully expanded set capacious in Γ has dimension-integer $n-1$, and we describe a set as mixed if it is not pure. It is easy to verify that with this definition a cylindroid is a mixed set.

38. Curves on Surfaces.

It can be proved that if Γ is such that the set $E_\Delta{}^{\prime}\Gamma$ obtained by the full expansion of Γ in Δ is contained in its own border in Δ, then the dimension-

integer of the part of Γ in Δ is smaller than the dimension-integer of Δ. This principle enables us to define a curve in any set which is known to be a surface in terms simpler than those of the general definition of a curve; a curve on a surface is a multiple united set contained in the surface such that the corresponding set fully expanded in the surface is contained in its own border in the surface, that is, is identical with its own brink in the surface. For example, if the universe is a reduced plane a curve is a multiple united set of points contained in its own boundary. But a multiple united set contained in its own border in a reduced space whose dimension-integer is 3 may be either a curve or a surface, and to deal with dimensions in general by successive reduction from the universe not only assumes the universe to have a finite dimension-integer but also requires a method of discrimination between a decrease by unity and any greater decrease in a dimension-integer, and this discrimination is rendered difficult by the existence in any set with dimension-integer not less than 2 of sets that are not pure.

39. Dimension-integers and Dimension-Types.

The definitions proposed in the last three paragraphs differ from the definitions in other theories of dimension in being independent of any comparison of one set with another, but although the property described in the last paragraph as characteristic of a curve on a surface appears to be the fundamental property that any system of definitions must reproduce, the utility of the definitions in section 36 doubtless depends on the possibility of ascertaining dimension-integers by comparison. A correlation of one set Γ with another set Δ in general connects classes of members of Γ with classes of members of Δ; if to each point of Γ corresponds one and only one point of Δ, the correlation of Γ with Δ is many-one, and if the correlation of Δ with Γ is many-one, the correlation of Γ with Δ is one-many; a correlation which is both many-one and one-many is one-one. Let Θ be a set contained in Γ, and let Φ be the corresponding set in Δ, a many-many correspondence existing between Γ and Δ; to the part of the derived set $D'\Theta$ which is contained in Γ there corresponds some set contained in Δ, but this set has not necessarily any points in common with $D'\Phi$; if the correlate in Δ of the part belonging to Γ of the derivative of *every* set Θ contained in Γ is the part contained in Δ of the derivative of the correlate in Δ of Θ, the correspondence of Γ with Δ is continuous from Γ to Δ; a correspondence which is continuous both from Γ to Δ and from Δ to Γ is a bicontinuous correlation of Γ and Δ. A one-one correlation is not necessarily bicontinuous, nor is every

bicontinuous correlation one-one, but the correlations which are valuable in the theory of dimensions are correlations which are both bicontinuous and one-one, and if a correlation of this kind exists between two sets the sets are said to be homomorphous and each is called an image of the other.

In FRÉCHET's theory of dimension-types, the type of Γ is said to be not lower than the type of Δ if Γ contains an image of Δ, and two sets are said to have the same type if each contains an image of the other; it is easy to prove that with our definitions two sets between which exists a bicontinuous one-one correlation have the same dimension-integer, and the dimension-integer of a set Δ can not be greater than the dimension-integer of any set in which Δ is contained, and it follows that our ideas are not at variance with FRÉCHET's. FRÉCHET, however, can assign the integers arbitrarily to any set of ascending types, and for him the assertion that n-dimensional Euclidean space, — the space in which a point x is the ordered class $(x_1, x_2, \dots x_n)$ of n independent real numbers and the separating number $\dot{x}\ddot{x}$ is either $\sqrt{\{\Sigma(\dot{x}_r - \ddot{x}_r)^2\}}$ or $\Sigma|\dot{x}_r - \ddot{x}_r|$, — is of dimension-type n, while requiring for its justification the fundamental dimension-theorem that no bicontinuous one-one correspondence is possible between two complete spaces of this kind which do not depend on the same number of coordinates, is nevertheless an arbitrary definition. We have to recognise that if the definitions of section 36 are to be adopted, despotic assignment of dimension-integers is impossible, and the dimension-integer of Euclidean space with n coordinates is intrinsically determinate: if this integer proves to be n, and if every set with dimension-integer n contains an image of the complete Euclidean space with n coordinates, the relation of the present theory to the theory of dimension-types is perfect.

AUSZUG AUS EINEM BRIEFE DES HERRN LANDAU AN DEN HERAUSGEBER.

Göttingen, 24. 7. 1918.

Hochverehrter Herr Kollege!

. . . .

Der in Ihrer bekannten Arbeit *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (cinquième note)* [Acta Mathematica, Bd. XXIX (1905), S. 101—181] bewiesene Satz A (S. 107—108) besagt: *Es sei* $\alpha > 0$, $F_\alpha(x)$ *Ihre spezielle ganze Funktion* (5) *oder irgend eine ganze Funktion von* x *oder auch nur z. B. auf dem durch ein komplexes* $x_0 \neq 0$ *gehenden Halbstrahl von* 0 *bis* ∞x_0 *definiert und stetig.*[1] *Es sei ferner*

$$f(x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

konvergent (*d. h., da wegen* $\alpha > 0$ *in* $\omega = 0$ *sicher hineinintegriert werden kann,* $\lim\limits_{\Omega=\infty} \int_0^\Omega$ *vorhanden*). *Dann konvergiert*

$$f(\Theta x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega \Theta x_0)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

für $0 < \Theta \leq 1$ *und zwar gleichmässig für* $\Theta_0 \leq \Theta \leq 1$, *wo* Θ_0 *irgend eine feste Zahl der Strecke* $0 < \Theta_0 < 1$ *ist.*

[1] Auch die Stetigkeit wird nicht voll gebraucht; doch ist dies für meine gegenwärtigen Bemerkungen unwesentlich.

Ich erlaube mir, Sie darauf aufmerksam zu machen, dass die gleichmässige Konvergenz von $f(\Theta x_0)$ auf der ganzen Strecke $0 \leq \Theta \leq 1$ besteht[1]; im Falle $\alpha = 1$ hat dies schon Herr Hardy in seiner Arbeit *Notes on some points in the integral calculus,* XXXI, *The uniform convergence of Borel's integral* [The Messenger of Mathematics, Ser. II, Bd. XL (1911), S. 161—165] gezeigt, aber nicht einfach genug.

Beweis: Da Sie gleichmässige Konvergenz für $\frac{1}{2^\alpha} < \Theta < 1$ schon bewiesen haben, darf ich mich auf $0 < \Theta < \frac{1}{2^\alpha}$ beschränken. Ich setze $\frac{1}{\alpha} = \beta$ und habe,

$$F_\alpha(\omega x_0) = \varphi(\omega) + i\,\psi(\omega)$$

[1] In meiner Arbeit ist die gleichmässige Konvergenz des Integrals

$$\text{(A)} \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega\,\theta\,x_0)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

für $0 \leq \theta \leq 1$ in dem Falle bewiesen, dass

$$F_\alpha(z) = k_0 + \frac{k_1}{\underline{|\alpha \cdot 1}} z + \frac{k_2}{\underline{|\alpha \cdot 2}} z^2 + \cdots + \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha \nu}} z^\nu + \cdots,$$

$$\overline{\lim_{\nu = \infty}} \sqrt[\nu]{|k_\nu|} = \frac{1}{r};\ r > 0$$

und

$$\int_0^\rho e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

konvergiert. (Cf. pag. 107, 108; 112, 113.)

Wenn dagegen nur die Integrabilität von

$$e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega\,\theta\,x_0)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

und die Konvergenz von

$$\int_0^\rho e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

vorausgesetzt wird, ist der Satz, wie Herr Landau richtig angibt, nur für den Fall $0 < \theta_0 \leq \theta < 1$ bewiesen.

Ich habe in der genannten Arbeit keinen Gebrauch gehabt für einen weitergehenden Satz als den darin bewiesenen.

Ich hatte mir jedoch vorbehalten, auf das Studium des Integrals (A) zurückzukommen, in dem Falle, dass von

$$e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega\,\theta\,x_0)\, d\,\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

nur die Integrabilität vorausgesetzt wird (cf. p. 108, 111). Eine grössere Arbeit hierüber habe ich seit lange ausgearbeitet. *Mittag-Leffler.*

gesetzt, nachzuweisen, dass, wenn $\varphi(\omega)$ für $\omega \geq 0$ reell und stetig ist, aus der Konvergenz von

$$\int_0^\infty \varphi(\omega)\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta \qquad (\beta > 0)$$

für $H > 0$ eine Ungleichung

$$\left|\int_H^\infty \varphi(\Theta\omega)\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta\right| < \varrho(H)$$

folgt, wo $\varrho(H)$ von Θ frei ist und $\varrho(H) \to 0$ bei $H \to \infty$ ist. (Bei $\psi(\omega)$ gilt alsdann dasselbe.)

Ich wähle eine Zahl K, sodass $|\varphi(\omega)| < K$ für $0 \leq \omega < 1$ ist; und eine Zahl M, sodass für $\omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0$ stets

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} \varphi(\omega)\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta\right| < M$$

ist; alsdann ist für $\omega_3 \geq 0, \omega_4 > 0$

(1) $$\left|\int_{\omega_3}^{\omega_4} \varphi(\Theta\,\omega)\, e^{-\Theta^\beta \omega^\beta}\, d\,\omega^\beta\right| < \frac{M}{\Theta^\beta}.$$

Ich setze ferner für $H > 0$ die Zahl μ gleich der grösseren der beiden Zahlen H und $\frac{1}{\Theta}$,

$$I_1 = \int_H^\mu \varphi(\Theta\omega)\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta,\quad I_2 = \int_\mu^\infty \varphi(\Theta\omega)\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta.$$

(Die Konvergenz von I_2 ist ja bekannt.)

Es genügt,

$$|I_1| < \varrho_1(H),\quad |I_2| < \varrho_2(H)$$

darzutun, wo $\varrho_1(H)$ und $\varrho_2(H)$ von Θ frei sind und bei $H \to \infty$ gegen 0 streben.

I_1 ist $= 0$, falls $H \geq \frac{1}{\Theta}$; falls aber $H < \frac{1}{\Theta}$, ist

$$|I_1| \leq \int_H^{\frac{1}{\Theta}} K\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta < \int_H^\infty K\, e^{-\omega^\beta}\, d\,\omega^\beta = \varrho_1(H) \to 0.$$

Wegen $\Theta^\beta < \frac{1}{2^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} < 1$ ist nach dem zweiten Mittelwertsatz für $\Omega > \mu$

$$\int_\mu^\Omega \varphi(\Theta\omega) e^{-\omega^\beta} d\omega^\beta = \int_\mu^\Omega e^{-(1-\Theta^\beta)\omega^\beta} \varphi(\Theta\omega) e^{-\Theta^\beta\omega^\beta} d\omega^\beta$$

$$= e^{-(1-\Theta^\beta)\mu^\beta} \int_\mu^{\Omega'} \varphi(\Theta\omega) e^{-\Theta^\beta\omega^\beta} d\omega^\beta \quad (\mu \leq \Omega' \leq \Omega),$$

also nach (1)

$$\left| \int_\mu^\Omega \varphi(\Theta\omega) e^{-\omega^\beta} d\omega^\beta \right| < e^{-(1-\Theta^\beta)\mu^\beta} \frac{M}{\Theta^\beta},$$

folglich wegen $\Theta^\beta < \frac{1}{2}$

$$|I_2| \leqq e^{-(1-\Theta^\beta)\mu^\beta} M \cdot \frac{1}{\Theta^\beta} < e^{-\frac{1}{2}\mu^\beta} M \cdot 4 e^{\frac{1}{4\Theta^\beta}},$$

also wegen $\frac{1}{\Theta} \leqq \mu$

$$|I_2| < e^{-\frac{1}{2}\mu^\beta} M \cdot 4 e^{\frac{1}{4}\mu^\beta} = 4 M e^{-\frac{1}{4}\mu^\beta},$$

folglich wegen $\mu \geqq H$

$$|I_2| < 4 M e^{-\frac{1}{4} H^\beta} = \varrho_2(H) \succ 0.$$

. . . .

Edmund Landau.

BIBLIOGRAPHIE.

Émile Blanchard.

Paris.

CAVALCANTI, M. DE ALMEIDA, Essai d'un cours philosophique de Calcul arithmétique d'après AUGUSTE COMTE. Ouvrage spécialement destiné à l'éducation de la Femme. Trad. française par A. DE ARAUJO GONÇALVES. — XXV + 827 pp. 8. Fr. 14: — 1916.

Préface. Avertiss. Plan du cours. Introd. philosophique. — Appréciation gén d. divers échelons de la philosophie sec. Importance qu'y a la math. Position encyclopéd. du calcul arithmét. — De la conception d. nombres, de leur origine et de leur destinat. subject. — Institution fondament. de la numérat. systémat. Théorie numérique de l'ordre. Evaluation d. nombres entiers par addition, soustract. et multiplicat. Division d. nombres ent. Divisibilité. Institut. d. fractions ordin. Reduction d. fractions à leur plus simple express. Extension du calcul fondament. aux fractions ordin. Simplificat. du calcul fractionnaire. Complément à la théorie de la division. — Complément à la théorie de la numérat. Complément à la théorie d. évaluations. Théorie d. progressions arithm. Discours final. Note sur la logique. Considérat. plus spéc. relat. à la méthode de chaque science. Note sur l'imagination et la raison. Classificat. posit. d. 18 fonct. int. du cerveau.

Cambridge University Press.

Cambridge.

FORSYTH, A. R., Theory of functions of a complex variable. 3rd ed. 855 pp. 8. 1918. 30 sh.

General introduct. Integration of uniform funct. Expansion of funct. in series of powers. Uniform funct., particul. those without essent. singularities. Transcendent. integral funct. Functions with a limit. number of essent. singularities. Funct. with unlimit. essent. singularities, a. expansion in ser. of funct. Multiform funct. Periods of definite integrals, a. period. funct. in general. Unif. simply-periodic a. doubly-period. funct. Doubly-period. funct. of the sec. order. Pseudo-period. funct. Functions pos-

sessing an algebraical addition-theorem. Connectivity of surfaces. Riemann's surfaces. Algebr. funct. a. their integrals. Schwarz's proof of the existence-theor. Applications of the exist.-theor. Abel's theor. Conformal representation: Introd. Note: Some applicat. of conform. representat. to mathematical physics. Conf. represent.: Gen. theory. Groups of lin. substitutions. Automorphic funct. — Miscell. ex. Glossary of technical terms.

Livens, G. H., The theory of electricity. — VII+717 pp. 8. 1918. 30 sh.

Pref. Mathematical introduct. — Statics a. kinetics: The product. a. definit. of the electrostatic field. The characteristic properties of the el. field. The electr. a. mechanical relations of a syst. of conductors. The Faraday-Maxwell theory of electrostatic action. The theory of polarised media. Magneto-statics. Electr. currents in metallic conduct. Electr. currents in liquid a. gaseous conduct. — Dynamics: The electromagnetic field. Some spec. electromagn. fields. Electrodynamics of linear currents. Electromagn. oscillations a. waves. Reflexion, refraction a. conduction of electr. waves. Gen. electrodynamic theory. The electrodynamics of moving media. Examples. Index.

The Royal Society of London, Catalogue of scientific papers, 4th series (1884—1900). Vol. 13. A—B. — XCVIII+951 pp. 4. 1914.

The Carnegie Institution of Washington.

Washington.

Stager, Henry Walter, A Sylow factor table of the first twelve thousand numbers. Giving the possible number of Sylow sub-groups of a group of given order between the limits of 0 and 1200. (Carnegie Institution of Washington. Publication No. 151.) — X+120 pp. 4. 1916.

A. Francke.

Bern.

Jonquière, Georg, Die grundsätzliche Unannehmbarkeit der transzendentalen Philosophie Immanuel Kants. Das »Primat« der Kritik der praktischen Vernunft vor der Kritik der reinen Vernunft. Das Verhältnis Kants zur Naturwissenschaft, zur Theologie und zur Kirche. Problematische Ausblicke. — XV+300 pp. 8. 1917.

Vorw. Hist. Darstellung d. hauptsächl. Theorien üb. Raum u. Zeit. Exposition d. Transzendentallehre Kants an d. Hand ihrer philos. Hauptbegriffe. Widerlegung d. Transzendentaltheorie Immanuel Kants. Ueber das Problem. d. Willensfreiheit. Kant u. Cyon. — Einleit. Versuch eines naturalist.-philosoph. Gegenstücks gegen die erkenntnistheoret. Transzendentaltheorie Kants. Versuch einer prakt.-phil.-ethischen Skizze im Rahmen naturwissenschaftl. Weltanschauung.

Gauthier-Villars & Cie.

Paris.

Annuaire pour l'an 1918, publ. par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. — X + 870 pp. 16. 33 fig., 5 cartes célestes. 3 pl. magnétiques, 1 portr. 1918. Fr. 2: —

Calendrier pour l'an 1918. Prédict. Etude d. div. calendriers. Terre. Astronomie. Poids et mesures. Monnaies. Heures légales. Données phys. et. chimiques. Suppl. pour l'an 1919: fêtes, concordance d. calendriers, éclipses, levers et couchers du soleil et de la lune, phases, plus grandes marées, coeff. d. marées. — Les cadrans solaires, par G. Bigourdan. Le calendrier égyptien, par G. Bigourdan. L'heure en mer, par J. Renaud. Le soleil et le magnétisme terrestre, par M. Hamy. La vie et l'oeuvre de Gaston Darboux, par E. Picard.

Borel, Émile, Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe. Réd. par Gaston Julia. (Collection de monographies . . . publ. par É. Borel.) — 163 pp. 8. 1917. Fr. 7: —.

Préf. Introd. Géneralités. Application de l'intégrale de Cauchy au développement en série de polynomes d'une fonct. déf. dans un domaine de Weierstrass. Quelq. conséquences remarq. du développement en série de polyn. L'extension de la théorie du prolongement analyt. Les ensembles de mesure nulle. Les domaines C. Les fonct. monogènes non analyt. déf. dans l. domaines de Cauchy. Sur l'extension de la formule de Green aux ensembles parfaits discont. Sur la théorie du potentiel logarithm.

Darboux, Gaston, Principes de géométrie analytique. (Cours de géométrie de la Faculté d. Sciences.) — VI + 520 pp. 8. Fr. 20. 1917.

Le rapport anharmonique: Introduct. Les coordonnées tétraédriques. Le rapport anharmonique. La méthode des notations abrégées de Bobillier et l'homologie dans le plan. L'homologie biaxiale. Le principe de dualité. Les fig. corrélatives. Les coniques et les divisions homographiques.

Définitions métriques: Les relations métriques dans le plan. Etude d'une classe particulière de courbes analogues aux coniques. Les éléments métriques dans l'espace. Génératrices rectilignes de la sphère. Trigonométrie sphérique. Segments associés sur la sphère.

Les théorèmes de Poncelet: Etude d'un syst. particulier de coordonnées. Les théorèmes de Poncelet. Le théorème gén. de Poncelet.

La Géométrie Cayleyenne: Origine de la Géométrie Cayleyenne. Les déplacements Cayleyens. La trigonométrie Cayleyenne.

De l'inversion: L'inversion. Ses propriétés essent. Les coordonnées pentasphériques. Les cyclides en coordonnées cartésiennes. Les cyclides en coordonnées pentasphériques. Les cyclides et leurs sphères principales. Le système triple orthogonal formé de trois familles de cyclides. Un mode de transformation de l'espace qui se présente dans l'étude d. cyclides.

de Morin, H., Les appareils d'intégration. Intégrateurs simples et composés. Planimètres, intégromètres, intégraphes et courbes intégrables, analyse harmonique et analyseurs. (Bibliothéque gén. d. Sciences.) — 208 pp. 8.

Avertissement. Introd. Planimètres à tige de longueur constante, à rotation, planimètres spéciaux. — Les intégromètres. — Courbes différentielles et courbes intégrales. Intégraphes. — L'analyse harmon. et les analyseurs. Intégrateurs composés.

d'Ocagne, Maurice, Cours de géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique. T. 1: Transformations géométriques. Perspective. Géométrie infinitésimale. Géométrie réglée. Géométrie cinématique. — XI+375 pp. 8. Fr. 16: — 1917.

Préface. Préliminaires. Transformations ponctuelles. Transf. dualistiques. Notions s. l. théorie d. groupes de transf. — Perspective: Généralités. Trait de persp. conique. Mise en persp. Construct. dir. Restitution perspect. — Trait de persp. axonométrique: Persp. cavalière. Persp. isométrique. — Courbes planes: Rappel de notions classiques. Formules fondament. Applicat. diverses. — Courbes gauches: Rappel de not. classiques. Etude spéciale de l'hélice. — Surfaces développables: Propriétés gén. Étude d. développ. attachées à une courbe gauche. — Surfaces en gén.: Étude d'une surf. autour d'un de s. points. Lignes tracées sur une surf. Étude spéc. d. géodésiques de l'ellipsoide. — Surfaces gauches: Propr. gén. Étude spéc. du conoïde de Plucker ou cylindroïde. — Géom. réglée: Gén. s. l. complexes et congruences. Compl. et congr. linéaires. — Géométrie cinémat.: Généralités. Mouvements dans un plan. Mouvem. autour d'un point fixe. Mouvem. dans l'espace. Applicat. div.: Helicoïdes réglés. Surface de l'onde. — Notions complément. s. l. transform. géométriques. Sur un procédé de mise en persp. sans ligne de construct. Sur un procédé de restitut. persp. fondé sur l'homologie. Exercices compl. relat. à la geométrie infinités. d. courbes planes. Sur l'attraction newtonienne d'une couche ellipsoïdale.

Picard, Émile, Les sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle. — 24 pp. 8. 1917.

Les fonctions analyt. Les équations différentielles. Théorie d. nombres. Algèbre et géométrie. Théorie d. fonct. de var. réelles et théorie d. ensembles. Quelques remarques finales.

Serret, J. A., Traité de trigonométrie. 10:e éd. — X + 336 pp. 8. 1916.

Eléments de la théorie des fonctions circulaires. Des tables trigonom. Trigonométrie rectiligne. Trigonométrie sphérique. Complément de la théorie d. fonctions circulaires. De la résolution d. triangles par la voie d. séries et d. formules trigonométriques différentielles.

Zoretti, L., Tables numériques usuelles, à l'usage d'ingénieurs, d. étudiants d. facultés, d. élèves d. lycées et d. écoles prim. sup., etc. — 52 pp. 8. 1917. Fr. 3: —.

Hugo Gebers förlag.

Stockholm.

RAMSTEDT, EVA, & GLEDITSCH, ELLEN, Radium och radioaktiva processer. Med 53 illustr. — VIII + 179 pp. 8. 1917. Kr. 5: 50 häft.; 8: — bund.

Inledn. Mätmetoder. Radium o. dess egensk. Strålar fr. radioakt. ämnen. Strålarnas verkn. Radiumemanation. Teorin om atomernas sönderfall. Radiums akt. belägg. Uran-radiumserien. Torium- o. aktiniumserierna. Energi o. värmeverk. De radioakt. grundämnena o. det period. syst. Radioaktivitet i atmosf. o. jordskorpan. Fabriksmäss. framst. av radium o. mätn. av radiumpreparat. Litterat. förteckn. Reg. Bil.

Ginn and Company.

Boston. New York. Chicago. London.

GOURSAT, ÉDOUARD, Functions of a complex variable. Being part I of volume II. Transl. by EARLE RAYMOND HEDRICK and OTTO DUNKEL. (*A course in mathematical analysis.*) — X + 259 pp. 8. 11 sh. 6 d. 1916.

Elements of the theory: Gen. principles. Analytic functions. Power series with compl. terms. Element. transcend. functions. Conformal representat. Exercises. — The gen. theory of analyt. functions accord. to Cauchy: Definite integrals taken betw. imaginary limits. Cauchy's integral. Taylor's a. Laurent's series. Singular points. Residues. Applications of the gen. theorems. Periods of definite integrals. Exercises. — Single-valued analyt. functions: Weierstrass' primary funct. Mittag-Leffler's theorem. Doubly period. functions. Ellipt. functions. Inverse funct. Curves of deficiency one. Exercises. — Analyt. extension: Definit. of an analyt. funct. by means of one of its elements. Natural boundaries. Cuts. Exercises. — Analyt. funct. of several variables: Gen. prop. Implicit funct. Algebraic funct. Exercises.

LEIB, DAVID D., Problems in the calculus with formulas and suggestions. X + 224 pp. 8. 4 sh. 6 d. 1915.

Functions. Formal differentiation. Simple applicat. Successive different. Maxima a. minima. Differentials a. rates. Indeterminate forms. Curvature. Evolutes. Partial derivatives. Applicat. Series. Further applicat. to geometry. Integral calculus. Simple formal integrat. Element. applicat. Definite integrals. Special methods of integrat. Applicat. Integration a summation process. Geom. applicat. Approximate integrat. Various methods. Multiple integrat. General applicat. Differential equat. Answers.

Jul. Gjellerup.

Köbenhavn.

FRIIS-PETERSEN, FR., & JENSEN, J. L. W., Opgaver i Algebra for Realklassen og det sprogelige Gymnasium. — 63 pp. 8. 1917.

Ligninger. Rod. Negat. o. brudne Eksponenter. Logaritmer. Eksponent. Lign. Differensraekker. Kvotientraekker Sammensat Rente. Annuiteter. Bland. Opgaver. Opg. ved Realeksamen. Opg. ved Pigeskoleeksamen.

Hjelmslev, J., Lærebog i Geometrie. Til Brug ved den Polytekniske Læreanstalt. 1ste Afsnit. — 208 pp. 8. 1917.

Det videnskab. Grundlag for prakt. Tegning. Parallelprojektion o. Affinitet. Retvinklet Projektion. Dobbelt Projektion. Aksonometrisk Afbilding. Elementer af d. kinemat. Geometri. Topografiske Flader. Perspektivlære. Elementer af d. projektive Geometri. Keglesnit. Keglesnitsflader.

Hjelmslev, J., Elementær Geometri. Første Bog. — 135 pp. 8. 2 Kr. 1916.

Inledn. De geom. Grundformer. Geometrien i Tegneplanen: Tegneplanen. Rektanglet. Parallele Lin. Maalestok o. Passer. Cirklen. Vinkler. Trekantskonstruktioner. Symmetri. Bevægelige Pktr. Cirklers indbyrdes Stilling. Parallelforskydning. — Geometrien i Marken: Lodrette o. vandrette Lin. o. Planer. Landmaaling. — Ligedannethed: Fremstill. af plane Fig. i formindsket Maalestok. Ligedann. Fig. — Beregnende Geometri: Den beregn. Geometris Opgave. Den retvinkl. Trekant. Trigonometri. Den ligeben. Trekant. Den skævvinkl. Trekant. Eksempler. Kordeberegning. Arealberegn. — Konstruktionslære: Geom. Steder. Grafisk Fremstill. — Opgaver. Trigonom. Tabel.

Gleerupska Univ.-Bokhandeln.

Lund.

Ising, Gustaf, Undersökningar rörande elektrometrar. 1. — 173 pp. 8. 5 pl. Kr. 4: — 1917.

Inled. öfversikt. Allmän teori: Potentialerna gifna. (Icke isol. syst.) Laddningarna gifna (Fullst. isol. syst.) Potent. gifna på några af ledarna, laddningarna på de öfr. (Delvis isol. syst.) Tillämpning af teorien på symmetr. syst. m. tre ledare. — Om beräkn. af potential- o. induktionskoefficienter.

G. J. Göschen.

Berlin & Leipzig.

Bieberbach, Ludwig, Einführung in die konforme Abbildung. (Samml. Göschen 768.) Mit 44 Fig. — 141 pp. 8. M. 1: — 1915.

Grundleg. Lineare Funktionen. Rationale Funkt. Allgem. Entwicklungen. Weitere Abbild. durch gegebene Funkt. Abbild. gegebener Bereiche. Die Beziehungen zur Potentialtheorie. Reg.

FUETER, RUDOLF, Synthetische Zahlentheorie. — VIII + 270 pp. 8. M. 9: — geh.; M. 10: — geb. 1917.

Einleit. Bereiche rationaler Zahlen. Der Primidealführer. Die *l*. Einheitswurzel. Die Zahlentheorie d. Körpers der *l*. Einheitswurzel. Die Aufstell. der Primideale. Die Einheiten. Die Berechn. der Klassenzahl. Die Reziprozitätsgesetze.

KNOPP, KONRAD, Funktionentheorie. II: Anwendungen d. Theorie zur Untersuchung spezieller analytischer Funktionen. Mit 10 Fig. (Samml. Göschen 703.) — 116 pp. 8. M. 1: — 1913.

Ganze transzend. Funkt. Meromorphe Funkt. Die Γ-Funktion. Period. Funkt. Anwend. d. Cauchyschen Residuensatzes.

LOEWY, ALFRED, Versicherungsmathematik. 3:e umgearb. u. verm. Aufl. (Samml. Göschen 180.) — 180 pp. 8. M. 1: —.

Einleit. Zins. Sterblichkeitstafeln. Einmal. Nettoprämien f. d. Versicherung auf das Leben einer Person. Jährl., gleichbleib. Prämienzahlung. Die Praxis. Deckungskapital od. Prämienreserve. Die Bilanz. Versich. auf verbund. Leben. Selektionssterbtaf.

SCHUBERT, HERMANN, Arithmetik und Algebra. 2:e, durchgeseh. Aufl. 7:er Neudr. (Samml. Göschen 47.) — 171 pp. 8. M. 1: —. 1917.

Übergang vom Rechnen zur Arithmetik. Rechnungsarten erst. Stufe. Rechnarten zweit. Stufe. Anwend. d. Rechnungsarten erst. u. zweit. Stufe. Quadratisches. Rechnungsarten dritt. Stufe. Anhang.

Hachette et Cie.

Paris.

Un demi-siècle de Civilisation française. (1870—1915.) Par MM. BAILLAUD, BOUTROUX, CHAILLEY, DOUMIC, GÉRARD etc. etc. — VII + 472 pp. 8. Fr. 10: —. 1916.

L'Astronomie, par B. BAILLAUD. La philosophie, par E. BOUTROUX. L'effort colonial, par J. CHAILLEY. La littérature, par R. DOUMIC. L'oeuvre diplomatique, par A. GÉRARD. L'histoire, par CH.-V. LANGLOIS. L'art, par ROBERT DE LA SIZERANNE. La géologie et la minéralogie, par L. DE LAUNAY. L'éloquence parlamentaire, par GEORGES LECOMTE. Les sciences chimiques, par GEORGES LEMOINE. Finance, commerce, transports, économie politique, par RAPHAËL-GEORGES LÉVY. L'automobile et l'aréonautique, par P. PAINLEVÉ. Les sciences naturelles, par EDMOND PERRIER. Les sciences mathématiques, par EMILE PICARD. La physique, par LUCIEN POINCARÉ. Sciences biologiques et médicales, par CHARLES RICHET. La métallurgie, par EUGÈNE SCHNEIDER. L'assistance, par PAUL STRAUSS. L'agriculture, par A. VIGER. La musique, par CH. WIDOR.

Ulrico Hoepli.

Milano.

Loria, Gino, Guida allo studio della storia delle matematiche. (Manuali Hoepli.) — XVI + 228 pp. 8. L. 3: —. 1916.

Generalità. Il metodo storico. Rassegna d. principali opere s. storia d. matematica. La storia d. matematica nella letteratura periodica. — Ausiliari n. ricerche s. storia d. matematiche: Generalità. I manoscritti. Biografia e bibliografia relat. alle matemat. d. greci e d. latini. Cenni s. bibliogr. relat. alle matemat. d. antichi popoli extra-europei. La biografia e le collezioni biograf. Altre fonti biograf. Le opere complete ed i carteggi scient. La bibliografia ed i cataloghi bibliogr. Recensioni e critiche di scritti matemat. Come utilizzare gli ausiliari preced. descritti. Indice.

Marcolongo, R., Meccanica razionale. Vol. 1: Cinematica. Statica. 2. ed. rived. e ampl. (Manuali Hoepli 352—353 bis.) — XV + 323 pp. 8. L. 4: 50. — 1917.

Operazioni sui vettori. Analisi vettoriale. Velocità ed accelerazione. Analisi d. moto finito di un sist. rigido. Composiz. d. moti finiti. Analisi d. moto instantaneo di un sist. rigido. Moto continuo di un sist. rig. — Composizione d. forze. Il principio d. lavori virtuali. Equilibrio d. curve funicolari.

Pincherle, Salvatore, Algebra complementare. P. 2: Teoria delle equazioni. 3. ed., rived. e corr. con 4 incisioni. (Manuali Hoepli. 145.) — 167 pp. 8. L. 1: 50. — 1916.

Le funzioni razionali. Formula di Taylor. Derivate. I determinanti. Sistemi di equaz. lineari. L'equaz. algebr. Le funzioni simmetr. Radici comuni. Eliminazione. Radici mult. Trasformazioni nelle equaz. Equaz. di terzo e quarto grado. La funz. razion. par valori reali della variabile. Numero d. radici reali comprese fra due numeri dati. Cenno sul calcolo num. d. radici.

Junta para amplición de estudios.

Madrid.

Rey Pastor, J., Fundamentos de la Geometría proyectiva superior. Laboratorio y seminario matemático. Publicaciones, T. 1. (Junta para ampliación de estudios é investigaciones cientificas.) — XXII + 444 pp. 8. Ptas 12: — 1916.

Nociónes s. teoria d. l. grupos de transformaciones. El problema de la geometría. Geometría proyect. elem. y geometrías métricas. — Geometría esférica de Lie. Geom. proyect. sup. Geom. transcend. Equivalencias entre l. div. geometrías. — Origen y carácter d. l. geom. moderna. Construcción axiomática d. l. geom. Independ. y compatibilidad d. l. axiomas gráficos. El espacio proyect. elem. El espacio proyect. abstr. de n dimensiones. Incidencia y dualidad en el espacio E_n. — La red de Möbius. El espacio racion. y el esp. continuo. La continuidad en l. fig. de prim. categoria. Teoría d. l. conjuntos proyect. Curvas y recintos proyect. El teorema funda-

ment. d. l. proyectividad. Grupo proyect. de E_n. Cuádricas de E_n y proyección estereograf. Subgrupo proy. de Cayley. Grupo conf. cuadrát. del plano. — Operaciones con proyectividades. Potencias de una proyectivid. y proyectividades cíclicas. Cálculo de segmentos proyect. Cálculo vectorial proyect. en las figuras de seg. categoría. Torsiones y giros proyect. — El espacio complejo y la proyectividad compl. Represent. reales d. l. fig. complejas de prim. categ. Proyectividad real de fig. compl. Proyectivid. y antiproyectividad compl. — Pares ordin. d. l. correspondencia. Corresp. derivadas. Pares sing. d. l. corresp. — La superficie de Riemann. La proyectivid. compl. sup. Teoría d. l. involución. — Represent. reales d. l. fig. compl. de seg. categoría. Hilos de elementos compl. en l. fig. de seg. categ. Tangentes á l. hilos y membranas. El concepto geometr. de curva analítica.

Pineda y Gutiérrez, Pedro, Representaciones conformes según el método de Bieberbach. Publicaciones del Laboratorio y Seminario matemático. T. 2. (Junta para amplición de estudios é investigaciones científicas.) — 36 pp. 8. Ptas 2: — 1917.

Abenbéder, Compendio de álgebra. Texto árabe, traduccion y estudio por José A. Sánchez Pérez. (Junta para ampliación de estudios é investigaciones científicas. Centro de Estudios históricos.) — XLVIII + 117 + 78 pp. 8. Ptas 6: — 1916.

Dedicat. Prólogo d. trad.: La hist. d. l. matemáticas en España. Alg. datos acerca d. manuscrito. su autor y su época. La edicón. La traducción. Resum. analit. del Algebra de Abenbéder. Erratas. Traducción. Texto árabe.

Louis Lamm.

Berlin.

Ahrens, W., Hebräische Amulette mit magischen Zahlenquadraten. — 19 pp. 8. M. 1: —. 1916.

Gebr. Leemann & Co.

Zürich.

Stutz, Arthur, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 27 pp. 4. 1916.

Masson et Cie.

Paris.

Roubaudi, C., Traité de Géométrie descriptive, à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales et des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale Sup., aux Écoles centrales d. arts et manufactures, des Ponts et Chaussées et des Mines de Paris et de Saint-Étienne. — VI + 552 pp. 8. Fr. 15: —. 1916.

Principes de la géométrie descriptive: Introd. Projection d. lignes droites. Project. d'une fig. plane. Homologie. Méthode d. projections. Représent. d. corps. — Éléments

d. fig.: Le point. La ligne droite. Le plan. — Problèmes descript. Exercices. — Déplacements: Méthode de changement de plan. Méth. de rotation. Méth. de rabbattement. Exercices. — Problèmes métriques: Distances. Angles. Exerc. — Polyèdres: Représent. Sections planes. Intersect. Ombres. — Cônes et cylindres. Sphère. Trièdres: Lignes courbes. Généralités. Cercle. Hélice. Gén. sur les surfaces. Plans tangents aux cônes et aux cyl. Contours apparents. Ombres. Sections planes d. cônes et d. cylindres. Développement. Exerc. Intersection de cônes et de cylindres. La sphère. Quest. relat. au cône dans lesquelles intervient la sphère. Exerc. Résolut. d. trièdres. — Surfaces de révolution: Surf. de révol. en gén. Tore. Quadriques de révolution. Intersections. — Surfaces du sec. ordre. Compléments: Étude descript. d. quadriques. Intersections. Questions où intervient la courbure. Complément s. l. tore. Raccordement d. surf. gauches. Exercices. — Projections cotées. Surf. topographiques. — Sujets d'épures sur l. cinq livres. Sujets de concours.

Felix Meiner.

Leipzig.

Kant, Immanuel, Versuch den Begriff der negativen Grössen in die Weltweisheit einzuführen. (Immanuel Kants Kleinere Schriften zur Logik und Metaphysik. 2. Aufl. Hrsg. von Karl Vorländer. Philosophische Bibliothek, Bd 46.) — XXXII + 169 pp. 8.

Vorw. Einleit. d. Herausg. — Eine neue Beleuchtung d. erst. Prinzipien d. metaphysischen Erkenntnis. 1755. — Die falsche Spitzfindigkeit d. vier syllog. Figuren erwiesen. 1762. — Versuch den Begriff der negativen Grössen in die Weltweisheit einzuführen. 1763. — Untersuchung üb. d. Deutlichkeit d. Grundsätze d. natürl. Theologie u. d. Moral. 1764. Nachricht von d. Einricht. sr. Vorlesungen in d. Winterhalbenjahre v. 1765—66.

Dürrsche Buchhandlung.

Leipzig.

Schmidt, Max C. P., Altphilologische Beiträge. 2. Heft: Terminologische Studien. 2:e verb. Aufl. — 107 pp. 8. 1916.

Hermann Meusser.

Berlin.

Fischer, Max, Statik und Festigkeitslehre. Vollständiger Lehrgang zum Selbststudium für Ingenieure, Techniker und Studierende. Bd 1—2. 3:e Aufl. Bd 1: Grundlagen der Statik u. Berechnung vollwandiger Systeme einschliesslich Eisenbeton. XII + 667 pp. 8. M. 18: — geb. 1912. Bd 2: Berechnung von statisch bestimmten Fachwerkkonstruktionen. XI + 671 pp. 8. M. 18: —.

1. Das Verhalten v. Kräften, die an einem Punkte angreifen. Das Verhalten v. Kräften, die an em. Körper angreifen. Die Auflagerkräfte infolge ständ. Belastung. Die Auflagerkräfte inf. bewegl. Belast. — Die grundleg. Gesetze üb. Spannungen u. Dehnungen. Prakt. Anwend. d. Lehre v. d. Normalfestigkeit. — Die Grundformeln d. Biegungslehre. Die Lage d. Nulllinie bei d. verschied. Querschnittsformen. Schwerpunktsbestimmungen. Best. d. Trägheitsmomentes f. d. verschied. Querschnittsformen. Das Widerstandsmoment. Kraft- u. Momentensummen d. Balkens zwischen zwei Stützen bei ständ. Belast. Kraft- u. Momentensummen d. Trägers zwischen zwei Stützen bei bewegl. Belast. Auflagerdrücke, Querkräfte u. Momente beim überkrag. Balken, beim Frei- u. Gerberschen Träger. Berechn. genieteter Träger. Berechn. v. Durchbiegungen. Der eingespannte Träger u. d. durchlauf. Träger auf mehr. Stützen. Biegung durch exzentr. Zug od. Druck. Die Biegungsspannungen bei unsymmetr. Querschnittsformen u. bei schräger Belast. — Die Knickformeln u. die Berechn. d. Stützen. — Berechn. v. Eisenbetonkonstruktionen auf Druck, Biegung u. Knickung.

2. Berechnungtmethoden f. einf. Dreieckfachwerke. Berechnungsmethoden f. nichteinf. Fachwerke. Allg. Untersuch. üb. Fachwerksyst. Methode d. Einflusslinien. Analyt. Methoden. Die rein graph. Methoden. Besond. Konstrukt. Zusammenfass. u. Aufg. Der Gerbersche Fachwerkträger m. ruhender u. bewegl. Belast. Allg. Untersuch. u. Berechn. f. ständ. Belastung. Der Dreigelenkbogen m. bewegl. Belast. — Das Prinzip d. virtuellen Verrückungen. Geometr. Bewegungslehre (Kinematik). Anwend. d. Prinzips d. virt. Verrückungen gemeins. mit d. geom. Bewegungslehre.

Schlüter, H., Die höhere Mathematik als allgemeinverständliches Rechnungsmittel. Mit 30 Abb. u. zahlr. Beispielen. — 50 pp. 8. 1917.

Erklär. d. Zuwachsbegriffes, Bild. d. Differentialquotienten, Bild. d. Integrals. Best. u. unbest. Integrale. Differentiation od. Integrat. d. alg. Summe von Potenzen. Partielle Different. Höh. Differentialquot. Die einz. Differentiations- u. Integrationsarten. Differentiat., wenn die unabhäng. Veränderliche in mehr. Grundformen, aber nicht zugleich in mehr. Faktoren auftritt. Differentiat. d. Produktes, dessen Faktoren Grundformen d. Veränderl. enthalten. Differentiat. d. Bruches, dessen Zähler u. Nenner Grundformen d. Veränderl. enthalten. Die zeichn. Darstellung von Gleichungen (Funkt.), Differentialquotienten u. Integralausdrücken. Theorie d. Max. u. Minima. Vergl. zwischen Elementarrechn. u. höh. Math. Anwend. d. Integralrechn. zur Bestimm. d. Trägheitsmomente von Flächen u. Stabzügen.

Waltz, Emil, Wechselstrom-Arbeitsdiagramme. Das Rechnen mit umlaufenden Vektoren nach der symbolischen Methode und die Grundzüge der analytischen und graphischen Behandlung technischer Wechselstromkreise, einschliesslich der Diagramme für Transformatoren und Asynchronmotoren. Mit 255 Fig. 3, 31 Taf. — XXXI + 940 pp. 8. M. 22:50 brosch.; M. 24:— geb. 1912.

Die graphische Darstellung vektorieller Grössen. Das Rechnen m. Vektoren. Die Multiplikat. v. Vektoren u. Richtungsgrössen. Vektorprodukte. Einf. techn. Wechselstromkreise. Die Ortsdiagramme einfacher Wechselstromkreise. Magnetisch verkettete

Wechselstromkreise. Die Zustandsdiagramme ruhender Transformatoren. Die Arbeitsdiagramme (Ortsdiagr.) ruhender Transformatoren. 1—3. Die Induktionsmotoren. Energetik allgemeiner Wechselstromkreise.

John Murray.

London.

Report of the eighty-sixth meeting of the *British Association* for the advancement of science. Newcastle-on-Tyne. 1916. — LXIX + 103 pp. 8. 1917.

Gill, David, Man and Astronomer. Memories of Sir David Gill, Astronomer (1879—1907) at the Cape of Good Hope. Collected and arranged by George Forbes. With portraits and illustr. — IX + 418 pp. 8. 12 sh. 1916.

Preface. The growth of a real astronomer: Parentage a. boyhood (1843—60). Choice of a profession (1860—3). In trade (1863—72). Love a. marriage (1865—72). Lord Lindsay (1872). Dun Echt (1872—4). The Mauritius expedition (1874—5). Interregnum — Mars expedition to Ascension (1876—8). Appointment to Cape observatory (1879). Friendships at Capetown (1879). Early work at the Cape observatory (1879—82). Correspondence (1883—4). First visit to England (1884). Correspondence with astronomers (1884—6). Second visit to England (1887). Work with the great heliometer (1887—90). A visit from Miss Agnes Clerke (1887—8). Days of sorrow (1890—6). Patience rewarded (1896—1901). Last days at the Cape (1902—6). — The charm of a real astronomer. The other side of the man (1899—1906). Staff anecdotes. Personal traits and tastes. The personal side of David Gill. Life in London from 1906. Last days after retirement (1907—1914). Lighter correspondence. Papers.

Kenyon, Frederic G., Education, scientific & humane. A report of the proceedings of the council for humanistic studies. — 32 pp. 8. 6 d. 1917.

Thos. P. Nichols & Son Co.

Lynn, Mass., U. S. A.

See, T. J. J., Electrodynamic wave-theory of physical forces. Vol. 1: Bulletins 1 to 6 incl. Announcing the discovery of the physical cause of magnetism, of electrodynamic action and of universal gravitation. . . — XIII + 158 pp. 4. 1917.

Dedicat. Introduct. Bullet. 1: The physical cause of the hitherto unexplained fluctuations in the moon's mean motion. The phys. cause of univers. gravitation. 2: Discovery of the phys. cause of magnetism. 3: Discoveries in cosmical magnetism. 4: Theory of the transmission of phys. forces, based on the propagat. of electrodynamic waves in right lines or in curves conforming to Fermat's law of minimum path a. the

principle of least action. 5: Theory of the fluctuat. of the moon's mean mot. deduced from phenomena: Results expl. by the refract., dispersion a. perhaps absorption of part of the sun's electrodynamic wave energy in propagat. through the earth. 6: Definite confirmation of the discovery of the phys. cause of univers. gravitation.

P. A. Norstedt & Söner.

Stockholm.

WESTIN, O. E., Grafisk räkning med komplexa tal. — 67 pp. 8. 1918. Kr. 2:50.

Inledn. Grundlägg. grafiska räkn. med kpl. tal. Några fundamentalfunktioner. Slutanm.

Casa Editrice Sonzogno.

Milano.

Biblioteca del Popolo. 64 pp. 8. Cent. 24 pro vol.

Elementi di Aritmetica. Elementi di Geometria. Esercizi e Problemi di Geometria. Racc. dai migl. trattati e specialmente dall'Amiot. *Elementi di Algebra. Esercizi d'Algebra. Aritmetica pratica per tutti.*

FERRARIO, LUIGI: Trattato di trigonometria piana. PEVIANI, B.: I logaritmi spiegati al popolo. PEDROTTI, L.: Teorema di Pitagora e sue più importanti applicazioni ad uso degli studenti d. scuole secondarie. PEDROTTI, L.: Elementi di Algebra ad uso d. scuole medie. PEDROTTI, L.: Risoluzione delle equazioni di 1. e 2. grado. PEDROTTI, L.: Elementi di Stereometria. PEDROTTI, L.: Geometria descrittiva. Linee e corpi terminati da superficie curve. PEDROTTI, L.: Introduzione al Calcolo differenziale colla teorica dei massimi e minimi. PEDROTTI, L.: Importanti applicazioni dei logaritmi. Funzioni esponenz. e calcolo d. interessi composti ed annualità. FAVARO, G. A.: Aree e volumi. VISMARA, F.: Le proiezioni ortogonali. VILLA, A.: Teoria del regolo calcolatore e sue applicazioni pratiche. VILLA, A.: Geometria analitica del piano e sue applicazioni. VILLA, A.: Trigonometria sferica e sue applicazioni. LUIGI, G.: Formolario completo di computisteria e ragioneria. 1—2. PINCHERLE, G.: La costruzione geometrica delle ombre. RÙCERI, C.: Curiosità e sofismi matematici. CONTI, E.: L'aritmetica per gli adulti e per le scuole medie. 1—3. UCCELLI, A.: I fondamenti della geometria di posizione. MARINO, A.: Applicazioni algebriche alla geometria piana e solida. CONTI, E.: Iniziamento alla teoria dei numeri. FERROLLI, T.: Geometria non-euclidea. CONTI, E.: Tesi di calcolo letterale.

B. G. Teubner.

Leipzig.

AHRENS, W., Mathematische Spiele. 3:e Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt. 170.) Mit ein. Titelbd. u. 77 Fig. — 114 pp. 8. M. 1:20 geh.; 1:50 geb. 1916.

Einleit. Wettspringen. Das Boss Puzzle oder Fünfzehnerspiel. Solitär- od. Einsiedlerspiel. Dyadische Spiele. Der Baguenaudier od. das Zankeisen. Nim. Der Rösselsprung. Magische Quadrate. Mathemat. Trugschlüsse. Beantwort. d. Fragen.

Brunner, W., Dreht sich die Erde? Mit 19 Fig. (Mathematische Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. 17.) — 53 pp. 8. M. 0: 80. 1915.

Auf- u. Untergang od. tägl. Bewegung d. Gestirne u. ihre Erklärung durch die Erddrehung. Möglichkeit d. mechan. Nachweises d. Erdrotation. Absolute u. relat. Bewegung. Die Erddrehung sichtbar gemacht am freifallenden Körper. Nachweis d. Erddrehung durch Fallversuche m. einer Atwoodschen Fallmaschine. Die Erddrehung sichtbar gemacht am schwingenden Pendel. Nachweis d. Erddrehung am kon. Pendel. Die Erddreh. sichtbar gem. am Kreisel. Einfluss d. Erddreh. auf irgendwelche horizontale Beweg.

Brunswig, Alfred, Das Grundproblem Kants. Eine kritische Untersuchung und Einführung in die Kant-Philosophie. — VI + 170 pp. 8. M. 3: 60 geh.; 4: 20 geb. 1914.

Vorw. — Der log. Aufbau d. Problems im Geiste Kants. Kants Lösung. — Der Lösungswert u. die inneren Schwierigkeiten d. Kantischen Lösung. Kritik d. Problementwickl. Kants. — Prinzipielles zum krit. Idealismus Kants u. d. Neukantianer. — Beiträge z. Lösung d. Problems d. allgemein-notwendigen Urteile: Entwickl. unserer Problemstellung. Ueberblick d. Versuche z. Lösung d. Problems d. allgem.-notwend. Urteile bezw. d. apriorischen Erkenntnis. Vorerwägung z. Lösung d. Problems d. allgem.-notwend. Urteile. Zur Phänomenologie d. Ursprungs allgem.-notwendiger Erkenntnisse. Das »Wesen» als Erkennungsgrund sachlicher Einsichten. Die Erfass. d. spez. Wesens.

Carathéodory, Constantin, Vorlesungen über reelle Funktionen. Mit 47 Fig. — X + 704 pp. 8. 1918. M. 28: — geh.; M. 30: — geb.

Einleit. Ueber Punktmengen. Der Grenzbegriff. Funktionen. Entfernung u. Zusammenhang. Inhalt u. Messbarkeit. Lin. Gebilde. Messbare Funkt. Das bestimmte Integral. Das unbest. Integral u. d. additiven totalstet. Mengenfunktionen. Funkt. einer Veränderlichen. Funkt. v. mehreren Veränderlichen.

Euclidis Opera omnia. Edid. I. L. Heiberg et H. Menge. Vol. VIII: Euclidis phaenomena et scripta musica, edid. Henricus Menge. Fragmenta, collegit et disposuit I. L. Heiberg. Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana. — LIV + 292 pp. 8. M. 6: — geh.; M. 6: 60 geb.. 1916.

Praefatio. Prolegomena. Phaenomena. Appendix. Scholia in phaenomena. Sectio canonis. Introductio harmonica. Fragmenta. Scholia.

Giebel, K., Anfertigung mathematischer Modelle für Schüler mittlerer Klassen. Mit 42 Fig. u. 3 Taf. (Mathematische Bibliothek, hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting. 16.) — 52 pp. 8. M. 0: 80. 1915.

Allgemeines üb. Modelle. — Lot, Setzwage, Böschungswage. Einige geom. Örter. Winkel. Symmetrie in d. Ebene u. im Raume; Drachenviereck. Dreieck. Winkel im Kreise. Sekante, Tangente. Viereck, Parallelenlineal, Eigenschaften d. Diagonalen. Modelle aus d. Arithm. Flächeninhalt geradlin. begrenzter Fig. Ähnlichkeit, Vergrösserungsapparate, Storchschnabel, Höhenmessung. Bezieh. im rechtwinkl. Dreieck. Trigonom. Funktionen, Sinussatz. Logarithmenschieber. Körpermodelle. — Die Stoffe, ihre Beschaffung u. ihre Behandlung.

Gutzmer, A., Zum Jubiläum der Logarithmen. Rede beim Antritt des Rektorats der vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg am 12. Juli 1914 gehalten. — 16 pp. 8. M. 0: 80. 1914.

Körner, K., Die Mathematik im preussischen Lehrerbildungswesen. (Abhandlungen üb. den math. Unterricht in Deutschland veranlasst durch die IMUK, hrsg. von F. Klein. Bd 5, H. 7.) Mit 10 Fig. u. 1 Taf. sowie einem Schlusswort zu Bd 5 von F. Klein und einem Inhaltsverzeichnisse sämtlicher Bände d. Abhandlungen. 133 pp. 8. M. 4: — geh. 1916.

Die mathemat. Ausbild. d. preuss. Volksschullehrers: Die Aufgabe d. preuss. Lehrerbildungsanstalt. Ihre äussere Organisat. Die Lehrer an d. Lehrerbildungsanstalten. Die Schüler d. Lehrerbildungsanst. Aus d. Geschichte d. preuss. Lehrerbildung. Der heutige Lehrplan. Mathemat. Lehrbücher für Lehrerbildungsanst. — eine kritische Betrachtung. Die Lehrerprüfungen. — Die math. Fortbild. d. preuss. Volksschullehrers: Das Mittelschullehrer- und Rektorenexamen. Die wissenschaftl. Kurse zur Ausbild. von Seminarlehrern. — Die Weiterentwicklung des Seminars u. der Lehrerfortbild. mit besond. Rücksicht auf die Mathematik: Die treib. Kräfte im Kampf um Seminar u. Lehrerfortbildung. Reformideen.

Landau, Edmund, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Mit 14 Fig. — VII + 143 pp. 8. 1918. M. 6: —.

Element. Idealtheorie. Analyt. Idealtheorie: Fortsetz. d. Dedekind'schen Zetafunktion. Von d. Wurzeln d. Zetafunkt. im kritischen Streifen. Der Primidealsatz. Verallgemeinerung d. Riemann—von Mangoldt'schen Primzahlformel. Die Anzahl d. Ideale mit Norm x. Histor. Bemerk. Bemerk. zu d. einz. Paragr.

Lietzmann, W., Die Ausbildung der Mathematiklehrer an den höheren Schulen Deutschlands. (Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die Internat. Math. Unterrichtskommission. Erste Folge. XI.) — 27 pp. 8. M. 0: 60. 1915.

Lietzmann, W., Riesen und Zwerge im Zahlenreich. Plaudereien für kleine und grosse Freunde der Rechenkunst. Mit 18 Fig. (Mathematische Bibliothek, hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting. 25.) — 56 pp. 8. M. 0: 80. 1916.

Vom Zählen. Zahlsysteme. Zählmaschinen. Veranschaulichung grosser Zahlen durch Zeit u. Weg. Etwas vom Rechnen mit gross. Zahlen. Die grösste Zahl, die mit

drei Ziffern geschrieben werden kann. Von Primzahlen u. vollkomm. Zahlen. Noch einige Beispiele v. Zahlenriesen. Zahlenzwerge. Veranschaulichung v. Zahlen durch Fläche u. Körper. Warum auch im Lande d. Riesen u. d. Zwerge mit gewöhnl. Zahlen gerechnet wird.

Stäckel, Paul, Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen Technischen Hochschulen. Mit einem Schlusswort zu Bd 4 von P. Stäckel. (Abhandlungen . . . der IMUK, hrsg. von F. Klein, Bd 4, H. 9.) — VII + 198 pp. 8. M. 6:80 geh. 1915.

Entwicklung u. Einrichtungen d. deut. Technischen Hochschulen mit besond. Berücksichtigung d. math. Wissenschaften: Entstehung d. deut. Techn. Hochschulen; Grundlinien ihrer Entwickl. im 19. Jahrhundert. Allgem. üb. die gegenwärt. Organisat. d. deut. Techn. Hochschulen. Allgem. üb. die Entwickl. d. math. Unterrichts an d. deut. Techn. Hochschulen: Abstraktformaler Betrieb; antimathematische Bewegung; weitere Schwierigkeiten; Ansätze zu einer besond. Hochschulmathematik. — Einzelfragen d. math. Unterrichts an d. deut. Techn. Hochschulen: Die Vorbildung d. Studierenden. Die math. Ausbild. d. Architekten u. d. Chemiker. Die math. Ausbild. d. Ingenieure. Die Lehrbücher. Die Prüfungen. Die Lehrkörper. Anstalten, die zwischen d. mittl. techn. Fachschulen u. d. Techn. Hochschulen stehen.

Stein, Alfred, Die Lehre von der Energie. Mit 13 Fig. 2:e Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt. 257.) — 130 pp. 8. M. 1:20 geh.; 1:50 geb. 1914.

Einleit. Der Energiebegriff. Mechanische Energie. Wärmeenergie. Chemische Energie. Elektrische u. magnet. Energie. — Die Sonne als Energiezentrum. Das Perpetuum mobile. Die Bewegung d. Energie. Schlussbetracht.

Umlauf, K., Der mathematische Unterricht an den Seminaren und Volksschulen der Hansestädte. (Abhandlungen üb. d. math. Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die IMUK, hrsg. von F. Klein, Bd 5, H. 5.) — 162 pp. 8. M. 4:80 geh. 1915.

Vorw. Einleit. Geschichtliches. Die allgem. Organisat. d. Unterrichtswesens in den Hansestädten Hamburg, Bremen, Lübeck. Der Unterricht in Rechnen, Algebra, Geometrie u. mathematischer Geographie an d. Volksschulen d. Hansestädte. Der Unterricht in Rechnen, Mathematik u. math. Geographie an d. Lehrer- u. Lehrerinnenbildungsanstalten d. Hansestädte. Vergleichende Zusammenfassung. — Die Laufbahn u. die Fortbild. d. Volksschullehrer in d. Hansestädten. Die Ausbild. d. Seminarlehrer. Statistische Tafeln.

Weinstein, M. B., Der Untergang der Welt und der Erde in Sage und Wissenschaft. (Aus Natur u. Geisteswelt. 470.) — V + 107 pp. 8. M. 1:20 geh.; 1:50 geb. 1914.

Vorw. Vorbemerk., Einteilung d. Anschauungen. Verneinende Anschauungen. — Weltuntergang in Sage u. Mythe: Weltzeitalter u. Weltperioden. Sintflutsagen. Welt-

zerstörungen. Das jüngste Gericht. Eschatologie. Ekpyrosis u. Weltwandlung. — In der Wissenschaft: Inhalt d. Welt u. Art d. Unterganges. Ob die Welt endlich ist. Astronomische u. geolog. Katastrophen. Auflös. u. Weiterbild. d. Welten nach Kant. Der Stoff u. seine Auflösungsmöglichkeit. Die Kräfte. Die Energie u. Strahlungen. Die Vorgänge, das eigentl. Vergängliche. Die Zustände, Streben nach Beständigkeit. Der entropische Tod d. Welt. Wie verhält es sich mit dem Leben?

WITTING, A., Soldaten-Mathematik. Mit 37 Fig. (Mathematische Bibl. 22.) — 61 pp. 8. M. 0: 80. 1916.

Einleit. Einfachste Zahlenbeziehungen. Das Schätzen v. Entfernungen. Das feldmäss. Messen d. Entfernungen. Allgem. üb. innere u. äussere Ballistik. Der Luftwiderstrand. Die Entwickl. d. Infanterieschusswaffen. Die Bewegung d. Geschosses als Funkt. d. Zeit. Die ballistische Kurve. Das Zielen u. das Treffen.

Nicola Zanichelli.

Bologna.

ENRIQUES, FEDERICO, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, pubbl. per OSCAR CHISINI. Vol. 2. — 711 pp. 8. 1918. Lire 25: —.

3. La teoria element. delle curve piane basata sulla polarità: Polarità e curve covarianti. Il probl. d. intersezioni e i caratteri plueckeriani d. curve. La cubica piana. Realtà e continuità. Geometria numerativa. — 4. Le singolarità d. curve algebriche: Le singolarità e gli sviluppi in serie di Puiseux. Le singolarità rispetto alle trasformazioni quadrat. Le singolarità risp. al calcolo differenziale. Singolarità d. curve gobbe e d. superficie.

PINCHERLE, SALVATORE, Lezioni di Calcolo infinitesimale. Dettate nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti. — XV+774 pp. 8. Lire 25: —. 1916.

Pref. Indice. Introduz.: I numeri e le operazioni. Gli aggregati lin. I limiti. Gli aggregati nel piano e nello spazio. Le serie. Esercizi. — Calcolo differenz.: Le funzioni di una variabile in senso gen. Le funz. element. Derivate e differenziali per le funz. di una variab. Ulter. proprietà d. funz. derivabili di una variab. Sviluppo di Taylor per le funz. di una variab. e sue applicaz. Funzioni di più variab. Funz. implicite. Sviluppo di Taylor per le funz. di più var. e sue applicaz. — Calcolo integrale: L'integraz. definita. Calcolo d. integrali. Integrali generalizzati. Integraz. d. funz. di forma analit. semplice. L'integraz. nei campi a due dimens. L'integraz. multipla. — Applicaz. geometr. del calcolo infinitesimale: Le curve piane. Quadratura e rettificaz. d. curve piane. Le curve sghembe. Le superficie. Volumi. Area d. superf. curve. — Equazione differenziali: Generalità. I teor. d'esistenza per l'equaz. d. primo ord. Le equaz. d. primo ord. Cenno s. equazioni di ord. sup. Equaz. lineari. Cenni s. equaz. alle derivate parz. Esercizi. Nota A, B.

K. L. Beckmans Boktryckeri.

Stockholm 1917.

Stoltz, Gustaf, Utjämning av sjutton svenska livförsäkringsbolags dödlighetstabeller för läkareundersökta livförsäkrade. Verkst. på uppgrag av Kgl. Försäkringsinspektionen. V + 210 pp. 8. 1917.

Des recherches prélimin. Ajustement de la mortalité, toutes observat. réunies, hommes, en appliq. la formule de Makeham pour tous les ages, pour les ages depuis 30 ans. Ajustement de la mortalité, assurances pour la vie entière, hommes, en appliq. la formule de Makeham, pour les ages depuis 30 ans. Ajust. de la mortalité, assurances mixtes, hommes, en appliq. la form. de Makeham p. l. ages dep. 30 ans. Ajust. de la mortalité, assurances p. l. vie ent., hommes, en appliq. la form. de Makeham pour t. l. ages. Calcul des $l_{[x]+t}$. Déduction d. tables de commution. — Tablaux.

Tipografìa de G. Casañal.

Zaragoza.

Galdeano, Z. G., de, Las construcciones matemáticas adaptadas al complemento de análisis infinitesimal. (Facultad de ciencias de Zaragoza. Curso de 1916 a 1917.) — 76 pp. 8. 1916. 2 Peset.

——, Nociones de crítica matemática, publ. en la Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Fis.-quim. y Nat. de Zaragoza. (Curso de extension universitaria. 1916—17.) — 76 pp. 8. 1916. 2 Peset.

——, Correlaciones matemático-físico-químicas. Lecciones expl. en l. cursos especiales y de ampliación organiz. por la Junta d. l. Facultad de Ciencias de Zaragoza 1915—16. — 88 pp. 8. 1916. 2 Peset.

——, La Ciencia, la Universidad y la Academia. Discurso, leído por su presidente, en la sesión inaug. 28 Mayo 1916. (Academia de Ciencias exactas, fís.-quím. y nat. de Zaragoza.) — 32 pp. 8. 1916.

Ingenieur G. Morávek.

Prag. (Selbstverlag.)

Morávek, G., Allgemeine Beweise der Gültigkeit les letzten Fermat'schen Satzes über die unbestimmte Gleichung $z^n = x^n + y^n$. Mit Ergänzungen. — 2 pp. 8. 1917.

——, Allgemeine Beweise der Gültigkeit des letzten Fermat'schen Satzes. . . 1 p. 8. 1918.

Washington Government Printing Office.

United States Life Tables 1910. Prep. under the supervision of Prof. James W. Glover of the Univ. of Michigan. (Departement of commerce. Bureau of the Census. Sam. L. Rogers.) — 65 pp. 4. 75 cts. 1916.

Circular of Information concerning Census publications 1790—1916. (Department of commerce. Bureau of the Census. Sam. L. Rogers.) — 124 pp. 8. 1917.

Introd. Descriptive list of publicat. classified accord. to subject: Population. Occupations. Dependent, defective, a. delinquent classes. Vital statistics. Mariage a. divorce. Religious bodies. Agricult. Manufact. Mines a. quarries. Wealth, debt a. taxation. Statistics of states a. cities. Electr. industries. Transportation. Fisheries. Federal employees. Cotton a. cottonseed. Tobacco. Forest prod. Wage earners a. wages. Real-estate mortgages. Insurance. Indians. Negroes. Alaska. The Philippines. Cuba. The Census Bureau. Miscell. Chronolog. list of publicat. Appendix.

SUR LA RÉGULARISATION DU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

PAR

T. LEVI-CIVITA

à Padoue.

Les équations différentielles du problème des trois corps, dans une quelconque de leurs formes classiques, se comportent régulièrement tant que les positions des trois corps sont distinctes, mais présentent des singularités s'il arrive que la limite inférieure des distances mutuelles soit zéro (chocs). L'analyse de ce qui se passe au voisinage d'un choc a été dans ces dernières années l'objet de maintes recherches visant d'abord (Painlevé,[1] Levi-Civita,[2] Bisconcini,[3] Sundman[4]) à caractériser les conditions qui doivent être remplies par les données initiales pour que deux des trois corps, ou tous les trois, se choquent au bout d'un temps fini.

Ces premiers succès ont conduit à penser que les singularités analytiques correspondant au phénomène d'un choc ne soient pas si redoutables qu'on aurait pu le craindre. C'est ainsi qu'en 1906, en remaniant, d'après une aimable invitation de M. Mittag-Leffler, mon étude citée tout à l'heure sur le cas particulier du problème restreint, je suis parvenu à faire disparaître toute singularité par un changement tout à fait élémentaire de paramètres, et cela sans altérer la forme canonique des équations.[5]

[1] »Leçons etc., professées à Stockholm» (Paris: Hermann, 1897), pp. 582—586.

[2] »Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi», Annali di Matematica, Ser. III, T. IX, 1903, pp. 1—32.

[3] »Sur le problème des trois corps», ces Acta, T. 30, 1906, pp. 49—92.

[4] »Recherches sur le problème des trois corps», Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. XXXIV, nº 6 (Helsingfors, 1907).

[5] Dans ce journal, T. 30, pp. 305—327. Il convient d'avertir que, dès 1895, N. Thiele, dans ses »Recherches numériques concernant les solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps» [Astronomische Nachrichten, B. CXXXVIII, pp. 1—10] avait indiqué une transformation régularisante du problème restreint, moins simple que la mienne, mais embrassant à la fois les deux masses finies. Il s'en est servi heureusement dans ses calculs, sans en faire toutefois ressortir, même en passant, l'intérêt spéculatif.

M. SUNDMAN[1] a découvert ensuite une régularisation du problème général, d'où la conclusion, mémorable au point de vue de l'analyse, que toute solution (quelles que soient les circonstances initiales) peut être représentée par des développements toujours convergents. Cependant la dite régularisation est atteinte d'une manière indirecte, par l'introduction d'un nombre assez grand d'auxiliaires et en sortant du cadre des équations de la dynamique: circonstance assez gênante, puisqu'il n'est plus permis (du moins sans discussion préalable) d'appliquer au système régularisé ni les résultats théoriques, ni les méthodes de calcul de la mécanique analytique.

Pour le problème plan il m'a été aisé de réaliser[2] une véritable régularisation dynamique, en généralisant (avec traitement symétrique des trois corps) la transformation (ponctuelle)

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2 \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

employée pour le problème restreint.

Le problème dans l'espace a longtemps résisté à mes efforts, tant que j'essayais de l'aborder par des semblables changements de coordonnées. Les transformations canoniques usuelles se rattachant au mouvement elliptique ne régularisent pas non plus. Mais on peut en trouver d'analogues, une notamment bien simple, suggérée par le mouvement parabolique,[3] rendant tout holomorphe au voisinage d'un choc binaire.[4]

L'éminent Directeur des Acta a bien voulu me demander un exposé détaillé de ce dernier résultat. Voilà l'origine et le but du présent article. Pour en faciliter la lecture, j'y ai repris tout ce qu'il faut connaître des travaux antérieurs.

On trouvera, dans un premier chapitre, soit des prémisses formelles, pour la plus part classiques, un petit peu rajeunies par un usage (d'ailleurs très discret) des notations vectorielles; soit quelques lemmes, dus à M. M. PAINLEVÉ et SUNDMAN, qui précisent au sens de l'analyse les circonstances essentielles des chocs, et permettent d'exclure l'eventualité d'une collision générale dès que le moment résultant des quantités de mouvement ne s'annule pas.[5]

Le second chapitre débute par l'intégration, moyennant la méthode de JACOBI, des équations du mouvement parabolique (d'un point soumis à l'attrac-

[1] »Mémoire sur le problème des trois corps», ces Acta, T. 36, 1912, pp. 105—179.

[2] Rendiconti dei Lincei, vol. XXIV (2e semestre 1915), pp. 61—75, 235—248, 421—433, 485—501, 553—569.

[3] Ibidem, vol. XXV (premier semestre 1916), pp. 445—458.

[4] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 162, 1916, pp. 625—629.

[5] Cette exclusion fut connue par WEIERSTRASS, ainsi qu'il résulte d'une lettre adressée à M. MITTAG-LEFFLER et publiée dans ce même recueil (voir »Zur Biographie von Weierstrass», T. 35, 1911, p. 30).

tion d'un centre fixe, dans le cas particulier où s'annule la constante des forces vives). On en tire une transformation canonique (apte à régulariser le voisinage d'un choc dans le problème des deux corps), et on fait l'étude de ses élégantes propriétés géométriques et cinématiques. La considération du mouvement parabolique fournit en outre l'occasion pour construire une seconde transformation canonique, qui à la vérité n'a rien à faire avec notre régularisation; mais ne doit pas être négligée, puisqu'elle introduit un *système canonique d'éléments paraboliques*, pouvant rendre de très bons services pour la détermination des perturbations d'une comète.

Après avoir préparé de la sorte tous les éléments nécessaires, j'explicite, dans le troisième (et dernier) chapitre, la régularisation canonique du problème des trois corps au voisinage d'un choc binaire, dont sont des corollaires immédiats: la continuation analytique du mouvement au délà des chocs éventuels, à laquelle se rattache l'heureuse explication mécanique de M. ARMELLINI[1]; la représentabilité, sans aucune restriction, des coordonnées cartésiennes des trois corps par des séries convergentes pour toutes les valeurs réelles d'un paramètre convenable τ; enfin la *possibilité* d'introduire, dans le système différentiel canonique qui définit le mouvement, à côté de la variable indépendante τ, des fonctions inconnues telles que le système, tout en restant canonique, se comporte régulièrement (non seulement au voisinage d'un choc préfix, mais) toujours, c'est-à-dire pour tout état de mouvement qui puisse être effectivement rejoint à partir d'un état initial quelconque. Il resterait à indiquer un choix approprié de ces paramètres: question inessentielle, je voudrais presque dire de vernissage formel, mais que je me permets quand même de signaler au lecteur. Pour ceux qui aiment les calculs élégants et les analogies mécaniques, la matière ne paraît pas sans attraits; du moins à en juger d'après le cas particulier du problème plan, où la dite spécification donne lieu [citation 2 de la page 100] à des rapprochements inattendus avec d'autres systèmes dynamiques exemptes de singularités dans le champ réel (tel notamment un solide pesant fixé par un de ses points).

En revenant à la simple régularisation locale du voisinage d'un choc qui va être développée ici, il y'a lieu d'ajouter qu'elle prêterait à reprendre, par des calculs peut-être plus commodes et plus symétriques, la détermination effective des deux relations invariantes caractéristiques d'un choc, déjà traitée par M. BISCONCINI [citation 3 de la page 99]. On pourrait s'en attendre un avantage analogue à celui que j'ai mis en évidence pour le problème restreint [citation 2 de la même page].

[1] »Estensione della soluzione del SUNDMAN dal caso di corpi ideali al caso di sferette elastiche omogenee», Rendiconti dei Lincei, vol. XXIV (premier semestre 1915), pp. 185—190.

En terminant, je voudrais souligner l'importance de la régularisation aussi à un point de vue plus général. Il me suffit pour cela de faire remarquer que la régularisation préalable d'un système différentiel est indispensable pour pénétrer intimement dans l'allure générale des solutions et dans la distribution des solutions périodiques. Justement dans cette voie, ouverte par POINCARÉ, semblent devoir maintenant s'engager de préférence les efforts des géomètres.[1]

CHAPITRE I.

Relations formelles — Quelques résultats dus à M. M. Painlevé et Sundman.

1. Préliminaires.

Soient $P_\nu (\nu = 0, 1, 2)$ trois points matériels; m_ν leurs masses; G leur centre de gravité.

Introduisons les trois vecteurs[2]

(1) $$\boldsymbol{R}_\nu = P_\nu - G \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

et leurs différences

$$\boldsymbol{r}_0 = P_2 - P_1 = \boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1, \ \boldsymbol{r}_1 = P_0 - P_2 = \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{R}_2, \ \boldsymbol{r}_2 = P_1 - P_0 = \boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_0$$

correspondant aux trois côtés du triangle $P_0 P_1 P_2$.

En regardant équivalents les indices ν (tels que 0 et 3, 1 et 4), qui diffèrent entre eux d'un multiple de 3, on peut évidemment condenser la définition des $\boldsymbol{r}_\nu$ dans la formule cyclique

(2) $$\boldsymbol{r}_\nu = P_{\nu+2} - P_{\nu+1} = \boldsymbol{R}_{\nu+2} - \boldsymbol{R}_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

En additionant on a l'identité (géométriquement évidente)

(3) $$\sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{r}_\nu = 0.$$

[1] Tout récemment des résultats extrêmement remarquables ont été obtenus par M. BIRKHOFF dans ses beaux mémoires:

»The restricted problem of the three bodies», Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXXIX, 1915, pp. 265—334;

»Dynamical systems with two degrees of freedom», Transactions of the American Mathematical Society, vol. XVIII, 1917, pp. 199—300.

[2] Pour abréger l'écriture, je vais avoir recours aux tout premiers éléments du calcul vectoriel en suivant les notations de M. M. BURALI-FORTI et MARCOLONGO. Voir leurs »Eléments de calcul vectoriel» (édition française par S. Lattès, Paris: Hermann, 1910)

Il convient d'ajouter qu'aussi les vecteurs $\boldsymbol{R}_\nu$ sont liés par une relation linéaire. C'est

$$(4) \qquad \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{R}_\nu = 0,$$

exprimant que G est le centre de gravité des trois point matériels P_ν.

En faisant système des (2) et (4), on peut inversement exprimer les $\boldsymbol{R}_\nu$ à l'aide des $\boldsymbol{r}_\nu$. Partons pour cela de (4), en l'écrivant

$$m_\nu \boldsymbol{R}_\nu + m_{\nu+1} \boldsymbol{R}_{\nu+1} + m_{\nu+2} \boldsymbol{R}_{\nu+2} = 0,$$

et lui attribuant ensuite la forme équivalente:

$$M \boldsymbol{R}_\nu + m_{\nu+1} (\boldsymbol{R}_{\nu+1} - \boldsymbol{R}_\nu) + m_{\nu+2} (\boldsymbol{R}_{\nu+2} - \boldsymbol{R}_\nu) = 0,$$

où

$$(5) \qquad M = m_0 + m_1 + m_2$$

désigne la masse totale du système. D'après les formules (2) elles-mêmes, on en tire la résolution annoncée

$$(6) \qquad M \boldsymbol{R}_\nu = m_{\nu+2} \boldsymbol{r}_{\nu+1} - m_{\nu+1} \boldsymbol{r}_{\nu+2} \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

Il nous sera commode de poser

$$|\boldsymbol{R}_\nu| = R_\nu, \ |\boldsymbol{r}_\nu| = r_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2),$$

c'est-à-dire d'indiquer par R_ν la distance $\overline{G P_\nu}$, par r_ν la distance $P_{\nu+1} P_{\nu+2}$.

2. Formules de Lagrange.

Soit P un point quelconque de l'espace,

$$G - P = \boldsymbol{d}$$

le vecteur allant de P au barycentre G.

On a évidemment

$$P_\nu - P = (P_\nu - G) + (G - P) = \boldsymbol{R}_\nu + \boldsymbol{d}.$$

Formons le moment d'inertie (polaire) du système des trois points P_ν, par rapport à P. C'est par définition

$$(7) \qquad J_P = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \overline{P P_\nu}^2 = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu (P_\nu - P) \times (P_\nu - P) = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu (\boldsymbol{R}_\nu + \boldsymbol{d}) \times (\boldsymbol{R}_\nu + \boldsymbol{d})$$

(où $\times$ est le symbole de produit scalaire), se réduisant à

$$J = \sum_0^2 {}_\nu m_\nu R_\nu^2$$

lorsqu'on fait coïncider P avec le centre de gravité G.

Développons le produit scalaire dans la dernière expression de J_P, en tenant compte de (4), (5), et en désignant par d la distance $\overline{PG}$. Il vient immédiatement

$$J_P = J + M d^2,$$

formule bien connue de LAGRANGE, valable en général pour un nombre quelconque de points matériels. En faisant coïncider P avec P_ν, elle donne en particulier

$$m_{\nu+1} r_{\nu+2}^2 + m_{\nu+2} r_{\nu+1}^2 = J + M R_\nu^2.$$

Multiplions par $\frac{m_\nu}{M}$ et additionnons par rapport à ν (c'est-à-dire à trois valeurs consécutives de ν) en écrivant

(8) $$m_\nu^* = \frac{m_{\nu+1} m_{\nu+2}}{M} \quad (\nu = 0, 1, 2)$$

On obtient la relation remarquable

(9) $$J = \sum_0^2 {}_\nu m_\nu R_\nu^2 = \sum_0^2 {}_\nu m_\nu^* r_\nu^2,$$

due également à LAGRANGE.

3. Expression de la force vive signalée par R. Ball.[1]

Considérons un mouvement quelconque des trois points P_ν, rapporté au centre de gravité G, c'est-à-dire à trois axes rectangulaires de direction invariable ayant l'origine en G. Les vecteurs $\boldsymbol{R}_\nu$ sont fonctions du temps t, et la vitesse de P_ν par rapport à G n'est autre que

(10) $$\boldsymbol{V}_\nu = \dot{\boldsymbol{R}}_\nu,$$

en désignant avec un point superposé la dérivation par rapport à t.

La force vive du système (le repère étant toujours en G) est par définition

[1] Voyez par ex. E. J. ROUTH, »Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies (elementary part)« [sixième édition, London: Macmillan, 1897], § 424.

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu m_\nu V_\nu^2,$$

V_ν représentant la longueur du vecteur $\boldsymbol{V}_\nu$ (vitesse en valeur absolue).

Introduisons d'autre part les mouvements relatifs de nos points, et precisément (pour $\nu = 0, 1, 2$) de $P_{\nu+2}$ par rapport à $P_{\nu+1}$.

La vitesse relative correspondante, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{V}_{\nu+2} - \boldsymbol{V}_{\nu+1} \tag{11}$$

ne diffère pas de $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ d'après (2): sa longueur sera désignée par v_ν.

Ceci posé, on remarque:

1⁰ que les vecteurs $\boldsymbol{V}_\nu = \dot{\boldsymbol{R}}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ sont liés par les mêmes relations linéaires — (2) et (4) notamment — existant entre les vecteurs $\boldsymbol{R}_\nu$, $\boldsymbol{r}_\nu$;

2⁰ que, si dans la formule (7) du nº préc. définissant J_P, on remplace $\boldsymbol{R}_\nu$ et $\boldsymbol{d}$ par leurs dérivées $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu = \boldsymbol{V}_\nu$ et $\dot{\boldsymbol{d}}$, en désignant le premier membre par $2\,\mathfrak{T}_P$, on obtient

$$2\,\mathfrak{T}_P = \sum_0^2{}_\nu m_\nu (\boldsymbol{V}_\nu + \dot{\boldsymbol{d}}) \times (\boldsymbol{V}_\nu + \dot{\boldsymbol{d}}),$$

d'où en particulier, pour P coïncidant avec G (ce qui entraîne $\boldsymbol{d} = 0$),

$$2\,\mathfrak{T}_G = \sum_0^2{}_\nu m_\nu V_\nu^2 = 2\,\mathfrak{T}.$$

Il s'en suit que, moyennant les mêmes passages formels conduisant de (7) à (9), on a

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu m_\nu V_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu m_\nu^* v_\nu^2. \tag{12}$$

4. Autre expression de la force vive (remontant à Jacobi).

Il nous sera parfois avantageux dans la suite d'avoir recours à une forme mixte de $\mathfrak{T}$, où interviennent une seule des vitesses relatives, soit la vitesse v_ν du corps $P_{\nu+2}$ par rapport à $P_{\nu+1}$, et la vitesse absolue V_ν du troisième corps P_ν.

Pour y parvenir, il suffit de remplacer, dans la définition directe de $\mathfrak{T}$ (valable quel que soit ν),

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\{m_\nu V_\nu^2 + m_{\nu+1} V_{\nu+1}^2 + m_{\nu+2} V_{\nu+2}^2\},$$

$\boldsymbol{V}_{\nu+1}$ et $\boldsymbol{V}_{\nu+2}$ en fonction de $\boldsymbol{v}_\nu$ et $\boldsymbol{V}_\nu$. C'est bien aisé, puisque ces quatre vecteurs sont liés par deux relations. L'une d'elles n'est que (11), c'est-à-dire

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{V}_{\nu+2} - \boldsymbol{V}_{\nu+1};$$

l'autre, se déduisant de (4) par dérivation, exprime la circonstance évidente que la vitesse du barycentre (par rapport à des axes ayant l'origine dans le barycentre lui-même) s'annule; et s'écrit

$$m_\nu \boldsymbol{V}_\nu + m_{\nu+1} \boldsymbol{V}_{\nu+1} + m_{\nu+2} \boldsymbol{V}_{\nu+2} = 0.$$

Il s'en suit

$$(13) \qquad \begin{cases} (m_{\nu+1} + m_{\nu+2}) \boldsymbol{V}_{\nu+1} = -m_{\nu+2} \boldsymbol{v}_\nu - m_\nu \boldsymbol{V}_\nu, \\ (m_{\nu+1} + m_{\nu+2}) \boldsymbol{V}_{\nu+2} = m_{\nu+1} \boldsymbol{v}_\nu - m_\nu \boldsymbol{V}_\nu, \end{cases}$$

d'où, par substitution matérielle dans $V_{\nu+1}^2 = \boldsymbol{V}_{\nu+1} \times \boldsymbol{V}_{\nu+1}$ et $V_{\nu+2}^2 = \boldsymbol{V}_{\nu+2} \times \boldsymbol{V}_{\nu+2}$,

$$m_{\nu+1} V_{\nu+1}^2 + m_{\nu+2} V_{\nu+2}^2 = \frac{1}{m_{\nu+1} + m_{\nu+2}} (m_{\nu+1} m_{\nu+2} v_\nu^2 + m_\nu^2 V_\nu^2),$$

et par conséquent (en introduisant ceci dans l'expression de $\mathfrak{T}$ et en associant les deux termes semblables en V_ν^2)

$$(14) \qquad \mathfrak{T} = \frac{1}{2(m_{\nu+1} + m_{\nu+2})} (m_{\nu+1} m_{\nu+2} v_\nu^2 + M m_\nu V_\nu^2).$$

C'est substantiellement la forme attribuée à la force vive par Jacobi (dans sa réduction du problème des trois corps) et devenue ensuite classique.[1] Il y a seulement une différence inessentielle consistant dans ceci: au lieu que la dérivée $\boldsymbol{V}_\nu$ de $\boldsymbol{R}_\nu = P_\nu - G$ (G barycentre des trois points), on fait apparaître ordinairement la dérivée du vecteur proportionnel $\frac{M}{m_{\nu+1} + m_{\nu+2}} \boldsymbol{R}_\nu$ admettant également une interprétation géométrique très simple. En effet, si l'on indique par G_ν le centre de gravité du couple $P_{\nu+1}$, $P_{\nu+2}$, on a évidemment

$$\frac{M}{m_{\nu+1} + m_{\nu+2}} \boldsymbol{R}_\nu = P_\nu - G_\nu.$$

[1] Voir par exemple Charlier, »Die Mechanik des Himmels», B. I. [Leipzig: Veit, 1902], pp. 237—241; ou bien Poincaré, »Leçons de mécanique céleste», T. I. [Paris: Gauthier-Villars, 1905], pp. 34—41.

5. Moment résultant des quantités de mouvement.

Comme la résultante des quantités de mouvement (rapportées au barycentre)

$$\sum_0^2{}^{\nu}\, m_\nu \boldsymbol{V}_\nu = \sum_0^2{}^{\nu}\, m_\nu \dot{\boldsymbol{R}}_\nu$$

est nulle d'après (4), le moment résultant $\boldsymbol{K}$ est indépendant du centre de réduction. En le prenant en G, on a par définition

$$(15)\qquad \boldsymbol{K} = \sum_0^2{}^{\nu}\, \boldsymbol{R}_\nu \wedge m_\nu \boldsymbol{V}_\nu$$

($\wedge$ symbole de produit vectoriel).

Remplaçons $\boldsymbol{R}_\nu$ par sa valeur (6), et développons le produit vectoriel en affectant le facteur $\boldsymbol{V}_\nu$ de tous les coefficients numériques. Le second membre, eu égard à (8), devient

$$\sum_0^2{}^{\nu}\, \boldsymbol{r}_{\nu+1} \wedge m_{\nu+1}^* \boldsymbol{V}_\nu - \sum_0^2{}^{\nu}\, \boldsymbol{r}_{\nu+2} \wedge m_{\nu+2}^* \boldsymbol{V}_\nu,$$

ou bien, pourvu qu'on change, dans la première somme, ν en $\nu+2$, dans la seconde, ν en $\nu+1$,

$$\sum_0^2{}^{\nu}\, \boldsymbol{r}_\nu \wedge m_\nu^* (\boldsymbol{V}_{\nu+2} - \boldsymbol{V}_{\nu+1}).$$

Il en résulte, d'après (11),

$$(16)\qquad \boldsymbol{K} = \sum_0^2{}^{\nu}\, \boldsymbol{r}_\nu \wedge m_\nu^* \boldsymbol{v}_\nu,$$

qui exprime le moment $\boldsymbol{K}$ sous forme relative symétrique, tout à fait analogue à la forme usuelle (15).

Nous allons en tirer une limitation remarquable pour le produit $J\mathfrak{T}$.

Observons d'abord:

1° que la longueur du produit vectoriel $\boldsymbol{r}_\nu \wedge m_\nu^* \boldsymbol{v}_\nu$ ne dépasse pas le produit (arithmétique) $m_\nu^* r_\nu v_\nu$ des longueurs des facteurs;

2° que la longueur K du vecteur $\boldsymbol{K}$ ne dépasse pas la somme des longueurs de ses termes, d'où

$$\sum_0^2{}^{\nu}\, m_\nu^* r_\nu v_\nu > K.$$

D'ailleurs l'identité bien connue, consistant à égaler le carré de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \sqrt{m_0^*}\, r_0 & \sqrt{m_1^*}\, r_1 & \sqrt{m_2^*}\, r_2 \\ \sqrt{m_0^*}\, v_0 & \sqrt{m_1^*}\, v_1 & \sqrt{m_2^*}\, v_2 \end{Vmatrix}$$

au déterminant

$$\begin{vmatrix} J & \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^* r_\nu v_\nu \\ \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^* r_\nu v_\nu & 2\,\mathfrak{T} \end{vmatrix},$$

qui s'obtient [en tenant compte de (9) et (12)] par la multiplication des horizontales, nous assure que ce déterminant est ≥ 0. On en tire

$$2\, J\, \mathfrak{T} \geq \left(\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^* r_\nu v_\nu \right)^2,$$

d'où l'inégalité

(17) $$2\, J\, \mathfrak{T} \geq K^2,$$

qui va nous servir essentiellement au n° 11.

6. Fonction des forces dans le problème des trois corps. — Équations vectorielles du mouvement. — Intégrales classiques.

Supposons que nos trois points matériels — on dira *corps* suivant l'usage — s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton. Soit f la constante de gravitation universelle. Avec les notations précédentes la fonction des forces s'écrit

(18) $$\mathfrak{U} = f\left(\frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_2 m_0}{r_1} + \frac{m_0 m_1}{r_2} \right),$$

ou, si l'on veut,

(18') $$\mathfrak{U} = f\left(\frac{m_{\nu+1} m_{\nu+2}}{r_\nu} + \frac{m_{\nu+2} m_\nu}{r_{\nu+1}} + \frac{m_\nu m_{\nu+1}}{r_{\nu+2}} \right),$$

valable quelle que soit la valeur de l'indice ν; ou encore, d'après (8),

(18'') $$\mathfrak{U} = f M \sum_0^2{}_\nu \frac{m_\nu^*}{r_\nu}.$$

On représente par

$$\operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$$

le vecteur qui a pour composantes les dérivées partielles de $\mathfrak{U}$ par rapport aux coordonnées de P_ν; ou si l'on veut (sous forme indépendante du système de référence) le vecteur tel que, pour tout déplacement infiniment petit $d P_\nu$, on ait

$\operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} \times d P_\nu =$ différentielle partielle de $\mathfrak{U}$ (se rapportant à la variation du point P_ν).

Quelle que soit la définition préférée, $\operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$ représente la force sollicitant P_ν, et l'on a

$$\sum_0^2{}_\nu \operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} \times d P_\nu = d\mathfrak{U},$$

$d\mathfrak{U}$ étant la différentielle totale.

L'expression explicite de $\operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$ se déduit immédiatement des (18′) et (2). Elle est

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} = f m_\nu \left(\frac{m_{\nu+1}}{r_{\nu+2}^3} \mathbf{r}_{\nu+2} - \frac{m_{\nu+2}}{r_{\nu+1}^3} \mathbf{r}_{\nu+1} \right).$$

Comme le système des trois corps n'est soumis à aucune force extérieure, le mouvement (absolu, au sens mécanique du mot) du barycentre G est rectiligne et uniforme, et les choses se passent au point de vue dynamique comme si G était fixe.

On a en conformité les équations vectorielles du mouvement

$$\text{(20)} \qquad m_\nu \boldsymbol{V}_\nu = m_\nu \ddot{\boldsymbol{R}}_\nu = \operatorname{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} \qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

Les intégrales des quantités de mouvement reviennent au principe (déjà utilisé) de la conservation du mouvement du centre de gravité. Quant aux autres intégrales classiques, celles des aires se résument dans la constance du vecteur $\boldsymbol{K}$ défini par (15) [ou (16)], et l'intégrale des forces vives s'écrit

$$\text{(21)} \qquad \mathfrak{T} - \mathfrak{U} = E,$$

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ ayant été explicitées sous plusieurs formes différentes, et E, constante pendant le mouvement, s'interprétant comme énergie totale du système.

7. Viriel.

Si l'on dérive par rapport à t la première expression (9) de J, en remplaçant $\boldsymbol{R}_\nu$ par $\boldsymbol{V}_\nu$, on a

$$\frac{1}{2}\dot{J} = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{V}_\nu \times \boldsymbol{R}_\nu,$$

d'où, en dérivant une seconde fois,

$$\frac{1}{2}\ddot{J} = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{V}_\nu \times \boldsymbol{V}_\nu + \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \dot{\boldsymbol{V}}_\nu \times \boldsymbol{R}_\nu.$$

Le premier terme du second membre, à cause de (12) n'est que $2\mathfrak{T}$. Le second, en ayant égard à (20), s'écrit

$$\sum_0^2{}_\nu\, \mathrm{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U} \times \boldsymbol{R}_\nu:$$

c'est ce qu'on appelle le *viriel* de notre système matériel.

Dès qu'on pense $\mathfrak{U}$ comme fonction homogène de degré -1 des coordonnées des points P_ν, rapportées au centre de gravité G, on reconnait, en appliquant le théorème d'Euler, que le viriel ne diffère pas de $-\mathfrak{U}$. On a par conséquent la relation

$$\frac{1}{2}\ddot{J} = 2\mathfrak{T} - \mathfrak{U}, \tag{22}$$

qui remonte, elle aussi, à Lagrange et joue, comme nous le verrons, un rôle fondamental dans les considérations des n°s 10 et 11.

8. Premier corollaire du théorème général d'existence.

Supposons que la constante E ait une valeur fixée d'avance (et d'ailleurs quelconque). Si à un instant donné t les positions des trois corps sont distinctes de sorte que la fonction des forces $\mathfrak{U}$ a une valeur finie, le mouvement se poursuit régulièrement pour une durée T non nulle.[1] Si l'on sait auparavant que $\mathfrak{U}$ ne dépasse pas une certaine limite $\mathfrak{U}$, on peut affirmer que

$$T > T.$$

[1] Je me borne, pour fixer les idées, aux valeurs croissantes de la variable indépendante t (futur). Il n'y aurait rien à changer dans les raisonnements et dans la conclusion, si l'on envisageait des valeurs décroissantes (passé); ou bien, croissantes et décroissantes à la fois.

en désignant par T une quantité positive, dépendant exclusivement de $\mathfrak{U}$ (des masses et de E). Pour la démonstration il convient de s'appuyer sur les équations de mouvement (20), en les envisageant comme un système

$$(20') \qquad \dot{\boldsymbol{R}}_\nu = \boldsymbol{V}_\nu, \quad m_\nu \dot{\boldsymbol{V}}_\nu = \mathrm{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$$

du premier ordre par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{R}_\nu$, $\boldsymbol{V}_\nu$, c'est-à-dire par rapport à leurs 18 composantes.

Dès que $\mathfrak{U}$ ne dépasse $\mathfrak{U}$, on peut assigner une limite supérieure aux seconds membres. C'est ce qui résulte, pour le premier groupe, de l'intégrale des forces vives, qui donne pour $\mathfrak{T}$ la limite supérieure $\mathfrak{U} + E$, d'où l'on tire, à cause de l'expression (12) de $\mathfrak{T}$, qu'aucune des composantes de $\boldsymbol{V}_\nu$ ne peut dépasser $\left|\sqrt{\frac{\overline{\mathfrak{U}} + E}{m_\nu}}\right|$. Quant au second groupe des (20'), la limite supérieure d'une composante quelconque de $\mathrm{grad}_{P_\nu} \mathfrak{U}$ apparaît des (19), en remarquant que, d'après la forme de $\mathfrak{U}$, $\frac{1}{r_\nu}$ ne peut pas dépasser $\frac{\mathfrak{U}}{f\, m_{\nu+1} m_{\nu+2}}$. Ces seconds membres sont d'ailleurs des fonctions régulières (des composantes des $\boldsymbol{V}_\nu$ et des $\boldsymbol{R}_\nu$), tant que les distances mutuelles ne s'annulent pas: en particulier donc tant que $\mathfrak{U} < \mathfrak{U}$.

Dans ces conditions le théorème classique d'existence nous assure que les intégrales de (20'), à partir d'un instant t et d'une position pour laquelle $\mathfrak{U} < \mathfrak{U}$, restent régulières pendant un intervalle de temps non nul. Le même théorème assigne en surplus à cet intervalle une durée minimum T',[1] qui dépend en général des positions et des vitesses se rapportant à l'instant t. Toutefois — c'est le corollaire qui nous intéresse — *T' admet nécessairement une limite inférieure non nulle T, dépendant exclusivement de* $\mathfrak{U}$ (et des autres constantes qui interviennent dans la question, comme E et les masses).

On s'en rend compte d'après un raisonnement bien connu, en essayant d'admettre le contraire, c'est-à-dire que la limite inférieure T soit nulle. Il existerait alors, dans l'ensemble des conditions initiales satisfaisant à la restriction $\mathfrak{U} \leq \overline{\mathfrak{U}}$, un système régulier de positions et de vitesses au voisinage desquelles la limite inférieure de T' serait encore nulle. Mais à ce système lui-même, et à tout son voisinage, on peut coordonner, d'après le théorème d'existence rappelé tout à l'heure, un intervalle de régularité *non nul:* la limite inférieure T de T' ne peut donc pas être nulle.

C. Q. F. D.

[1] Je veux dire une durée $\leq$ à l'intervalle.

9. Deuxième corollaire.

Considérons le mouvement des trois corps à partir d'un instant initial t_0, pour lequel nous supposons tout régulier. Ou bien le mouvement se poursuit régulièrement pour toute valeur de $t > t_0$, ou bien il y a un premier instant t_1 tel que le mouvement, étant régulier à l'intérieur de l'intervalle (t_0, t_1), cesse de l'être pour $t = t_1$. Nous désignerons par t' un instant de l'intervalle (t_0, t_1), si proche que l'on veut à t_1, mais antérieur à t_1.

D'après ce qui précède, la limite *supérieure* de U, finie dans tout intervalle (t_0, t'), doit être infinie pour l'intervalle (t_0, t_1): autrement le mouvement serait régulier même au delà de t_1.

On peut en déduire — c'est ce que j'appelle le deuxième corollaire — qu'on a plus précisément

$$\lim_{t=t_1} \mathrm{U} = +\infty. \tag{23}$$

En effet, si U n'admettait pas la limite $+\infty$ pour $t = t_1$, il existerait des instants t', si proches que l'on veut à t_1, pour lesquels U serait plus petite qu'une valeur U assignée d'avance. Alors le mouvement se poursuivrait régulièrement jusqu' à $t' + T$ (T dépendant exclusivement de U, ainsi qu'il a été dit au nº préc.), et par suite (puisqu'on peut supposer t' infiniment peu différent de t_1) même au delà de t_1, ce qui contredit à l'hypothèse. On a donc bien la propriété exprimée par (23).

10. Existence d'une limite pour J. — Les deux seules formes de singularités possibles: choc binaire et collision générale.

La formule (22), en y remplaçant $\mathfrak{T}$ par sa valeur déduite de l'intégrale des forces vives, s'écrit

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{J}}{dt} = \mathrm{U} + 2E.$$

Dès que t est assez proche à t_1, le second membre devient et demeure positif à cause de (23). $\dot{J}(t)$ va donc en croissant avec t, et tend par conséquent à une limite finie ou bien à $+\infty$ pour $t = t_1$. En tout cas $\dot{J}$ garde le même signe, pour t assez proche à t_1: cela est évident si la limite de $\dot{J}$ n'est pas zéro; et si elle est zéro, il suffit d'observer que $\dot{J}$ y converge en croissant, et prend en conformité des valeurs toujours négatives à gauche de t_1.

Il s'en suit que la quantité positive J tend elle-même vers une limite positive ou nulle. On doit justement distinguer ces deux eventualités:

1°. $\lim_{t=t_1} J = J_1 > 0$. On a alors un *choc binaire;* des trois distances, une et une seulement tend vers zéro. Pour le constater, on remarque d'abord que, t croissant indéfiniment, la plus petite des distances mutuelles tend nécessairement à zéro. Il reste à s'assurer que cette distance minimum est toujours la même, ce qui réussit par réduction à l'absurde. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait, si près de t_1 que l'on veut, quelque instant t' tel que, avant et après t', la plus petite distance serait représentée par deux différents côtés du triangle des trois corps: par ex., par r_1 avant et par r_2 après. Alors, pour $t = t'$, ces deux distances seraient égales, et infiniment petites avec $t_1 - t'$; il en serait de même de la troisième (qui ne peut pas dépasser leur somme), et aussi par conséquent de $J = \sum_0^2 {}_\nu m_\nu^* r_\nu^2$, ce qui ne peut pas arriver dès que $\lim_{t=t_1} J > 0$.

Soit précisément r_ν la distance tendant à zéro, ce qui correspond à un choc entre $P_{\nu+1}$ et $P_{\nu+2}$. Il convient de retenir que $r_{\nu+1}$ *et* $r_{\nu+2}$ *tendent l'une et l'autre vers une même limite non nulle.* En effet, puisque la différence $|r_{\nu+1} - r_{\nu+2}|$ ne peut pas dépasser r_ν, on a en premier lieu

$$\lim_{t=t_1} (r_{\nu+1} - r_{\nu+2}) = 0 .$$

D'autre part, vu que r_ν tend vers zéro, on a, de la seconde expression (9) de J,

$$\lim_{t=t_1} (m_{\nu+1}^* r_{\nu+1}^2 + m_{\nu+2}^* r_{\nu+2}^2) = \lim_{t=t_1} J = J_1 > 0,$$

d'où l'on déduit

$$\lim_{t=t_1} r_{\nu+1}^2 = \lim_{t=t_1} r_{\nu+2}^2 = \frac{J_1}{m_{\nu+1}^* + m_{\nu+2}^*} .$$

C. Q. F. D.

2°. $\lim_{t=t_1} J = 0$.

L'expression de J invoquée tout à l'heure montre que, avec J, toutes les distances mutuelles convergent vers zéro.

Il s'agit dans ce cas d'une *collision générale,* les trois corps tendant à se choquer en G (d'après la première des expressions (9) de J).

Il convient d'ajouter que, J tendant à zéro, la limite de $\dot{J}$ est nécessairement une quantité finie ≤ 0. En effet $\dot{J}$ converge à sa limite en

croissant. Donc, en premier lieu, cette limite ne saurait être $-\infty$; mais elle ne peut être non plus >0, car alors il en serait de même de $\dot{J}$, pour t assez proche à t_1; et J irait en croissant, tandis qu'il tend justement vers sa valeur minimum zéro.

11. Exclusion des collisions générales d'après M. Sundman.

On a reconnu au n° précédent que, pour t assez proche à t_1, $\frac{dJ}{dt}$ garde toujours le même signe. Il est partant loisible d'introduire J à la place de t comme variable indépendante.

Puisque on a

$$\frac{d}{dt}\dot{J} = \dot{J}\frac{d\dot{J}}{dJ} = \frac{1}{2}\frac{d}{dJ}\dot{J}^2,$$

on tire de (22), en éliminant cette fois ll moyennant l'intégrale des forces vives,

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dJ}\dot{J}^2 = \mathfrak{T} + E.$$

Ceci posé, tirons quelques conséquences de l'hypothèse que la singularité de l'instant t_1 soit une collision générale: J tend alors à zéro lorsqu'on fait tendre t à t_1.

Multiplions par dJ la formule écrite tout à l'heure, et intégrons depuis l'instant initial t_0 jusqu'à un $t < t_1$, mais très voisin à t_1, c'est-à-dire depuis la valeur initiale J_0 de J jusqu' à une valeur J très petite, mais encore >0.

Il vient (avec une signification évidente de $\dot{J}_0$)

$$\frac{1}{4}(\dot{J}^2 - \dot{J}_0^2) + E\,(J_0 - J) = \int_{J_0}^{J} \mathfrak{T}\, dJ.$$

Lorsqu'on fait tendre t à t_1, et par suite J à zéro, $\dot{J}$ a une limite finie, bien déterminée (voir la remarque finale du n° précédent). Il en est donc ainsi du premier membre, et par conséquent aussi de l'intégrale $\int_{J_0}^{J} \mathfrak{T}\, dJ$. C'est comme dire que la fonction $\mathfrak{T}$ *est intégrable jusqu' à* $J = 0$.

Or on a, d'après (17),

$$\mathfrak{T} \geq \frac{1}{2} K^2 \frac{1}{J},$$

ce qui revient à dire que, si K était une constante *non* nulle, $\mathfrak{T}$ deviendrait infinie, pour $J = 0$, d'ordre non inférieur à l'unité, et alors elle ne serait point intégrable jusqu'à $J = 0$.

La contradiction disparaît seulement en supposant que K soit nulle. La condition $K = 0$ est donc nécessaire pour que les trois corps puissent se choquer tous les trois dans un même point géométrique. C'est le beau lemme de M. Sundman, établissant, si l'on veut, que, *lorsque le moment résultant des quantités de mouvement ne s'annule pas, la seule singularité qui puisse se présenter dans le problème des trois corps est un choc binaire.*

12. **Voisinage d'un choc binaire $P_{\nu+1}$, $P_{\nu+2}$. — Spécifications se rapportant à P_ν.**

On a vu au nº 10 que, dans le cas d'un choc binaire entre $P_{\nu+1}$ et $P_{\nu+2}$, le troisième corps P_ν reste à une distance finie — je veux dire ayant une limite inférieure > 0 — soit de $P_{\nu+1}$ que de $P_{\nu+2}$. Il s'en suit que la force d'attraction newtonienne

$$\operatorname{grad}_{P_\nu} \mathrm{U} = f m_\nu \left(\frac{m_{\nu+1}}{r^3_{\nu+2}} r_{\nu+2} - \frac{m_{\nu+2}}{r^3_{\nu+1}} r_{\nu+1}\right)$$

subie par P_ν demeure bornée.

Comme le mouvement du système est régulier, depuis l'instant initial, pour tout $t < t_1$, la force qu'on vient d'expliciter peut être envisagée comme une fonction (vectorielle) de t, holomorphe pour $t < t_1$, et en outre certainement bornée, lorsque t s'approche indéfiniment de t_1. Une telle fonction est bien intégrable (depuis l'instant initial t_0) jusqu' à $t = t_1$. Dès lors l'équation du mouvement de P_ν

$$m_\nu \ddot{\boldsymbol{R}}_\nu = \operatorname{grad}_{P_\nu} \mathrm{U}$$

nous assure que $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu$, vitesse absolue — on doit entendre rapportée à G — de P_ν, tend à une limite bien déterminée pour $t = t_1$. Elle est à son tour intégrable jusqu' à t_1, et il en résulte l'existence d'une limite bien déterminée pour le vecteur

$$\boldsymbol{R}_\nu = P_\nu - G.$$

On peut dire aussi: *Le corps qui ne participe pas au choc tend, pour t convergent à t_1, vers une position limite à distance finie, avec une vitesse (absolue) également finie et bien déterminée.*

13. Ordre d'infinitude de la vitesse.

L'expression (18') de U (en s'appuyant uniquement sur la circonstance que $\frac{1}{r_{\nu+1}}$ et $\frac{1}{r_{\nu+2}}$ restent finis) donne

$$\lim_{t=t_1} r_\nu U = f m_{\nu+1} m_{\nu+2}. \tag{24}$$

D'ailleurs [n° précédent] $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu = \boldsymbol{V}_\nu$ reste fini, et par suite

$$\lim_{t=t_1} r_\nu V_\nu^2 = 0.$$

Multiplions l'intégrale des forces vives par r_ν, en y prenant l'expression de $\mathfrak{T}$ sous la forme (14). On en tire après coup

$$\lim_{t=t_1} r_\nu v_\nu^2 = 2 f (m_{\nu+1} + m_{\nu+2}), \tag{25}$$

ce qui montre que *la vitesse devient infinie d'ordre* $\frac{1}{2}$ (par rapport à l'inverse de la distance). La vitesse $\boldsymbol{v}_\nu$ dont il s'agit devrait être spécifiée comme vitesse relative des deux corps qui se choquent; mais il convient de remarquer que aussi leurs vitesses absolues $\boldsymbol{V}_{\nu+1}$ et $\boldsymbol{V}_{\nu+2}$ se comportent d'une manière identique. C'est ce qui résulte sans peine des formules (13), en tenant compte encore une fois de la circonstance que la vitesse $\boldsymbol{V}_\nu$ reste finie.

14. Relations asymptotiques. — Variable auxiliaire de M. Sundman. — Constatation qu'elle reste finie pour t tendant à t_1.

Le produit scalaire $\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{v}_\nu$ de deux vecteurs quelconques $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu$ ne dépasse jamais en valeur absolue le produit $r_\nu v_\nu$ de leurs longueurs. Lorsque celui-ci tend à zéro, il en est de même *a fortiori* pour $\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{v}_\nu$. En attribuant à $\boldsymbol{r}_\nu$, $\boldsymbol{v}_\nu$ la signification des n^os précédents, $r_\nu v_\nu$, à cause de (25), tend effectivement à zéro, pour t convergent à t_1. D'ailleurs la dérivation de l'identité $r_\nu^2 = \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{r}_\nu$ donne

$$\frac{d r_\nu^2}{d t} = 2 \boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{v}_\nu.$$

Il s'en suit

$$\lim_{t=t_1} \frac{d r_\nu^2}{d t} = 0. \tag{26}$$

La dérivation ultérieure de la même indentité donne

$$\frac{d^2 r_\nu^2}{d t^2} = 2 v_\nu^2 + 2 \mathbf{r}_\nu \times \dot{\mathbf{v}}_\nu. \tag{27}$$

Il convient de transformer le second membre, en profitant, pour le premier terme, de l'intégrale des forces vives, et pour $\dot{\mathbf{v}}_\nu$, c'est-à-dire, d'après (11), pour la difference

$$\dot{\mathbf{V}}_{\nu+2} - \dot{\mathbf{V}}_{\nu+1},$$

des équations du mouvement (20).

En se rappelant que $\frac{1}{r_{\nu+1}}$, $\frac{1}{r_{\nu+2}}$, $\mathbf{V}_\nu$ restent finis, et en remplaçant, dans

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{U} + E,$$

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}$ par leurs valeurs (14) et (18'), on tire d'abord

$$2 v_\nu^2 = \frac{4 f (m_{\nu+1} + m_{\nu+2})}{r_\nu} + \cdots,$$

les termes non écrits restant finis lorsque t s'approche indéfiniment de t_1.

Avec cette même entente, on a de (19)

$$\begin{cases} \frac{1}{m_{\nu+1}} \operatorname{grad}_{P_{\nu+1}} \mathfrak{U} = \quad f \frac{m_{\nu+2}}{r_\nu^3} \mathbf{r}_\nu + \cdots, \\ \frac{1}{m_{\nu+2}} \operatorname{grad}_{P_{\nu+2}} \mathfrak{U} = - f \frac{m_{\nu+1}}{r_\nu^3} \mathbf{r}_\nu + \cdots, \end{cases}$$

et par conséquent

$$\dot{\mathbf{v}}_\nu = \frac{1}{m_{\nu+2}} \operatorname{grad}_{P_{\nu+2}} \mathfrak{U} - \frac{1}{m_{\nu+1}} \operatorname{grad}_{P_{\nu+1}} \mathfrak{U} = - f \frac{m_{\nu+1} + m_{\nu+2}}{r_\nu^3} \mathbf{r}_\nu + \cdots.$$

$$\mathbf{r}_\nu \times \dot{\mathbf{v}}_\nu = - f \frac{m_{\nu+1} + m_{\nu+2}}{r_\nu} + \cdots.$$

Cette dernière formule et la précédente expression asymptotique de $2 v_\nu^2$ donnent à (27) l'aspect

$$\frac{d^2 r_\nu^2}{d t^2} = 2 f \frac{m_{\nu+1} + m_{\nu+2}}{r_\nu} + X, \tag{27'}$$

le terme additionnel X pouvant être regardé comme une fonction de t, holomorphe pour t intérieur à l'intervalle (t_0, t_1), et finie même pour t s'approchant indéfiniment de t_1. L'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} X\,dt$$

est donc bien déterminée.

D'après (26), il en est de même pour

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d^2 r_\nu^2}{dt^2}\,dt = \left[\frac{d r_\nu^2}{dt}\right]_{t_0}^{t_1},$$

qui se réduit à la valeur initiale de $\frac{d r_\nu^2}{dt}$.

Dans ces conditions, l'équation (27') montre aussitôt que, *en posant*

$$(28) \qquad d u_\nu = \frac{dt}{r},$$

on définit (à une constante près) une fonction u_ν croissant avec t et tendant vers une valeur limite finie pour $t = t_1$.

CHAPITRE II.

Transformations canoniques suggérées par le mouvement parabolique.

1. Formules symétriques se rapportant à la méthode de Jacobi.

Soit donné un système canonique

$$(1) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont la fonction caractéristique $H(p_1, p_2, \ldots, p_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est supposée indépendante de t. Si l'on regarde, dans H, toute p_i comme la dérivée partielle $\frac{\partial W}{\partial x_i}$ d'une fonction $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on forme l'équation de Hamilton-Jacobi en posant

$$(2) \qquad H = \text{const.} = E.$$

La définition classique d'intégrale complète de cette dernière équation introduit explicitement E et $n-1$ autres constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Sous forme plus symétrique, il convient de nommer, avec POINCARÉ,[1] intégrale complète toute fonction

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

des x_i et de n constantes ξ_i, douée des propriétés suivantes:

1° c'est une solution de (2), c'est-à-dire qu'en l'introduisant dans H celle-ci devient une fonction $\mathfrak{H}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ des seules ξ et par suite une constante;

2° elle contient les n constantes ξ essentiellement, c'est-à-dire de telle manière que (dans le domaine des valeurs qu'il y a lieu de considérer) le déterminant hessien

$$\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial \xi_j} \right\| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

ne s'annule pas.

Moyennant une telle W, les $2n$ équations

$$\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\varpi_i, \quad \frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

définissent l'intégrale générale du système (1), en fournissant les x_i et les p_i comme fonctions des $2n$ argument ξ_i, ϖ_i: les ξ_i doivent être regardés comme des constantes d'intégration, les ϖ_i comme des fonctions linéaires de t; d'une manière précise on a

$$\varpi_i = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi_i} t + \eta_i, \tag{4}$$

en désignant par η_i des nouvelles constantes arbitraires.

2. Mouvement central parabolique. — Équation en W qu'il convient d'envisager.

Un point matériel P de masse égale à l'unité est attiré par un centre fixe O suivant la loi de NEWTON. Les équations canoniques du mouvement ont pour fonction caractéristique l'énergie totale. En l'exprimant à l'aide des coordonnées cartesiennes du mobile (rapportées au centre) x_1, x_2, x_3 et des conjuguées p_1, p_2, p_3 (composantes de la vitesse), on a

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k}{r}, \tag{5}$$

où k est la constante d'attraction et $r = \left| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right|$ la distance OP.

[1] Pp. 10—13 des »Leçons de mécanique céleste», déjà citées à la page 106.

La nature de la trajectoire dépend, comme on sait, de la valeur (constante pour chaque solution) prise par la fonction H elle-même.

Les mouvements paraboliques correspondent à la valeur $H=0$. Fixons-nous sur cette détermination, et considérons le système différentiel que l'on obtient de (1) (pour $n=3$, avec l'expression (5) de H) en changeant la variable indépendante t d'après la position

$$dt = r\,du. \tag{6}$$

On a

$$\frac{dp_i}{du} = -r\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{du} = r\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1,2,3).$$

Pour les solutions paraboliques, le long desquelles $H=0$, les seconds membres peuvent s'écrire

$$-\frac{\partial(rH)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial(rH)}{\partial p_i}.$$

Ces solutions vérifient partant également le système canonique

$$\frac{dp_i}{du} = -\frac{\partial(rH)}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial(rH)}{\partial p_i} \quad (i=1,2,3), \tag{7}$$

qui diffère à double titre du système originaire, ayant été altérées soit la variable indépendante que la fonction caractéristique. C'est une transformation que j'ai employé ici même[1] il y a déjà quelques années pour la régularisation du problème restreint. On peut bien l'appeler transformation de DARBOUX-SUNDMAN, puisque on y combine une propriété des faisceaux conservatifs de trajectoires signalée par DARBOUX avec le changement de variable indépendante dont s'est servi M. SUNDMAN dans son mémoire couronné.[2]

Toutes les solutions du système (7) peuvent être représentées — dans la manière rappelée au n° 1 — moyennant une intégrale complète de l'équation

$$\frac{1}{2}r(p_1^2+p_2^2+p_3^2) = \text{const.} = \mathfrak{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \tag{8}$$

Dans les expressions intégrales des x_i, p_i (provenant de la résolution des équations, qui correspondent aux (3) pour le problème qui nous occupe), les constantes ξ_1, ξ_2, ξ_3 doivent être censées soumises à la liaison

$$\mathfrak{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = k, \tag{9}$$

pour rendre $H=0$, condition caractéristique des ∞^5 solutions paraboliques.

[1] Loco citato (dans la note (5) de la page 99), p. 313.
[2] Loco citato (dans la note (1) de la page 100), p. 127.

3. Construction d'une intégrale homogène de degré $\frac{1}{2}$.

En coordonnées polaires r, w (colatitude), φ (longitude), l'équation (8) s'écrit

$$(8') \qquad \frac{r}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 w}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right\} = \text{const.}$$

On reconnaît aisément qu'elle admet des intégrales indépendantes de φ, de la forme

$$W = \sqrt{r}\, f(w).$$

En effet, en substituant dans (8') $\sqrt{r}\, f(w)$ à la place de W, il vient

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4} f^2 + \left(\frac{d f}{d w}\right)^2\right\} = \text{const.}$$

On y satisfait en prenant

$$f = 2\sqrt{\xi} \sin \frac{1}{2} w,$$

où l'on entend par ξ une constante positive. La valeur constante du second membre de (8') est alors $\frac{1}{2}\xi$.

On a trouvé de la sorte une intégrale

$$(10) \qquad W = 2\sqrt{\xi r} \sin \frac{1}{2} w$$

contenant matériellement la seule constante ξ; mais on peut sans peine faire apparaître le degré de généralité qu'il nous faut. Il suffit de remarquer que (puisqu'on n'a fait aucune hypothèse à l'égard de l'orientation des axes) il est parfaitement loisible de regarder comme arbitraire la direction de l'axe polaire $O x_3$, c'est-à-dire de la demi-droite à partir de laquelle on compte la colatitude w. En tenant compte de cela, rapportons nos formules à des coordonnées non spécialisées par rapport à la demi-droite en question, désignant par λ_1, λ_2, λ_3 ses cosinus directeurs. On aura en conformité

$$\cos w = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{r}.$$

et W renfermera, outre ξ, les cosinus λ, c'est-à-dire essentiellement trois constantes arbitraires. Pour le mettre en évidence, considérons le vecteur ξ ayant

pour longueur ξ et pour cosinus directeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, et exprimons W à l'aide des composantes

$$\xi_i = \xi \lambda_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

continuant toutefois à écrire ξ au lieu de $\left|\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}\right|$. On a de la sorte

$$(10') \qquad W = \sqrt{2\xi r}\,\sqrt{1 - \cos w} = \sqrt{2}\,\sqrt{\xi r - \sum_1^3 {}_i\, \xi_i x_i},$$

ce qui est bien une intégrale de (8') contenant d'une manière essentielle les trois constantes ξ_1, ξ_2, ξ_3. Je ne m'arrête pas à justifier cette dernière affirmation, qui apparaîtra évidente dans la suite d'après les expressions explicites des x_i, p_i. Je me borne à faire remarquer que, comme il résulte de (10'), W demeure régulière et différente de zéro, pourvu seulement que ne s'annulent pas à la fois toutes les $x_i (r = 0)$, ni toutes les $\xi_i (\xi = 0)$, ni enfin toutes les différences $x_i - \xi_i (\cos w = 1)$.

Puisque la substitution de la valeur (10) de W dans le premier membre de (8') donnait pour résultat $\frac{1}{2}\xi$, il s'en suit que, pour l'intégrale complète (10') explicitée tout à l'heure,

$$(11) \qquad \mathfrak{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2}\xi,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (9),

$$(9') \qquad \xi = \left|\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}\right| = 2k.$$

Voilà la relation devant exister entre les constantes d'intégration ξ_1, ξ_2, ξ_3 (et le coefficient de l'attraction k) lorsqu'il s'agit des solutions paraboliques.

4. Signification des constantes ξ_i et des paramètres ϖ_i.

Les équations définissant le mouvement, d'après les formules générales (3) et l'expression (10') de W, sont

$$(12) \qquad -\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = \frac{r}{W}\left(\frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi}\right) = \varpi_i,$$

$$(13) \qquad \frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\xi}{W}\left(\frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi}\right) = p_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

ces dernières pouvant évidemment être remplacées par

$$rp_i = \xi \varpi_i, \tag{14}$$

qui résultent après coup de la comparaison entre (12) et (13).

Occupons nous à présent de faire ressortir de ces équations les propriétés bien connues du mouvement parabolique, et l'interprétation soit des constantes ξ_i que des paramètres ϖ_i. Pour cette discussion il y a quelque avantage à introduire des vecteurs permettant de remplacer nos six équations (12) et (13) par deux relations vectorielles équivalentes.

On a déjà défini le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ (ayant pour composantes les ξ_i) constant en grandeur et direction: la grandeur, d'après (9′), est $2k$, assurément non nulle, et on verra bientôt quelle est l'interprétation géométrique de la direction. En attendant associons à $\boldsymbol{\xi}$ un vecteur $\boldsymbol{\varpi}$ de composantes ϖ_i; et en outre, suivant l'usage, $\mathbf{r}$ de composantes x_1, x_2, x_3 et $\mathbf{v}$ de composantes p_1, p_2, p_3, qui déterminent respectivement la position et la vitesse du point mobile.

Dès lors les équations (12) et (13) se résument vectoriellement comme il suit:

$$\frac{1}{W}\left(\mathbf{r} - \frac{r}{\xi}\boldsymbol{\xi}\right) = \boldsymbol{\varpi}, \tag{12'}$$

$$\frac{1}{W}\left(\frac{\xi}{r}\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}\right) = \mathbf{v}, \tag{13'}$$

et donnent lieu à

$$r\mathbf{v} = \xi\boldsymbol{\varpi}, \tag{14'}$$

évidemment équivalente aux (14).

En tenant compte de la forme générale (4) des paramètres ϖ_i $\left(\text{puisque on a actuellement, à cause de (11), } \mathfrak{H} = \frac{1}{2}\xi\right)$, on reconnaît le vecteur $\boldsymbol{\varpi}$ comme une fonction linéaire de t, ayant $-\frac{1}{2\xi}\boldsymbol{\xi}$ pour coefficient de t. C'est un vecteur parallèle à $\boldsymbol{\xi}$; par suite, si l'on forme le produit vectoriel $\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\varpi}$, t disparaît. Donc

$$\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\varpi} = \mathbf{c}, \tag{15}$$

en désignant par $\mathbf{c}$ un vecteur constant.

D'autre part, en multipliant vectoriellement (à gauche), la (12′) par $\boldsymbol{\xi}$ et la (13′) par $\mathbf{r}$, on a

$$\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\varpi} = \frac{1}{W}(\boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = -\frac{1}{W}(\mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\xi}),$$

d'où

$$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\varpi} = \boldsymbol{c}.$$

Ceci exprime la constance de la vitesse aréolaire $\frac{1}{2} \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$, propriété fondamentale de tout mouvement central, qui devait naturellement être implicite dans la représentation intégrale (12), (13) du mouvement parabolique. La constatation que le mouvement est plan découle classiquement de l'intégrale (vectorielle) des aires

$$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c},$$

d'où résulte l'équation du plan

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r} = 0.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\varpi}$ appartiennent eux aussi au plan d'après (15). Quant à la trajectoire, sa nature géométrique descend aisément de (12′), en tenant compte de (10′). Cette dernière peut s'écrire à l'aide des vecteurs $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{r}$:

$$W^2 = 2(\xi r - \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r}), \tag{10''}$$

après quoi le carré (scalaire) de (12′) donne

$$\varpi^2 = \frac{r}{\xi}, \tag{16}$$

en représentant manifestement par ϖ la longueur du vecteur $\boldsymbol{\varpi}$.

La multiplication scalaire de la même (12′) par $\boldsymbol{\xi}$ donne d'ailleurs

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\varpi} = \frac{1}{W} (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r} - \xi r),$$

c'est-à-dire, ayant égard à (10″),

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\varpi} = -\frac{1}{2} W. \tag{17}$$

Il s'en suit

$$\xi^2 \varpi^2 - (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\varpi})^2 = \xi^2 \varpi^2 - \frac{1}{4} W^2,$$

ou bien, à cause de (16) et (10″),

$$\xi^2 \varpi^2 - (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\varpi})^2 = \xi r - \frac{1}{2}(\xi r - \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}(\xi r + \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r}).$$

En se rappelant que w représente l'angle des deux vecteurs $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{r}$ et remarquant d'autre part que le premier membre de la dernière équation ne diffère pas du carré du vecteur $\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\varpi} = \boldsymbol{c}$, on a enfin

$$r(1+\cos w) = \frac{2}{\xi} c^2 \quad (c \text{ longueur du vecteur } \boldsymbol{c}).$$

C'est évidemment l'équation polaire de la trajectoire, dans son plan, l'axe polaire étant dirigé dans le sens du vecteur $\boldsymbol{\xi}$.

La comparaison avec l'équation d'une parabole rapportée à son foyer achève notre vérification, et nous permet en outre de retenir:

Le vecteur constant (ξ_1, ξ_2, ξ_3) *de longueur* $2k$ *a la direction de l'axe de la trajectoire parabolique (son sens étant celui qui va du foyer au sommet). Le paramètre de cette parabole est la constante* $\frac{1}{\xi} c^2$, *exprimable directement à l'aide des* ξ_i, ϖ_i *sous la forme*

$$\frac{1}{\xi} c^2 = \frac{1}{\xi} (\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\varpi})^2 = \frac{1}{\xi} \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 \end{Vmatrix}^2. \tag{15'}$$

5. Forme résolue de la transformation canonique entre les deux sextuples[1] (x_i, p_i), (ξ_i, ϖ_i).

L'identité

$$\sum_1^3 {}_i\, p_i\, dx_i - \sum_1^3 {}_i\, \varpi_i\, d\xi_i = dW,$$

découlant immédiatement des (12), (13), fait voir que ces formules établissent une transformation canonique entre les variables primitives x_i, p_i et les arguments ξ_i, ϖ_i, pourvu seulement qu'on puisse les résoudre par rapport aux unes et aux autres.

En substituant, dans les (12), $\frac{r}{\xi}$ par la valeur ϖ^2 tirée de (16), on a en premier lieu

$$x_i = \varpi^2 \xi_i - 2U\varpi_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{I}$$

où j'ai écrit $-2U$ à la place de W, désignant ainsi par U le trinôme $\sum_1^3 {}_i\, \varpi_i \xi_i$, comme on le fait habituellement dans la théorie des transformations de contact: on a en effet, d'après (17)

$$U = -\frac{1}{2} W = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\varpi} = \sum_1^3 {}_i\, \varpi_i \xi_i. \tag{18}$$

[1] J'emploie, pour abréger, *sextuple* au lieu de *système de six éléments*.

Les formules exprimant les p_i moyennant les ξ_i et les ϖ_i, c'est-à-dire les (13) convenablement transformées, sont immédiatement fournies par les (14), dès qu'on y remplace $\frac{\xi}{r}$ par $\frac{1}{\varpi^2}$. On a donc le second groupe résolu

$$\text{(II)} \qquad p_i = \frac{\varpi_i}{\varpi^2} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Signalons encore quelques formules, conséquences des (I), (II) [ou, si l'on veut, des originaires (12), (13)], qui nous servirons dans la suite. L'une d'elles n'est que (16), qu'on retrouve matériellement, en faisant le carré des (I) et les additionnant; un second groupe est constitué par les (14), qui résultent, peut-on dire, des (II) et (16); et il y a lieu enfin de fixer l'expression de $v^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, qui se déduit des (II) sous la forme $\frac{1}{\varpi^2}$ et devient $\frac{\xi}{r}$ d'après (16).

Le système à retenir est donc

$$(19) \qquad \begin{cases} r = \xi\,\varpi^2, \\ r\,p_i = \xi\,\varpi_i \qquad (i = 1, 2, 3), \\ r\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi. \end{cases}$$

Il va sans dire que, dans toutes ces formules, r, ξ et ϖ gardent leur signification de longueurs des vecteurs (x_1, x_2, x_3), (ξ_1, ξ_2, ξ_3), $(\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$, c'est-à-dire des valeurs arithmétiques des radicaux $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, $\sqrt{\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2}$.

6. Inversion. — Comportement analytique.

Notre transformation (I), (II) peut être invertie sans calcul. Il suffit de s'appuyer sur la circonstance que l'expression (10') de W dépend symétriquement des x_i et des ξ_i. Il s'en suit que les formules (12) et (13) sont également symétriques par rapport aux deux sextuples (x_i, p_i), $(\xi_i, -\varpi_i)$. D'après cela, *dès qu'on remplace matériellement dans les* (I), (II) *les* x_i, p_i *par* ξ_i, $-\varpi_i$ *et vice versa, on en tire les expressions résolues par rapport aux* ξ_i, $-\varpi_i$. Il est bon d'ajouter que, à cause de la forme spéciale des équations dont il s'agit, *le résultat peut également s'obtenir par l'échange des éléments correspondants des deux sextuples* (x_i, p_i), (ξ_i, ϖ_i).

Associons cette remarque à la circonstance que les seconds membres des (I) sont des polynômes (de troisième dégré) et les seconds membres des (II) des fonctions rationnelles ayant ϖ^2 au dénominateur. C'est assez pour pouvoir affirmer

que *notre transformation est birationnelle, et régulière pour toutes les valeurs finies des arguments qui n'annulent pas le trinôme* $\varpi_1^2+\varpi_2^2+\varpi_3^2$, *ni l'analogue* $p_1^2+p_2^2+p_3^2$.

Rapportons-nous, pour fixer les idées, à la transformation directe (I), (II). Parmi les déterminations des arguments ξ_i, ϖ_i, il y a lieu de signaler les sextuples Γ, formés par des valeurs nulles des ϖ_i, non toutes nulles à la fois des ξ_i, de façon que $\xi > 0$. Ce sont évidemment des sextuples, *non* réguliers d'après ce qui précède, qui se trouvent pour ainsi dire plongés dans le domaine d'holomorphisme sans le partager: ils forment en effet une variété à trois dimensions seulement, tandis que l'espace environnant en a six. Supposons de faire varier dans cet espace le sextuple ξ_i, ϖ_i et de le faire tendre à un Γ en suivant une ligne régulière. Les ϖ_i tendent alors à zéro de telle façon que les rapports $\frac{\varpi_i}{\varpi}$ admettent des limites bien déterminées γ_i, nécessairement liées par la relation

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1.$$

Les formules (I) et (19) montrent que *les coordonnées* x_i, *la distance* r, *et les produits* $r\,p_i$, $r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$ *demeurent, même en s'approchant indéfiniment d'un* Γ, *des fonctions régulières des* ξ_i, ϖ_i, *nulles en* Γ.

Il n'en est pas ainsi des p_i, lesquelles, d'après (II), deviennent en général infinies. On peut préciser davantage en constatant que les rapports $\frac{x_i}{r}$ [tirés des (I) et (19)] et les produits $\sqrt{r}\,p_i$ [tirés des (II) et (19)] ont des limites bien déterminées. Il vient en effet, en tenant compte de ce que $\lim\frac{\varpi_i}{\varpi}=\gamma_i$,

$$\lim\frac{x_i}{r}=\frac{\xi_i}{\xi}-2\gamma_i\sum_1^3{}_j\,\frac{1}{\xi}\,\xi_j\gamma_j, \tag{20}$$

$$\lim\sqrt{r}\,p_i=\sqrt{\xi}\,\gamma_i, \tag{21}$$

les radicaux ayant leurs valeurs arithmétiques, et le symbole lim se rapportant à l'approche d'un Γ en suivant une ligne régulière fixée d'avance.

Dans le cas particulier où s'annule le vecteur $c=\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\varpi}$, le mouvement parabolique devient rectiligne et les directions $\frac{\xi_i}{\xi}$, $\frac{\varpi_i}{\varpi}$ coïncident, pouvant au plus différer quant au sens. On a alors

$$\lim\frac{\xi_i}{\xi}=\pm\gamma_i.$$

et la limite (20) de $\frac{x_i}{r}$ devient par conséquent

$$(20') \qquad \lim \frac{x_i}{r} = \mp \gamma_i.$$

Remarque.

Par rapport aux coordonnées x_i, notre transformation canonique (I), (II) n'est pas ponctuelle. En effet, dans les seconds membres des (I), apparaissent à la fois les ξ_i et les ϖ_i. Il s'agit par conséquent d'une transformation de contact. Toutefois, si on l'envisage intrinsèquement, la dite transformation est bien ponctuelle prolongée (au sens de Lie). En effet les (II) représentent une inversion par rayons réciproques entre les p_i et les ϖ_i; les (I) en restent subordonnées par la condition que la transformation entre les deux sextuples (p_i, x_i), (ϖ_i, ξ_i) soit canonique.

7. **Mouvement parabolique tangent. — Interprétation des variables ξ_i, ϖ_i.**

Il est aisé de reconnaître la signification des variables ξ_i, ϖ_i liées aux x_i, p_i par la transformation (I), (II), lorsqu'on envisage les x_i, p_i comme coordonnées et composantes de vitesse d'un point mobile avec une loi quelconque. Il suffit pour cela d'envisager, à côté du mouvement réel, un mouvement parabolique hypothétique du même point, dû à attraction newtonnienne de l'origine. En se rapportant au n⁰ 4, on supposera:

1⁰ que le coefficient d'attraction ait la valeur numérique

$$k = \frac{1}{2} r (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

correspondant au sextuple x_i, p_i dont il s'agit;

2⁰ que la parabole (trajectoire du point dans ce mouvement fictif) passe au point (x_1, x_2, x_3) en y touchant le vecteur (p_1, p_2, p_3). On l'appellera *parabole osculatrice* (à la trajectoire du point dans son mouvement effectif).

Le mouvement parabolique tangent reste ainsi caractérisé. Les variables transformées ξ_i, ϖ_i se rattachent à ce mouvement d'une manière bien évidente.

Les ξ_i définissent un vecteur de longueur $2k$ parallèle à l'axe de la parabole osculatrice dans le sens allant du foyer au sommet; $\frac{1}{\xi} \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 \end{Vmatrix}^2$ représente le paramètre de la parabole, etc.

S'il arrive que, pendant le mouvement, les ξ_i, ϖ_i convergent vers un des sextuples Γ, considérés au n° précédent ($\varpi_i = 0, \xi > 0$), la parabole osculatrice devient de plus en plus mince, son paramètre tendant à zero: l'orientation de l'axe admet toutefois une limite bien déterminée. Le mobile tend à l'origine dans une direction également bien déterminée [formule (20)]. Si en particulier $\lim \frac{\varpi_i}{\varpi} = \pm \lim \frac{\xi_i}{\xi}$ $(i = 1, 2, 3)$, le rapprochement en question a lieu justement dans la direction de l'axe [formule (20')].

8. Généralités sur l'introduction d'éléments osculateurs paraboliques.

La transformation canonique (I), (II) est bien remarquable à cause de ses propriétés régularisantes. Les paramètres ξ_i, ϖ_i qu'elle introduit sont très étroitement liés, comme on vient de voir, au mouvement parabolique tangent. Toutefois ces ξ_i, ϖ_i ne peuvent pas être envisagés individuellement comme éléments osculateurs paraboliques: pour se procurer de tels éléments (faisant pendant aux classiques éléments elliptiques), il faudrait encore en former des combinaisons convenables. On y parvient plus commodement en revenant à la source de la transformation (I), (II), c'est-à-dire à l'équation aux dérivées partielles (8') et en utilisant une intégrale complète différente de (9), et précisément à variables séparées comme dans le cas elliptique.

9. Intégrale complète de (8') à variables séparées. — Éléments paraboliques.

Posons

$$W = R + Gw, \tag{22}$$

en supposant R fonction du seul argument r, et G constante. Si l'on introduit dans le premier membre de (8') cette expression de W, on a

$$\frac{r}{2}\left\{\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}G^2\right\} = \frac{1}{8}Z^2,$$

en désignant par

$$\frac{1}{8}Z^2 = k \tag{23}$$

la constante du second membre de (8').

On en tire

$$R = \int_q^r dr \sqrt{\frac{Z^2}{4r} - \frac{G^2}{r^2}}, \tag{24}$$

où la limite inférieure q de l'intervalle d'intégration pourrait être arbitraire. Il convient toutefois (comme dans l'intégrale analogue se rapportant au mouvement elliptique) d'attribuer à q la plus petite des valeurs de r annulant la fonction sous le signe. Il y a ici une seule racine finie; on est donc conduit à prendre

$$q = \frac{4G^2}{Z^2}. \tag{25}$$

Puisque on sait d'avance que l'orbite est parabolique (et décrite suivant la loi des aires par rapport au foyer), on constate immédiatement que q représente le demi-paramètre: c'est en effet la plus petite distance du foyer à laquelle puisse se trouver le mobile (qui parcourt la courbe toujours dans le même sens). En suivant Poincaré,[1] on supposera que la droite fixe à partir de laquelle on compte l'angle w, soit justement la ligne des noeuds (intersection, dûment précisée quant au sens, du plan de la parabole avec le plan coordonné Ox_1x_2). Si l'on désigne suivant l'usage par θ la longitude du noeud (c'est-à-dire l'angle formé par le noeud avec l'axe Ox_1), on a, d'après la définition de w,

$$\cos w = \frac{x_1}{r}\cos\theta + \frac{x_2}{r}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = -\cos I, \tag{26}$$

en entendant par I l'inclinaison (du plan de la parabole sur le plan Ox_1x_2).

D'après cela, il y a lieu de considérer W comme dépendant des coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3 du point mobile, et des trois constantes Z, G, θ à interpréter comme il suit:

Z dépend exclusivement du coefficient d'attraction, comme il résulte de (23);

$G = \frac{1}{2} Z |\sqrt{q}|$ définit ensuite le demi-paramètre q de la parabole;

θ représente la longitude du noeud.

Les équations (3), adaptées à notre W, où Z, G, θ jouent le rôle des ξ_i, en écrivant $-\zeta, -g, \Theta$ à la place de $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$, donnent

[1] Loc. cit. (à la page 106), pp. 65—74.

$$(27)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial Z} = \zeta, \quad \dfrac{\partial W}{\partial G} = g, \quad \dfrac{\partial W}{\partial \theta} = -\Theta, \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_i} = p_i \qquad (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Ayant égard aux équations (22), (24), (25), (26), le premier groupe s'écrit

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\partial R}{\partial Z} = \int_q^r \frac{Z\,dr}{4r\sqrt{\frac{Z^2}{4r} - \frac{G^2}{r^2}}} = \int_q^r \frac{Z\,dr}{2\sqrt{Z^2 r - 4G^2}} = \sqrt{r - q} = \zeta,$$

$$\frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\partial R}{\partial G} + w = g,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = -G\cos I = -\Theta,$$

et consent de reconnaître la signification des trois autres paramètres ζ, g, Θ.

Tout d'abord, d'après une propriété élémentaire de la parabole: $\zeta^2 = r - q$ représente l'abscisse de la position courante du mobile, comptée sur l'axe à partir du sommet.

La seconde équation, appliquée au sommet, fait voir que g représente l'angle que la direction de l'axe (allant du foyer au sommet) forme avec la ligne des noeuds.

Enfin la troisième équation nous montre que:

$\Theta = G\cos I$ fixe l'inclinaison.

Les équations (27) entraînent:

$$\sum_1^3 {}_i\, p_i\,dx_i - (Z\,d\zeta + G\,dg + \Theta\,d\theta) = d(W - Z\zeta - Gg)$$

et définissent par conséquent une transformation canonique entre le sextuple (p_i, x_i) et les deux triplets conjugués

$$(P)\qquad \begin{pmatrix} Z & G & \Theta \\ \zeta & g & \theta \end{pmatrix}.$$

Les expressions explicites des x_i, p_i en fonction des arguments (P) s'établissent sans peine, soit en effectuant la résolution matérielle des (27); soit, d'une manière indirecte mais plus commode (adoptée ordinairement dans le cas des éléments

elliptiques), en ayant recours aux formules élémentaires de transformation des coordonnées et tirant parti de la signification des six éléments (P).

J'omets ces développements en me bornant à faire remarquer que, à différence de la précédente (I), (II), la transformation entre les (x_i, p_i) et les (P) *n'est pas régularisante*. Déjà les expressions des x_i présentent des singularités au voisinage d'un choc, auquel correspondent des valeurs nulles des paramètres ζ, G et Θ.

Le sextuple canonique (P) est un cas limite (correspondant à la valeur zéro de l'énergie) des éléments elliptiques que j'ai appelés *isoenergétiques:*[1] il peut rendre des bons services dans l'étude des perturbations des comètes.

CHAPITRE III.

Régularisation explicite du voisinage d'un choc binaire.

1. Forme canonique de Poincaré.

On a rappelé, au n° 8 du Chap. I, les équations du mouvement absolu sous forme vectorielle, où figurent comme inconnues auxiliaires les composantes des quantités de mouvement. Il est bien connu qu'on leur donne immédiatement forme canonique, et qu'on les réduit ensuite à six degrés de liberté en mettant en évidence les coordonnées relatives de deux des trois corps par rapport au troisième.[2] Pour expliciter le système réduit, il me paraît avantageux d'abandonner la symétrie par rapport aux trois corps, en appelant O celui auquel on rapporte le mouvement et les coordonnées des deux autres; P, P' ceux-ci; et adoptant les notations qui s'y rattachent.

On indiquera par m_0 la masse de O; par m, m' les masses de P, P'; par x_i, x'_i $(i = 1, 2, 3)$ leurs coordonnées (par rapport à trois axes rectangulaires d'orientation fixe, ayant leur origine en O); par p_i, p'_i les composantes de la quantité de mouvement *absolue* de P et de P' respectivement; par r, r', Δ les trois distances OP, OP', PP'.

[1] »Sopra un nuovo sistema canonico di elementi ellittici«, Annali di Matematica, Ser. III, T. XX, 1913. Voir aussi:

W. De Sitter, »On canonical elements«, Proceedings of the K. Ak. van Wet. te Amsterdam, vol. XVI, 1913, pp. 279—291.

H. Andoyer, »Sur l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie comme éléments canoniques d'après M. M. T. Levi-Civita et G.-W. Hill« et »Sur les problèmes fondamentaux de la mécanique céleste«, Bulletin Astronomique, T. XXX, 1913, pp. 425—429, et T. XXXII, 1915, pp. 5—18.

[2] Ou bien, en suivant Jacobi, certaines combinaisons linéaires (dépendant des masses) de ces coordonnées relatives. Nous y reviendrons au n° 6.

D'après le théorème des quantités de mouvement (le barycentre étant censé fixe), la somme des quantités de mouvement des trois corps est nulle. Il s'en suit que la quantité de mouvement (absolue) de O a pour composantes

$$-(p_i + p'_i).$$

La force vive $\mathfrak{T}$ du système est partant la somme

$$\frac{1}{2m_0}\{(p_1+p'_1)^2+(p_2+p'_2)^2+(p_3+p'_3)^2\}+\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2m'}(p'^2_1+p'^2_2+p'^2_3);$$

d'où

$$(1)\qquad \mathfrak{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m'}\right)(p'^2_1+p'^2_2+p'^2_3)+$$
$$+\frac{1}{m_0}(p_1p'_1+p_2p'_2+p_3p'_3)$$

La fonction des forces $\mathfrak{U}$ (formule (18) du Chap. I), avec les notations actuelles, s'écrit

$$(2)\qquad \mathfrak{U}=f\left(\frac{m_0m}{r}+\frac{m_0m'}{r'}+\frac{mm'}{\Delta}\right).$$

La différence

$$(3)\qquad H=\mathfrak{T}-\mathfrak{U},$$

c'est-à-dire l'énergie du système, se présente ainsi comme une fonction des douze variables x_i, x'_i, p_i, p'_i.

Le système canonique

$$(4)\qquad \begin{cases}\dfrac{dp_i}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, & \dfrac{dx_i}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i},\\[2ex] \dfrac{dp'_i}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x'_i}, & \dfrac{dx'_i}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p'_i}\end{cases}\qquad (i=1,2,3),$$

admettant H comme fonction caractéristique et (x_i, p_i), (x'_i, p'_i) comme variables conjuguées, définit le mouvement. C'est la forme particulièrement simple indiquée par Poincaré. L'intégrale des forces vives s'écrit évidemment

$$(5)\qquad H=E\qquad (E\ \text{constante}).$$

2. Transformation de Darboux-Sundman.

Envisageons les mouvements pour lesquels la constante E a une valeur fixée d'avance, et effectuons le premier pas en vue de la régularisation d'un choc

binaire P, O. Tout à fait comme dans le cas du problème restreint [voir le n° 2 du Chap. préc.], il convient de poser

$$dt = r\,du. \tag{6}$$

Les ∞^{11} solutions du système (4) satisfaisant à la condition $H = E$ vérifient également le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp_i}{du} &= -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, & \frac{dx_i}{du} &= \frac{\partial H^*}{\partial p_i}, \\ \frac{dp'_i}{du} &= -\frac{\partial H^*}{\partial x'_i}, & \frac{dx'_i}{du} &= \frac{\partial H^*}{\partial p'_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{7}$$

où

$$H^* = r(H - E). \tag{8}$$

Pour chacune d'elles, H^* prend la valeur zéro.

Remarque.

Soit t_1 l'instant du choc P, O dans le sens précisé au Chap. I. Le n° 14 du même Chapitre nous permets d'affirmer que la nouvelle variable u [introduite moyennant la position (6)] tend en croissant vers une valeur finie u_1, lorsque on fait tendre t à t_1. Le choc binaire dont il s'agit constitue donc, même à l'égard du système transformé (7), une (éventuelle) singularité des fonctions inconnues $x_i(u)$, $p_i(u)$, $x'_i(u)$, $p'_i(u)$ se présentant pour une valeur *finie* u_1, tandis que, pour $u < u_1$ (et assez proche à u_1), tout est régulier.

3. Limite du produit $r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ pour r tendant à zéro.

Plaçons-nous au voisinage d'un choc entre P et O, dans l'hypothèse que le moment résultant des quantités de mouvement des trois corps ne s'annule pas. On est assuré [Chap. I, n° 12] que P' reste à l'écart des deux corps tendant à se choquer, sa vitesse restant également finie. On a reconnu aussi [n° 13 du même Chapitre] que la vitesse de P (soit absolue que relative au corps O) multipliée par $\sqrt{r}$ reste finie. On pourrait en déduire aussitôt (en tenant compte de ce que p_1, p_2, p_3 sont composantes de la quantité de mouvement absolue) que le produit $r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ admet lui aussi une limite finie. Mais il ne vaut pas le peine de faire des emprunts de l'endroit cité. On va le faire ressortir à nouveau de l'intégrale des forces vives.

Posons pour abréger

$$q = \left|\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\right|,$$

$$r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi,$$

(9)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{m_0}\sqrt{r}\left(p'_1\dfrac{p_1}{q} + p'_2\dfrac{p_2}{q} + p'_3\dfrac{p_3}{q}\right) = g, \\ r\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'}\right)(p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3) - \dfrac{f m_0 m'}{r'} - \dfrac{f m m'}{\Delta} - E\right\} = \eta. \end{cases}$$

D'après (1), (2), (3), on a

$$H^* = r(H - E) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}\right)\xi + g\sqrt{\xi} - f m_0 m + \eta.$$

L'équation $H^* = 0$ (du second degré en $\sqrt{\xi}$), avec la spécification $\sqrt{\xi} > 0$, définit univoquement $\sqrt{\xi}$ comme fonction holomorphe des quantités g et η tendant vers la limite (positive)

$$l = \sqrt{\frac{2 f m_0 m}{\dfrac{1}{m_0} + \dfrac{1}{m}}},$$

lorsque g et η convergent à zéro. Or il résulte des (9) (et de la circonstance rappelée ci-dessus que $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{\Delta}$ et les p'_i restent finis, ainsi que les rapports $\frac{p_i}{q}$, qui sont des cosinus directeurs) que g et η s'annulent avec r.

On a partant

$$\lim_{r=0} \sqrt{\xi} = l,$$

ce qui entraîne justement, à cause de la signification de ξ, et de u_1 (voir la remarque finale du n° précédent)

(10)
$$\lim_{u=u_1} r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = l^2 = \frac{2 f m_0 m}{\dfrac{1}{m_0} + \dfrac{1}{m}}.$$

C. Q. F. D.

4. Introduction des variables ξ_i, ϖ_i. — Holomorphisme de l'expression transformée de H^*.

Appliquons maintenant la transformation (I), (II) du Chapitre précédent [n° 5], en remplaçant les six arguments x_i, p_i par les combinaisons ξ_i, ϖ_i; bien entendu sans toucher aux x'_i, p'_i.

Au point de vue formel il y a lieu de noter qu'en transformant ainsi les équations (7), elles restent canoniques avec la même fonction caractéristique, et s'écrivent par conséquent

$$(7') \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varpi_i}{du} = -\dfrac{\partial H^*}{\partial \xi_i}, & \dfrac{d\xi_i}{du} = \dfrac{\partial H^*}{\partial \varpi_i}, \\[2ex] \dfrac{dp'_i}{du} = -\dfrac{\partial H^*}{\partial x'_i}, & \dfrac{dx'_i}{du} = \dfrac{\partial H^*}{\partial p'_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où l'on doit, bien entendu, retenir H^* exprimée à l'aide des arguments ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i.

Voyons ce qui se passe au point de vue qualitatif.

Les formules (19) du Chap. préc., qui sont des conséquences nécessaires des (I), (II), fournissent immédiatement des renseignements très importants sur la manière dont se comportent les ξ_i, ϖ_i dans le cas d'un choc P, O. En associant ces renseignements à l'expression analytique qu'acquiert H^* avec les nouvelles variables, on pourra ensuite reconnaître qu'il en résulte sa régularisation.

Utilisons d'abord les formules (19) susdites, et notamment la première

$$r = \xi \varpi^2.$$

et la troisième

$$r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi.$$

Comme on vient de voir [formule (10)], en proximité d'un choc P, O, ξ *tend vers une limite* l^2 *non nulle.* L'expression de r montre alors que ϖ^2, *et par conséquent* ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 *convergent vers zéro.*

On n'a pas encore le droit d'affirmer que ξ_1, ξ_2, ξ_3 tendent séparément vers des limites bien déterminées, mais il est désormais bien sûr qu'ils restent finis.

Nous profiterons bientôt de ces remarques. Envisageons en attendant un ensemble de valeurs des ξ_i, ϖ_i constituant le voisinage d'un de ces sextuples Γ qu'on a eu l'occasion de considérer au Chap. préc. [nº 6], et qui résultent des valeurs nulles des ϖ_i, non toutes nulles à la fois de ξ_i. Soit D un domaine se rapportant aux douze variables ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i, caractérisé comme on vient de dire (voisinage d'un Γ) par rapport aux ξ_i, ϖ_i, et comprenant le voisinage d'un système quelconque de valeurs finies des x'_i, p'_i, soumises à la seule restriction que les x'_i ne s'annulent pas toutes les trois (P' distinct de O, et par suite aussi de P, dès qu'on conçoit l'extension de D suffisamment petite).

On va constater que, *dans tout domaine* D, H^*, *considérée comme fonction des variables* ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i, *se comporte régulièrement.*

Pour cela, il convient de s'appuyer encore une fois sur les formules (10)

[du Chapitre précédent] pour en tirer à première vue que r, $r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)=\xi$, *et* rp_i *sont, à l'intérieur d'un domaine* D, *des fonctions holomorphes des* ξ_i, ϖ_i.

D'ailleurs, puisque r' et $\varDelta$ ne s'annulent pas dans D, les rapports $\frac{r}{r'}$, $\frac{r}{\varDelta}$ sont, eux aussi, des fonctions holomorphes (des ξ_i, ϖ_i, et des x'_i). Comme on a de (1)

$$(1') \quad r\mathfrak{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m'}\right)r(p'^2_1+p'^2_2+p'^2_3)+\frac{1}{m_0}\sum_1^3 r\,p_i\,p'_i,$$

et de (2)

$$(2') \qquad r\mathfrak{U}=f\left(m_0m+m_0m'\frac{r}{r'}+mm'\frac{r}{\varDelta}\right),$$

les expressions des seconds membres montrent après coup qu'il s'agit de fonctions holomorphes dans D, dépendant dans leur ensemble de toutes nos douze variables.

Dès lors

$$H^*=r(H-E)=r\mathfrak{T}-r\mathfrak{U}-rE$$

apparaît elle aussi une fonction holomorphe des variables ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i dans tout domaine D.

C. Q. F. D.

5. Régularisation d'un choc P, O.

Supposons que, pour u tendant à u_1 (valeur certainement finie d'après la remarque du n° 2), les deux corps P et O tendent à se choquer. Nous pouvons à présent compléter les constatations du n° précédent, en établissant que, pour $u=u_1$, les ξ_i aussi convergent (comme les ϖ_i, x'_i, p'_i) vers des limites bien déterminées. Il suffit pour cela de faire jouer la double circonstance que, pour u_1-u assez petit, les valeurs prises par ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i (le long de la trajectoire dont il s'agit) appartiennent certainement à un domaine D, et que par conséquent les seconds membres des équations (7'), et notamment les $-\frac{\partial H^*}{\partial \varpi_i}$, restent holomorphes, par rapport aux arguments ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i. Dès que, pour $u<u_1$ et assez proche à u_1, ces arguments sont à leur tour des fonctions régulières de u, il en est autant des seconds membres susdits.

D'ailleurs, pour u tendant à u_1, les x'_i, p'_i, ϖ_i tendent [n°s 3 et 4] vers des valeurs limites bien déterminées. Il reste à établir qu'il en est de même pour les ξ_i, en sachant [n° 4] que $\xi=\left|\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\right|$ admet une limite différente de

zéro. Cette circonstance garantit que les seconds membres des ($7'$), fonctions holomorphes de u (à gauche de u_1), restent finis lorsque u converge à u_1. On peut alors raisonner comme au nº 10 du Chap. I. Ces seconds membres, et en particulier $-\frac{\partial H^*}{\partial \varpi_i}$, sont intégrables depuis une valeur quelconque u_0 (assez proche à u_1) jusqu' à u_1. On déduit donc, des équations différentielles

$$\frac{d\xi_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial \varpi_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

elles-même, l'existence des limites pour les ξ_i.

D'après cela, *une solution du système* ($7'$), *même si elle correspond à un choc* P, O, *n'a plus rien de singulier au point de vue analytique.* Il s'agit en effet d'une solution pour laquelle les fonctions inconnues ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i, en correspondance d'une valeur finie u_1 de la variable indépendante, preunent des valeurs bien déterminées tombant dans un domaine D de régularité (pour les seconds membres des équations différentielles).

C. Q. F. D.

Dès que les ξ_i, ϖ_i se comportent régulièrement même pour $u = u_1$, elles tendent à leurs valeurs limites suivant une ligne régulière (de l'espace ξ_i, ϖ_i). Ceci permet de conclure, en revenant aux anciennes variables x_i, p_i [nº 6, équations (20) et (21) du Chap. préc.] que *les deux corps* P, O *tendent à se choquer suivant une direction bien déterminée* (caractérisée par les limites des cosinus directeurs $\frac{x_i}{r}$); *et que la vitesse de chacun d'eux, tout en devenant infinie, admet une direction limite.* A la vérité les équations (21) (du Chap. préc.) établissent ceci pour le vecteur de composantes p_i, c'est-à-dire pour la quantité de mouvement et par suite pour la vitesse *absolue* de P. Pour justifier à tout égard l'énoncé qui précède, on va constater ultérieurement que la vitesse relative de P par rapport à O admet la même direction limite. Cette direction limite appartient alors à toute sorte de vitesse de P et de O (absolue, ou relative d'un d'eux par rapport à l'autre).

On n'a qu'à tenir compte du groupe des équations (4) définissant les $\frac{dx_i}{dt}$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}\right) p_i + \frac{1}{m_0} p'_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Les p'_i restent finies à l'instant du choc, mais non toutes les p_i [d'après (10)]. Il s'en suit que la vitesse relative de P par rapport à O (vecteur de

composantes $\left.\frac{dx_i}{dt}\right)$ a la même direction limite que la vitesse absolue du même point P $\left(\text{vecteur ayant pour composantes } \frac{1}{m} y_i\right)$.

6. Forme canonique de Jacobi. — Régularisation tout à fait analogue qu'on peut lui faire subir.

Nous avons pris les équations du mouvement sous la forme canonique de Poincaré [n° 1]. Il est aisé de se rendre compte qu'il n'y a rien d'essentiel à modifier dans les considérations de ce Chapitre si l'on préfère d'adopter les équations canoniques de Jacobi.

En effet les douze fonctions inconnues figurant dans ces équations sont: les trois coordonnées x_i de P par rapport à O, comme dans l'autre cas; et neuf autres — je continuerai à les appeler p_i, x'_i, p'_i — qui ont une signification différente. Il n'est pas nécessaire de la spécifier, sauf pour les x'_i. Celles-ci [comparez Chap. I, n° 4] sont les coordonnées de P' par rapport au barycentre B des deux autres corps P et O. Les coordonnées de B par rapport à O sont αx_i, où la constante (numérique) α n'est que la fraction $\frac{m}{m_0+m}$. Il s'en suit que les coordonnées de P' rapportées également à O (c'est-à-dire nos anciennes x'_i) sont données par

$$\alpha x_i + x'_i;$$

et l'on a

$$(11) \qquad \begin{cases} r'^2 = \sum_1^3 {}_i (\alpha x_i + x'_i)^2, \\ l^2 = \sum_1^3 {}_i \{(1-\alpha) x_i - x'_i\}^2. \end{cases}$$

La force vive $\mathfrak{T}$ s'exprime ici encore moyennant les y_i et les p'_i, mais sans termes rectangles, sous la forme

$$(12) \qquad \mathfrak{T} = \frac{1}{2}\mu(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2}\mu'(p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3),$$

les coefficients μ et μ' dépendant exclusivement des masses:

$$\mu = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}, \quad \mu' = \frac{M}{m'(m_0+m)} \quad (M = m_0 + m + m').$$

La fonction des forces est toujours

$$(2) \qquad \mathfrak{U} = f\left(\frac{m_0 m}{r} + \frac{m_0 m'}{r'} + \frac{m m'}{\Delta}\right),$$

r' et Δ étant toutefois les fonctions (11) des x et des x'. On a bien entendu

$$H = \mathfrak{T} - \mathfrak{U},$$

après quoi le système canonique définissant le mouvement s'écrit encore sous la forme (4), d'où l'on arrive à (7) moyennant la transformation de Darboux-Sundman.

Au point de vue qualitatif, tout se passe comme précédemment: lorsque les deux corps P et O tendent à se choquer, r tend à zéro, tandis que r' et Δ convergent vers une limite positive. Il s'en suit [comme au n⁰ 3] que les arguments x'_i, p'_i ont des limites finies, et [encore plus simplement qu'au n⁰ 3, à cause de (12)] que

$$\lim_{u = u_1} r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \frac{2 f m_0 m}{\mu} = \frac{2 f m_0 m}{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m}}.$$

La transformation (I), (II) et les raisonnements des n°s 4 et 5 s'appliquent (sans qu'il soit même nécessaire d'invoquer la circonstance que les $r p_i$ sont des fonctions holomorphes des ξ_i, ϖ_i), et le voisinage du choc binaire P, O reste également régularisé.

7. Le paramètre symétrique τ et la régularisation complète du mouvement. — Corollaire.

Considérons le produit

$$r\mathfrak{U} = f\left(m_0 m + m_0 m' \frac{r}{r'} + m m' \frac{r}{\Delta}\right)$$

comme fonction des variables ξ_i, ϖ_i, x'_i, p'_i (ces dernières n'interviennent pas). Ainsi qu'on l'a fait remarquer au n⁰ 4, il se comporte régulièrement au voisinage d'un choc P, O, état de choc compris, et ne s'y annule pas: en effet, pour $r = 0$, $r\mathfrak{U}$ se réduit à $f m_0 m$.

Il s'en suit, en tenant compte de (6), que le paramètre τ, défini (à une constante inessentielle près) par la relation différentielle

$$(13) \qquad d\tau = r\mathfrak{U}\, du = \mathfrak{U}\, dt,$$

peut rendre les mêmes services que u dans le domaine susdit, avec l'avantage, évident à cause de sa structure symétrique, de s'appliquer également aux autres chocs binaires éventuels: partout ailleurs, cela va sans dire, la substitution de τ à t comme variable indépendante est parfaitement légitime, puisque Π demeure fini et > 0.

La substitution de τ à u dans le système différentiel (7) (ayant égard à la circonstance que, pour les solutions qu'on a à considérer, $H^* = 0$) laisse subsister la forme canonique, pourvu qu'on remplace H^* par $\frac{1}{r\Pi} H^*$. On a partant le système

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_i}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i}, & \dfrac{dx_i}{d\tau} = \dfrac{\partial F}{\partial p_i}, \\[2ex] \dfrac{dp'_i}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial x'_i}, & \dfrac{dx'_i}{d\tau} = \dfrac{\partial F}{\partial p'_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où

$$(15) \qquad F = \frac{1}{r\Pi} H^* = \frac{1}{\Pi}(H - E),$$

et l'on doit se borner aux solutions pour lesquelles $F = 0$.

La seconde expression de F montre immédiatement que c'est une fonction régulière des variables x_i, p_i, x'_i, p'_i tant que les positions des trois corps sont distinctes; au voisinage d'un choc P, O, la transformation (I), (II) rétablit la régularité, ainsi qu'il résulte de la première expression de F et des n°s 4, 5; enfin, au voisinage d'un autre choc binaire (P', O, ou P, P'), on régularise d'une manière analogue, à cause de la symétrie substantielle de $F = \frac{1}{\Pi}(H - E)$ par rapport aux trois corps: il suffit de combiner une convenable transformation linéaire sur les x, x', p, p' (équivalente à un échange de rôle des trois corps) avec la même transformation (I), (II).

On a donc le droit d'affirmer que le système differentiel (14) est ou bien régulier, ou bien régularisable par une simple transformation canonique des fonctions inconnues, quelle que soit la valeur de τ, c'est-à-dire pour toute la durée du mouvement, même au delà des chocs, s'ils en arrivent.

Corollaire.

Les coordonnées des trois corps, lorsqu'elles ne figurent pas directement parmi les fonctions inconnues, sont (d'après (I), (II) et des formules élémentaires de transformation de coordonnées) des fonctions holomorphes des auxiliaires servant

à régulariser. Il en résulte que *les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et* [d'après (13)] *aussi le temps t sont des fonctions du paramètre τ, régulières pour toutes les valeurs réelles de ce paramètre, qui correspondent biunivoquement à toutes les valeurs réelles du temps.* C'est la conclusion, bien connue aujourd'hui de M. Sundman,[1] laquelle a nettement scellé toute une catégorie de recherches anciennes et modernes.

8. Complément formel qui reste encore à élaborer.

Considérons, pour commodité de langage, un espace S à douze dimensions en correspondance biunivoque avec les systèmes de valeurs des douze variables x_i, p_i, x'_i, p'_i figurant comme inconnues dans les équations différentielles (14).

Dès qu'on suppose le moment résultant K des quantités de mouvement différent de zéro, on peut exclure [Chap. I, n⁰ 11] un domaine de S entourant (pour ainsi dire) les collisions générales. Et il devient loisible de partager par la pensée la partie restante de S (qui peut être atteinte effectivement pendant un mouvement correspondant à des valeurs déterminées de K et de E) en quatre régions: trois voisinages des chocs binaires, S_1, S_2, S_3, et une quatrième S_0, dans laquelle les distances mutuelles ne descendent pas au dessous d'une certaine limite.

D'apres le n⁰ précédent le système différentiel (14) se comporte régulièrement: dans S_0 déjà par rapport aux variables x_i, p_i, x'_i, p'_i qui y figurent directement; dans chacun des S_ν ($\nu = 1, 2, 3$) par rapport à douze combinaisons (canoniques) convenables des mêmes variables.

On peut évidemment (dans une infinité de manières) choisir 12 paramètres canoniques

$$y_h, \quad q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, 6)$$

définissant l'état de mouvement des trois corps, doués de la propriété que la fonction caractéristique F se comporte régulièrement, par rapport aux arguments y_h, q_h, dans toutes nos quatre régions S_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$). Il suffit par ex. que y_h; q_h coïncident avec les x_i, x'_i; p_i, p'_i dans S_0, avec les combinaisons canoniques régularisantes dans S_ν, à l'exception de très petites couches S^*_ν de ces dernières, tout près de leur frontière avec S_0. Dans S^*_ν, soit les x_i, p_i, x'_i, p'_i, soit les combinaisons qui se rapportent à S_ν assurent la régularité du système (14), et on peut, sans la gêner jamais, imaginer à son gré une transition graduelle et canonique des unes aux autres.

Ceci en concept; mais il y a lieu de désirer un choix plus concret et plus expressif de ces paramètres. Je me borne à signaler la question. Une idée de

[1] Loc. cit.

sa nature et des ressources formelles auxquelles il faudrait vraisemblablement avoir recours est offerte par ce qui arrive dans le cas particulier du problème plan. Pour ce cas [où les substitutions régularisantes appartiennent à un type encore plus élémentaire que (I), (II)], la question dont il s'agit a été effectivement traitée avec tous les développements qu'elle comporte.[1]

Padoue, Août 1917.

Table des matières.

[1] Renvoi à la citation (2) de la page 100.

CHAPITRE III.

Régularisation explicite du voisinage d'un choc binaire.

ÜBER POTENZREIHEN MIT VORGESCHRIEBENEN ANFANGSGLIEDERN.

VON

FRIEDRICH RIESZ

in KOLOZSVÁR.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit befasse ich mich in erster Reihe mit dem folgenden Problem: *Wir betrachten sämtliche innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktionen $f(z)$, deren Potenzreihenentwicklung mit den vorgeschriebenen Gliedern*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

beginnt. Wir bilden das über den Einheitskreis erstreckte Integral

$$I[f] = \int_{|z|=1} |f(z)|\,|dz| = \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|\,dt$$

und fragen, ob es unter den betrachteten Funktionen eine solche gibt, für die der Integralwert $I[f]$ möglichst klein ausfällt? Wenn ja, welche sind die weiteren Eigenschaften dieser Funktion?

Unser Problem wird vielleicht anziehender erscheinen, sobald wir es auch geometrisch deuten. Es sei $F(z)$ eine Integralfunktion von $f(z)$. Die Gleichung

$$v = F(z)$$

definiert eine konforme Abbildung des Kreises $|z| \leq 1$ auf ein Gebiet der v-Ebene resp. auf ein RIEMANN'sches Flächenstück. Das Flächenstück wird durch die Kurve

$$v = F(e^{it}) = \xi(t) + i\,\eta(t) \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

begrenzt, und das Integral

$$I[f] = \int\limits_{|z|=1} |F'(z)|\,|dz| = \int\limits_0^{2\pi} \Big[[\xi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2\Big]^{\frac{1}{2}} dt$$

ist die *Länge* dieser Kurve.

Da nun zugleich mit $f(z)$ auch $F(z)$, und umgekehrt, mit $F(z)$ auch $f(z) = F'(z)$ innerhalb und auf dem Einheitskreise regulär ausfallen, da ferner das Flächenstück bis auf eine Verschiebung von der Wahl der Integrationskonstanten unabhängig ist, speziell also die Länge der Randkurve von der Integrationskonstante nicht abhängt, so können wir unser Problem auch in folgender Form aussprechen:

Wir betrachten sämtliche innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktionen $F(z)$, deren Potenzreihenentwicklung mit den vorgeschriebenen Gliedern

$$A_0 + A_1 z + \cdots + A_{n+1} z^{n+1}$$

beginnt. Gibt es unter diesen Funktionen eine solche, für welche die Länge der Kurve $v = F(e^{it})$ möglichst klein ausfällt? Wenn ja, welche sind die weiteren Eigenschaften dieser Funktion?

Unser Problem reiht sich an jene wohlbekannte Extremalprobleme für Potenzreihen mit vorgeschriebenen Anfangsgliedern an, die aus den Untersuchungen des Herrn CARATHÉODORY über die PICARD-LANDAU'schen Sätze emporgegangen sind. Hierher gehört auch jenes von den Herren CARATHÉODORY und FEJÉR in einer gemeinsamen Arbeit behandelte Problem, welches sich von unserem dadurch unterscheidet, dass nicht das Integral, sondern der *Maximalwert* von $|f(z)|$ möglichst klein zu machen ist.[1] Dieses Problem wurde neuerdings auch durch Herrn GRONWALL behandelt, u. zw. in derart elementarer Weise, dass eine weitere Vereinfachung kaum zu leisten wäre.[2] Wenn ich dennoch im letzten §. dieser Arbeit auf das CARATHÉODORY-FEJÉR'sche Problem zurückkehre und die in den vorangehenden Untersuchungen entwickelte Methode auch auf dieses Problem anwende, so ist dies dadurch gerechtfertigt, weil hiedurch die beiden anscheinend weit entfernten Probleme miteinander eng verknüpft erscheinen.

[1] C. CARATHÉODORY u. L. FEJÉR, *Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koefficienten* etc., Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, t. XXXII (2° sem. 1911), p. 232.

[2] T. H. GRONWALL, *On the maximum modulus of an analytic function*, Annals of mathematics, 2° ser., vol. 16 (1914—1915), p. 77.

Ich bemerke noch, dass das erste Problem, indem man darin $f(z)$ durch $f(z)z^{-n-1}$ ersetzt, was ja auf das Integral $I[f]$ ohne Einfluss ist, folgendermassen formuliert werden kann: Die rationale Funktion

$$\frac{a_0}{z^{n+1}} + \frac{a_1}{z^n} + \cdots + \frac{a_n}{z}$$

ist durch eine innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktion in dem Sinne zu approximieren, dass das über den Einheitskreis erstreckte Integral der absolut genommenen Differenz möglichst klein ausfalle. Das allgemeinere, d. i. sich auf eine derartige Approximation einer beliebig gegebenen rationalen Funktion beziehende Problem lässt sich durch unsere Methode äusserst ähnlich behandeln.

§ 1.

Nehmen wir zunächst ohne Beweis an, dass es unter den Funktionen $f(z)$, die sich innerhalb und auf dem Einheitskreise regulär verhalten, und deren Potenzreihenentwicklung mit den vorgeschriebenen Gliedern

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

beginnt, tatsächlich eine gibt, für welche das Integral

$$I[f] = \int\limits_{|z|=1} |f(z)|\,|dz| = \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|\,dt$$

möglichst klein wird. Wir bezeichnen diese Minimalfunktion mit $f^*(z)$. Wir können auch ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_0 \neq 0$ voraussetzen; denn wäre $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$, so liesse sich, indem man $f(z)$ durch $f(z)z^{-k}$ ersetzt, das Problem auf das entsprechende Problem bezüglich der Anfangsglieder

$$a_k + a_{k+1} z + \cdots + a_n z^{n-k}$$

zurückführen.

Es bedeute nun λ ein beliebig veränderliches Parameter, p irgend eine ganze Zahl $> n$. Dann setzt die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = f^*(z)\,(1 + \lambda z^p)^2$$

ebenfalls mit den vorgeschriebenen Anfangsgliedern an, und da auf dem Einheitskreise

$$|(1+\lambda z^p)^2| = (1+\lambda z^p)(1+\bar{\lambda} z^{-p}) = 1 + \lambda z^p + \bar{\lambda} z^{-p} + |\lambda|^2$$

ist, so wird

$$\int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\,|dz| \leqq \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\,(1 + \lambda z^p + \bar{\lambda} z^{-p} + |\lambda|^2)\,|dz|.$$

Somit ist, wenn

$$I^* = I[f^*],\ I_p = \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\, z^p\, |dz|;\ \bar{I}_p = \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\, z^{-p}\, |dz|$$

gesetzt wird, die HERMITE'sche Form

$$I_p \lambda + \bar{I}_p \bar{\lambda} + I^* |\lambda|^2$$

nicht-negativ. Also muss ihre Determinante $\geqq 0$ ausfallen, d. h. es ist

$$-I_p \bar{I}_p = -|I_p|^2 \geqq 0.$$

Augenscheinlich kann aber hier nur das Gleichheitszeichen gelten; also ist genau

$$I_p = \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\, z^p\, |dz| = 0$$

für alle $p > n$.

Dieses Resultat können wir auf folgende Weise deuten. Wir setzen darin $z = e^{it}$, also $z^p = \cos pt + i \sin pt$, $|dz| = dt$ und zerlegen in reellen und imaginären Teil; dann besagt unsere Identität, dass in der FOURIER'schen Entwicklung der stetigen, nach 2π periodischen Funktion $|f^*(e^{it})|$ für alle Indices $p > n$ die Koeffizienten verschwinden, mit anderen Worten: *die Funktion* $|f^*(e^{it})|$ *ist ein trigonometrisches Polynom höchstens n-ter Ordnung.*

Kehren wir nun zur Veränderlichen z zurück! Dann lässt sich die soeben ausgesprochene Tatsache auch so deuten, dass die Funktion $|f^*(z)|\, z^n$ längs des Einheitskreises mit einem rationalen Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung $P(z)$ zusammenfällt. Ich behaupte, dass jede innerhalb oder auf dem Einheitskreise gelegene Nullstelle von $f^*(z)$ zugleich eine Nullstelle von $P(z)$ ist, u. zw. von wenigstens derselben Ordnung wie für $f^*(z)$. Für Nullstellen auf dem Einheitskreise folgt die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelbar aus der Identität

$$P^2(z) = f^*(z)\, \bar{f}^*\!\left(\frac{1}{z}\right) z^{2n},$$

wo $\bar{f}^*$ die durch jene Potenzreihe dargestellte Funktion bezeichnet, welche aus der Potenzreihe für $f^*(z)$ dadurch hervorgeht, dass man die Koeffizienten durch die konjugiert komplexen Grössen ersetzt, und somit $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ die durch die entsprechende, nach negativen Potenzen von z fortschreitende Reihe dargestellte Funktion bedeutet. Da auf dem Einheitskreise die Werte z und $\frac{1}{\bar{z}}$ zueinander konjugiert sind, so sind es auch die Werte $f^*(z)$ und $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$; also ist $f^*(z)\,\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) = |f^*(z)|^2$. Somit besteht jene Identität tatsächlich längs des Einheitskreises, und da auf beiden Seiten regulär analytische Funktionen stehen, so besteht sie auch in der Umgebung des Einheitskreises, speziell in der Umgebung einer jeden auf dem Einheitskreise gelegenen Nullstelle α. Nun ist aber $\alpha = \frac{1}{\bar{\alpha}}$ auch Nullstelle von $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$, u. zw. von derselben Ordnung wie für $f^*(z)$; somit ist auf Grund obiger Identität α auch für $P(z)$ eine Nullstelle von derselben Ordnung wie für $f^*(z)$.

Es sei nun α eine innerhalb des Einheitskreises gelegene Nullstelle k-ter Ordnung von $f^*(z)$. Es bedeute λ wieder ein beliebig veränderliches Parameter, h eine positive ganze Zahl $\leqq k$. Dann ist die Funktion

$$f(z) = f^*(z)\left(1 + 2\lambda \frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}\right)$$

innerhalb und auf dem Einheitskreise regulär und ihre Potenzreihe beginnt mit den vorgeschriebenen Anfangsgliedern. Somit ist $I[f] \geqq I[f^*]$. Andererseits ist

$$I[f] = \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)| \left|1 + 2\lambda \frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}\right| |dz| \leqq \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)| \left[\left|1 + \lambda \frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}\right|^2 + |\lambda|^2 \left|\frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}\right|^2\right] |dz|$$

$$= \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)| \left(1 + \lambda \frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h}\right)\left(1 + \bar{\lambda} \frac{z^{-n-1}}{\left(\frac{1}{z} - \bar{\alpha}\right)^h}\right) |dz| + |\lambda|^2 \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)| \frac{|dz|}{|z-\alpha|^{2h}}$$

$$= I[f^*] + J_h \lambda + \bar{J}_h \bar{\lambda} + 2 K_h |\lambda|^2,$$

wo

$$J_h = \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)| \frac{z^{n+1}}{(z-\alpha)^h} |dz|$$

und

$$K_h = \int\limits_{|z|=1} |f^*(z)| \frac{|dz|}{|z-\alpha|^{2h}}$$

gesetzt wurde. Demnach ist die HERMITE'sche Form

$$J_h \lambda + J_h \lambda + 2\,K_h |\lambda|^2$$

nicht-negativ, woraus ähnlich, wie vormals für I_p, das Verschwinden von J_h folgt. D. h. da $|f^*(z)|z^n = P(z)$ und $z|dz| = -i dz$ ist, so wird

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{P(z)}{(z-\alpha)^h} dz = i J_h = 0$$

für $h = 1, 2, \ldots, k$; also ist α für $P(z)$ eine Nullstelle von wenigstens k-ter Ordnung.

Wir haben also bewiesen, dass $|f^*(z)|z^n$ längs des Einheitskreises mit einem rationalen Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung $P(z)$ übereinstimmt und dass alle innerhalb oder auf dem Einheitskreise gelegenen Nullstellen von $f^*(z)$ auch Nullstellen von $P(z)$ sind u. zw. wenigstens von derselben Ordnung wie für $f^*(z)$. Diese Resultate gestatten es nun, uns über die Struktur der Funktion $f^*(z)$ näher zu orientieren. Zunächst definiert nämlich die Identität

$$P^2(z) = f^*(z) \bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) z^{2n}$$

die Funktion $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung für alle z innerhalb des Einheitskreises:

$$\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{P^2(z)}{z^{2n} f^*(z)} = z^{-2n}\left(\frac{P(z)}{f^*(z)}\right)^2 f^*(z) = z^{-2n} Q^2(z) f^*(z),$$

wo $Q = \frac{P}{f^*}$ dem über die Nullstellen von P und von f^* erhaltenen Resultate gemäss innerhalb und auf dem Einheitskreise regulär ist. Demnach ist daselbst auch die Funktion $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ regulär bis auf den Punkt $z = 0$, der für sie ein Pol höchstens $2n$-ter Ordnung ist. Ersetzen wir $\frac{1}{z}$ durch ζ, so ist also die Funktion $\bar{f}^*(\zeta)$ für alle ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Punkte ζ definiert; sie ist

auch überall regulär und besitzt nur im Unendlichen einen Pol höchstens von der $2n$-ten Ordnung. Also ist $f^*(z)$ und somit auch $f^*(z)$ *ein rationales Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung*. Was die Nullstellen dieses Polynoms betrifft, so sei zunächst α eine innerhalb des Einheitskreises gelegene Nullstelle k-ter Ordnung. Da laut Voraussetzung $a_0 \neq 0$ ist, so ist auch $\alpha \neq 0$. Die Identität

$$\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-2n} Q^2(z) f^*(z)$$

besagt nun, dass α auch für $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ eine Nullstelle wenigstens von der k-ten Ordnung sein muss, u. zw. genau von der k-ten Ordnung, wenn $Q(\alpha) \neq 0$, sonst aber ist ihre Ordnungszahl um eine gerade Zahl höher. Ausser den Nullstellen α von $f^*(z)$ kann ferner $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ noch weitere Nullstellen innerhalb des Einheitskreises besitzen, nämlich die von den α verschiedenen Nullstellen β von $Q(z)$; dieselben sind wegen des Faktors Q^2 für $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ Nullstellen von gerader Ordnungszahl. Nun aber entspricht jeder innerhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstelle α oder β der Funktion $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ je eine ausserhalb des Kreises gelegene Nullstelle von $f^*(z)$, nämlich $\frac{1}{\alpha}$ bez. $\frac{1}{\beta}$, u. zw. sind diese Nullstellen von derselben Ordnung wie die entsprechenden Nullstellen von $\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)$. Damit haben wir gezeigt, dass die innerhalb und ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstellen von $f^*(z)$ nach der folgenden Regel verteilt sind: *Zugleich mit jeder im Innern gelegenen Nullstelle α ist auch ihr Spiegelbild $\frac{1}{\alpha}$ eine Nullstelle u. zw. von derselben oder um eine gerade Zahl höheren Ordnung; die eventuell noch ausserdem ausserhalb des Einheitskreises auftretenden Nullstellen sind von gerader Ordnung.*

Was schliesslich die auf dem Einheitskreise gelegenen Nullstellen betrifft, so haben wir gesehen, dass diese auch für $P(z)$ Nullstellen von genau derselben Ordnung sind; nun ist aber die Funktion $P(z)z^{-n} = |f^*(z)|$ längs des Einheitskreises reell und nicht negativ; sie kann daher dort nur Nullstellen gerader Ordnung zulassen. Somit *sind alle auf dem Einheitskreise gelegenen Nullstellen von $f^*(z)$ von gerader Ordnungszahl.*

Zusammenfassend können wir auch so sagen: *Die Funktion $f^*(z)$ ist ein rationales Polynom höchstens der $2n$-ten Ordnung, und ihre Nullstellen lassen sich derart*

zu Paaren anordnen, dass die beiden Elemente je eines dieser Paare entweder identisch und auf dem Einheitskreise oder ausserhalb derselben gelegen, oder aber Spiegelbilder von einander in bezug auf den Einheitskreis sind.

§ 2.

Bisher haben wir die Existenz einer Minimalfunktion $f^*(z)$ ohne Beweis vorausgesetzt. Um den Beweis zu erbringen, könnte man es mit dem folgenden, bei ähnlichen Problemen bewährten Verfahren versuchen. Es sei I^* die untere Grenze der Integralwerte $I[f]$; dann gibt es eine Folge $f_1, f_2, \ldots$, für welche $I[f_n] \to I^*$. Man kann leicht zeigen, dass entweder schon diese Folge *innerhalb* des Einheitskreises einer daselbst regulären Funktion $f^*(z)$ zustrebt, oder aber dies jedenfalls für eine entsprechend ausgewählte Teilfolge der Fall ist. Man sieht ferner auch leicht ein, dass die Potenzreihe für $f^*(z)$ ebenfalls mit den vorgeschriebenen Anfangsgliedern ansetzt, wie auch, dass für jeden Kreis $|z| = r$, dessen Radius r *kleiner* als 1 ist,

$$\int_{|z|=r} |f^*(z)|\,|dz| < I^*$$

ist. Es sind nämlich die Koeffizienten der Potenzreihen für die Funktionen f_n wie auch diese Funktionen selbst mit Hilfe der CAUCHY'schen Integralausdrücke leicht aus $I[f_n]$ abzuschätzen; die Funktionen selbst jedoch nur im *Innern* des Einheitskreises. Auf dem Einheitskreise, auch wenn wir die vorgeschriebenen Anfangsglieder in Betracht ziehen, ergibt diese Abschätzung überhaupt nichts. Keinesfalls tritt also durch dieses Verfahren das reguläre Verhalten von $f^*(z)$ *längs des Einheitskreises* in Evidenz. Andererseits aber haben wir dieses reguläre Verhalten bisher nicht nur in unserer Problemstellung gefordert, sondern auch, wenigstens anscheinend, in den vorangehenden Untersuchungen wesentlich ausgenützt.

Lassen wir nun die Forderung des regulären Verhaltens auf dem Einheitskreise selbst bis auf weiteres fallen und ersetzen wir sie durch eine allgemeinere, unserem Minimalproblem besser angepasste Forderung. Indem wir dann wieder an ein rationales Polynom gelangen, so wird dies, da es sich ja überall regulär verhält, auch eine Lösung unseres ursprünglichen Problems ergeben.

Wollen wir unsere neue Forderung unserem Minimalproblem möglichst anpassen, so empfiehlt es sich, an die zweite Formulierung des Problems anzuknüpfen. Es handelt sich in dieser Formulierung darum, die Länge der Kurve $v = F(e^{it})$

$(0 \leq t \leq 2\pi)$, d. h. also die *totale Schwankung* der Funktion $F(e^{it})$ möglichst klein zu machen. Beschränktheit der Schwankung bedingt noch keineswegs reguläres Verhalten; so z. B. sind die den Einheitskreis auf ein endliches Polygon oder allgemeiner, auf ein von einer einfach geschlossenen rektifizierbaren Kurve begrenztes Gebiet konform abbildenden Funktionen auf dem Rande nicht überall regulär, doch von beschränkter Schwankung.

Betrachten wir also sämtliche *innerhalb des Einheitskreises reguläre und beschränkte Funktionen $F(z)$, für welche die Randwerte $F(e^{it})$ existieren und eine Funktion von beschränkter Schwankung ausmachen.* Die Existenz der Randwerte verlangen wir im Sinne radialer Annäherung: $F(re^{it}) \rightarrow F(e^{it})$. Wir können jedoch sofort hinzufügen, dass diese Präzisierung eigentlich überflüssig ist. Es sind nämlich die soeben gekennzeichneten Funktionen *auch auf dem Einheitskreise, also für $|z| \leq 1$ ausnahmslos stetig.* Dies folgt keineswegs unmittelbar aus der beschränkten Schwankung, denn Funktionen beschränkter Schwankung lassen ja noch abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen zu. Nun können aber bekanntlich diese Unstetigkeitsstellen, wenn sie auftreten, nur solche erster Art sein. Dass andererseits auch solche bei den Randwerten $F(e^{it})$ ausgeschlossen sind, ist in dem allgemeinen Satze enthalten, wonach die Randfunktion einer regulären und beschränkten Funktion keine Unstetigkeitsstellen *erster Art* zulässt.[1]

Zu derselben Funktionenklasse gelangen wir auch, indem wir alle jene nach 2π periodische Funktionen beschränkter Schwankung $F(e^{it})$ von t betrachten, deren FOURIER'sche Reihe sich als eine nach *positiven* Potenzen von e^{it} fortschreitende Reihe auffassen lässt, d. i. wo die Sinuskoeffizienten die i-fachen der entsprechenden Cosinuskoeffizienten sind. In Formeln

[1] A. PRINGSHEIM, *Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise*, Sitzungsber. d. math.-phys. Cl. d. k. bay. Akademie d. Wiss. zu München, 1900, Heft 1., p. 96—98; P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta mathematica 30 (1906), p. 363; E. LINDELÖF, *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme*, Acta Soc. Scient. Fennicae, Tom. XLVI, N° 4 (1915), p. 7.

Laut mündlicher Mitleitung des Herrn L. FEJÉR kann man den Satz auch durch folgende einfache Überlegung begründen: Die Potenzreihe einer beschränkten Funktion ist auch eine FOURIER'sche Reihe für die Randfunktion und ist daher an einer Unstetigkeitsstelle erster Art durch arithmetische Mittel summierbar. Daraus folgt nach dem verallgemeinerten ABEL-FROBENIUS'schen Satze, dass bei jeder beliebigen geradlinigen Annäherung jener Stelle aus dem Inneren des Kreises die Funktion *ein und demselben* Grenzwerte, nämlich der Reihensumme zustrebt. Andererseits sind $F(x+iy)$ oder, wenn es beliebt, Reell- und Imaginarteil derselben harmonische Funktionen; der Grenzwert einer harmonischen Funktion an einer Unstetigkeitsstelle erster Art variirt aber mit dem Einfallswinkel und ist bei verschiedenen Geraden *verschieden*.

Wir möchten noch bemerken, dass der Satz in den folgenden Ausführungen nicht wesentlich benützt wird; jedenfalls gestattet er uns, beim Rechnen mit $F(e^{it})$ auf eine gewisse Vorsicht zu verzichten, die bei Auftreten von Unstetigkeitsstellen angemessen wäre.

$$\int_0^{2\pi} F(e^{it})\, e^{ikt}\, dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Schreibt man in der FOURIER'schen Reihe einer solchen Funktion z an Stelle von e^{it}, also z^m an Stelle von e^{imt}, so erhält man die Potenzreihe je einer Funktion $F(z)$. Auf Grund der klassischen Resultate über die FOURIER-Reihe der Funktionen beschränkter Schwankung konvergiert unsere Potenzreihe nicht nur im Inneren des Einheitskreises, sondern auch auf demselben u. zw. gegen die Randfunktion. Da ferner diese laut obiger Bemerkung nicht nur von beschränkter Schwankung, sondern auch stetig ist, so ist die Konvergenz überall gleichmässig.

Wir greifen nun aus der Gesamtheit der soeben definierten Funktionen $F(z)$ jene heraus, deren *Potenzreihenentwicklung mit den vorgegebenen Gliedern*

$$A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_{n+1} z^{n+1}$$

beginnt, wo

$$A_1 = a_0,\ A_2 = \frac{a_1}{2},\ \ldots,\ A_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

gesetzt wurde. Wir bezeichnen mit $T[F]$ die totale Schwankung der Funktion $F(e^{it})$ oder mit anderen Worten das Integral

$$\int_{|z|=1} |dF|$$

Es sei T^* die untere Grenze der Werte $T[F]$. Dann gibt es eine Folge $F_1, F_2, \ldots$, für welche $T[F_k] \to T^*$. Die Funktionen $F_k(e^{it})$ sind *in ihrer Gesamtheit von beschränkter Schwankung*, d. h. ihre totalen Schwankungen liegen unterhalb einer gemeinsamen Schranke. Ferner sind diese Funktionen *in ihrer Gesamtheit beschränkt;* da nämlich

$$\int_0^{2\pi} F_k(e^{it})\, dt = 0$$

ist, so können weder der reelle, noch der imaginäre Teil von $F_k(e^{it})$ von konstantem Vorzeichen sein und es sind daher beide Teile dem absoluten Werte nach $\leq T[F_k]$.

Nach dem Satze von HELLY[1] enthält jede Folge, die in ihrer Gesamtheit beschränkt und von beschränkter Schwankung ist, *eine überall konvergente Teilfolge.*

[1] E. HELLY, *Über lineare Funktionaloperationen,* Sitzungsber. d. kais. Akademie d. Wiss., Wien, Bd. CXXI (1912) Abt. II a, p. 283.

Wenden wir diesen Satz auf unsere Folge $\{F_k\}$ an; sei $\{F^{(k)}\}$ eine überall konvergente Teilfolge und $F^*(e^{it})$ ihre Grenzfunktion; dann ist für jede Einteilung $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_r = t_0$ des Einheitskreises

$$\sum_{m=0}^{r-1} |F^*(e^{it_{m+1}}) - F^*(e^{it_m})| = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{r-1} |F^{(k)}(e^{it_{m+1}}) - F^{(k)}(e^{it_m})| \leq \lim_{k\to\infty} T[F^{(k)}] = T^*;$$

d. h. die Funktion $F^*(e^{it})$ ist ebenfalls von beschränkter Schwankung und ihre totale Schwankung ist $\leq T^*$. Da ferner die FOURIER-Koeffizienten von F^*, als Grenzfunktion der beschränkten Folge $\{F^{(k)}\}$, sich als Grenzwerte der entsprechenden Koeffizienten der $F^{(k)}$ ergeben, so ist auch die FOURIER-Reihe von F^* vom Potenzreihentypus und die entsprechende Potenzreihe für $F^*(z)$ beginnt ebenfalls mit den vorgeschriebenen Anfangsgliedern. Hieraus folgt auch noch, dass die totale Schwankung von $F^*(e^{it})$ nicht kleiner sein kann, als die untere Grenze T^*; also ist genau

$$T[F^*] = T^*.$$

Damit ist gezeigt, dass *es unter den betrachteten Funktionen $F(z)$ sicher eine gibt, für welche die totale Schwankung möglichst klein wird.*

§ 3.

Wir untersuchen nun die totale Schwankung der Funktion F^* auf dem von $z = 1$ nach $z = e^{it}$ führenden *Bogen* des Einheitskreises als Funktion der Veränderlichen t. Es wird sich ergeben, dass diese Funktion — von einem linearen Gliede abgesehen — ein *trigonometrisches Polynom* höchstens n-ter Ordnung ist.

Wir beginnen mit einigen Überlegungen allgemeiner Art. Es sei $F(z)$ irgend eine Funktion vom betrachteten Typus, $g(z)$ eine innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktion. Wir bilden die Funktion

$$H(z) = \int_0^z F'(z)\, g(z)\, dz = \int_0^z g(z)\, dF(z) = F(z)\, g(z) - F(0)\, g(0) - \int_0^z F(z)\, g'(z)\, dz.$$

Auf Grund des letzten Ausdrucks kann die Integration längs eines beliebigen, innerhalb oder teilweise auch auf dem *Rande* führenden Wege geschehen; der Wert des Integrals ist von dem Integrationswege unabhängig. *Die Funktion $H(z)$ ist beschränkt, im Kreisinneren regulär, auf dem Rande aber von beschränkter Schwankung.* Das reguläre Verhalten im Kreisinneren lässt sich aus allen der 3 Inte-

gralausdrücke, die Beschränktheit aus dem letzten unmittelbar ablesen; die beschränkte Schwankung der Randfunktion ergibt sich leicht aus dem mittleren, wie auch aus dem letzten Ausdruck, z. B. aus dem letzteren dadurch, dass man bemerkt, dass Produkt und Differenz zweier Funktionen beschränkter Schwankung, ferner das Integral einer stetigen (oder beschränkten oder auch nur integrierbaren) Funktion ebenfalls Funktionen beschränkter Schwankung sind. Aus dem mittleren Ausdrucke ergibt sich auch der genaue Wert der totalen Schwankung von $H(z)$, nämlich

$$T[H] = \int\limits_{|z|=1} |g(z)|\,|d\,F(z)|.$$

Wählen wir nämlich eine genügend dichte Einteilung $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_r = z_0$ des Einheitskreises, so ist $T[H]$ mit beliebiger Annäherung gleich der Summe

$$\sum_{m=0}^{r-1} |H(z_{m+1}) - H(z_m)| = \sum_{m=0}^{r-1} \left| \int\limits_{z_m}^{z_{m+1}} g(z)\,d\,F(z) \right|.$$

Andererseits wird das Integral

$$\int\limits_{|z|=1} |g(z)|\,|d\,F(z)|$$

durch die Summe

$$\sum_{m=0}^{r-1} |g(z_m)|\,|F(z_{m+1}) - F(z_m)| = \sum_{m=0}^{r-1} \left| g(z_m) \int\limits_{z_m}^{z_{m+1}} d\,F(z) \right|$$

beliebig genau angenähert. Ist schliesslich die Einteilung derart dicht, dass auf den einzelnen Bögen $|g(z) - g(z_m)| \leq \delta$ ist, so wird die Differenz der beiden Summen $\leq \delta\,T[F]$; also wird bei entsprechender Einteilung auch diese Differenz beliebig klein. Somit ist genau

$$T[H] = \int\limits_{|z|=1} |g(z)|\,|d\,F(z)|.$$

Die Potenzreihe für $H(z)$ ergibt sich aus jenen von $F'(z)$ und $g(z)$ durch Multiplikation und gliedweise Integration. Daraus folgt sofort, dass wenn die Potenzreihe von $F(z)$ mit den vorgeschriebenen Gliedern, jene von $g(z)$ aber mit

$1 + cz^p$ $(p > n)$ beginnt, auch die Potenzreihe von $H(z)$ mit den vorgeschriebenen Gliedern beginnen muss. Wählen wir speziell für $F(z)$ die Minimalfunktion $F^*(z)$, für $g(z)$ die Funktion $(1 + \lambda z^p)^2$, also

$$H(z) = \int_0^z (1 + \lambda z^p)^2 \, dF(z),$$

so beginnt die Potenzreihe von $H(z)$ mit den vorgeschriebenen Gliedern; daher ist

$$T^* = T[F^*] \leq T[H] = \int_{|z|=1} (1 + \lambda z^p)(1 + \lambda z^{-p}) |dF^*(z)| = (1 + |\lambda|^2) T^* + \lambda I_p + \lambda I_p,$$

wo jetzt

$$I_p = \int_{|z|=1} z^p |dF^*(z)|, \quad \bar{I}_p = \int_{|z|=1} z^{-p} |dF^*(z)|$$

gesetzt ist; I_p und I_p sind konjugierte Grössen. Somit ist wieder die HERMITE'sche Form

$$I_p \lambda + I_p \lambda + T^* |\lambda|^2$$

nicht-negativ und daher

$$I_p = \int_{|z|=1} z^p |dF^*(z)| = 0,$$

u. zw. für alle $p > n$.

Um dieses Resultat weiter zu verfolgen, bezeichnen wir mit $V^*(z)$ die totale Schwankung von $F^*(z)$ auf dem von 1 bis z führenden Bogen des Einheitskreises. Ersetzen wir in unserem Integral $|dF(z)|$ durch $dV^*(z)$. Die Differenz der entsprechenden Näherungssummen wird für genügend dichte Einteilung beliebig klein, denn sie ist

$$\leq T[F^*] - \sum_{m=0}^{r-1} |F^*(z_{m+1}) - F^*(z_m)|.$$

Somit ändert sich der Integralwert durch Einsetzen von dV^* an Stelle von $|dF^*|$ überhaupt nicht. Also ist

$$\int_{|z|=1} z^p \, dV^*(z) = 0 \quad (p = n + 1, n + 2, \ldots).$$

Führen wir noch e^{it} an Stelle von z ein, so ergibt sich nach partieller Integration, da sich $V^*(z)$ bei einmaligem Umlaufe um T^* ändert,

$$T^* - ip\int_0^{2\pi} V^*(e^{it})\, e^{ipt}\, dt = 0 \quad (p = n+1,\ n+2, \ldots).$$

Andererseits ist

$$T^* = ip\int_0^{2\pi} \frac{T^*}{2\pi} e^{ipt}\, t\, dt$$

und somit wird schliesslich

$$\int_0^{2\pi} \left[V^*(e^{it}) - \frac{T^*}{2\pi} t \right] e^{ipt}\, dt = 0 \quad (p = n+1,\ n+2, \ldots).$$

d. h. der reelle Ausdruck in der eckigen Klammer ist *ein trigonometriches Polynom höchstens n-ter Ordnung.*

Der bisher befolgte Gedankengang ist bis zu gewissem Grade jenem des § 1. nachgebildet. Wir könnten nun diesen Parallelismus weiter verfolgen und unter Andern zeigen, dass der Differentialquotient von $V^*(e^{it})$ auf dem Einheitskreise mit einer Funktion $P(z)z^{-n}$ übereinstimmt, wo $P(z)$ ein rationales Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung ist, und dass die innerhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstellen von $\frac{dF^*}{dz}$ zugleich Nullstellen von wenigstens derselben Ordnung für $P(z)$ sind. Weiter aber wäre der Parallelismus schwer zu verfolgen, da hier schon das reguläre Verhalten von $f^*(z)$ *auf dem Rande* tief ausgenützt wurde, während wir jetzt über das Verhalten von $F^*(z)$ bez. von $\frac{dF^*}{dz}$ auf dem Rande viel weniger wissen.

In den folgenden Untersuchungen werden wir das in diesem § erhaltene Resultat nicht voll ausnützen, sondern wir werden daraus nur einige Folgerungen über das Verhalten von F^* und von $\frac{dF^*}{dz}$ ziehen. Aus der speziellen Form der Funktion $V^*(e^{it})$ folgern wir nämlich nur so viel, dass *ihr Differenzenquotient beschränkt ist* und dass *ihr Differentialquotient nur eine endliche Anzahl von Nullstellen haben kann.* Somit ist auch der Differenzenquotient von $F^*(e^{it})$ beschränkt, also *ist die Funktion $F^*(e^{it})$ ein Integral ihres ebenfalls beschränkten Differentialquotienten* (dessen Existenz höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Masse 0 schon aus der beschränkten Schwankung folgt). Ferner kann dieser Differential-

quotient, dessen absoluter Wert ja fast überall, d. i. höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Masse o, mit $\frac{dV^*(e^{it})}{dt}$ übereinstimmt, *nur auf einer Menge vom Masse o verschwinden.*

Ich möchte noch bemerken, dass die beiden letzten für die spezielle Funktion $F^*(z)$ jetzt hergeleiteten und in der Folge zur Anwendung gelangenden Resultate eigentlich ganz allgemein für alle Funktionen $F(z)$ vom betrachteten Typus gelten, wie dies aus gewissen Untersuchungen, die ich gemeinsam mit meinem Bruder MARCEL RIESZ ausgeführt habe und über die wir unlängst dem Nordischen Mathematikerkongress in Stockholm berichteten, hervorgeht. Eine Bezugnahme auf diese Untersuchungen allgemeinerer Art würde also diesen § überflüssig machen. Doch greifen jene allgemeine Untersuchungen viel tiefer in die LEBESGUE'sche Integrationstheorie ein, als dies für das hier behandelte spezielle Problem notwendig ist.

§ 4.

Es sollen jetzt $g(t)$ und $h(t)$ im Intervall $(0, 2\pi)$ definierte, im LEBESGUE'schen Sinne integrierbare, reelle oder komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen t bedeuten; λ ist ein beliebig komplex veränderliches Parameter. Über die Funktion $g(t)$ setzen wir noch voraus, dass sie höchstens in einer Menge vom Masse o verschwindet. Wir betrachten das Integral

$$I(\lambda) = \int_0^{2\pi} |g(t) + \lambda h(t)| \, dt$$

und werden eine *notwendige und hinreichende Bedingung* dafür herleiten, damit $I(0) \leqq I(\lambda)$ sei, d. i. dass die Funktion $I(\lambda)$ *ihren Minimalwert für $\lambda = 0$ erreiche. Die Bedingung heisst:*

$$\int_0^{2\pi} \overline{\operatorname{sg}}\, g(t) h(t) \, dt = 0,$$

wo

$$\overline{\operatorname{sg}}\, g(t) = \frac{\bar{g}(t)}{|g(t)|} = \frac{|g(t)|}{g(t)}$$

gesetzt ist.

Nehmen wir zunächst λ als reell veränderlich an und berechnen wir $I'(0)$. Der entsprechende Differenzenquotient in bezug auf λ des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruckes $|g + \lambda h|$, also

$$\frac{|g(t)+\lambda h(t)|-|g(t)|}{\lambda}$$

ist dem absoluten Werte nach $\leq |h(t)|$, also kleiner als eine integrierbare Funktion; somit ist es gestattet, die Differentiation unter dem Integralzeichen auszuführen. Nun ist aber der Differentialquotient von $|a+\lambda b|$ für $\lambda = 0$, wenn $a \neq 0$ ist, gleich dem reellen Teile von $b\,\overline{\mathrm{sg}}\,a = \frac{\bar{a}}{|a|}\,b$.[1] Also ist $I'(0)$ gleich dem reellen Teile von

$$\int_0^{2\pi} \overline{\mathrm{sg}}\, g(t)\, h(t)\, dt.$$

Wenn also $I(\lambda)$ für $\lambda = 0$ ein Minimum hat, so ist der reelle Teil dieses Integrals gleich 0.

Lassen wir jetzt λ längs der imaginären Axe variiren, oder was auf dasselbe hinausläuft, ersetzen wir $h(t)$ durch $i\,h(t)$; dann ergibt sich, dass auch der imaginäre Teil unseres Integrals verschwindet.

Wenn also $I(\lambda)$ für $\lambda = 0$ ein Minimum hat, so verschwindet das betrachtete Integral vollständig, d. h. unsere Bedingung ist tatsächlich *notwendig*.[2]

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, dass die Bedingung erfüllt ist. Wir zeigen, dass dann $I(0) \leq I(\lambda)$ ist. Wir dürfen uns dabei auf reelle λ beschränken, denn durch Multiplikation von $h(t)$ mit einer entsprechend gewählten Konstanten $e^{i\theta}$ lässt sich der allgemeine Fall auf diesen zurückführen. Nun ist aber der Integrandus $|g+\lambda h|$ eine konvexe Funktion von λ, dasselbe gilt daher auch für den Integralwert $I(\lambda)$. Eine konvexe Funktion besitzt aber an einer Stelle, wo ihr Differentialquotient verschwindet, nicht nur im Verhältnis zur näheren Umgebung, sondern auch ein absolutes Minimum.

Somit ist unsere Bedingung auch *hinreichend*.

Setzen wir jetzt für $g(t)$ die Funktion $\frac{d\,F^*(e^{it})}{dt}$, für $h(t)$ aber $e^{i(p+1)t}$ ein, wo $p > n$ ist. Dann ist $g(t) + \lambda h(t)$ der Differentialquotient nach t des Randwertes der Funktion

[1] Es sei nämlich $a = a' + ia''$, $b = b' + ib''$, so ist

$$|a+\lambda b| = [(a'+\lambda b')^2 + (a''+\lambda b'')^2]^{\frac{1}{2}};\quad |a+\lambda b|'_{\lambda=0} = \left[\frac{b'(a'+\lambda b') + b''(a''+\lambda b'')}{|a+\lambda b|}\right]_{\lambda=0} = \frac{a'b'+a''b''}{|a|}.$$

[2] Unter spezielleren Voraussetzungen (reelle Funktionen und reelles Parameter, endliche Anzahl von Zeichenwechsel) steht die Notwendigkeit der Bedingung schon in der ersten Arbeit von Th. J. Stieltjes: *De la représentation approximative d'une fonction par une autre*, Delft 1876, Oeuvres complètes, I, p. 11.

$$F(z) = F^*(z) - \frac{i\lambda}{p+1} z^{p+1}$$

und es ist somit

$$I(0) = T^* \leqq T[F] = I(\lambda).$$

Daher ist also

$$\int_0^{2\pi} \overline{\text{sg}}\, g(t)\, e^{i(p+1)t}\, dt = 0 \quad (p = n+1, n+2, \ldots).$$

Man kann dieses Resultat auch so aussprechen: Die FOURIER'sche Reihe der Funktion

$$\gamma(t) = e^{i(n+1)t}\, \overline{\text{sg}} \left(\frac{dF^*(e^{it})}{dt}\right) = e^{i(n+1)t}\, \overline{\text{sg}}\, g(t)$$

ist vom *Potenzreihentypus.* Darunter verstehen wir wie bisher, dass die formal gebildete FOURIER-Reihe, ebenfalls rein formal, als Potenzreihe in e^{it} aufgefasst werden kann, d. h. dass

$$\int_0^{2\pi} \gamma(t)\, e^{ikt}\, dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ich behaupte nun, dass *auch die* FOURIER'*sche Reihe der Funktion*

$$e^{i(2n+1)t}\, \bar{g}(t) = e^{i(2n+1)t}\, g(t)\, (\overline{\text{sg}}\, g(t))^2 = \gamma^2(t)\, g(t)\, e^{-it}$$

vom Potenzreihentypus ist.

Die Richtigkeit der Behauptung ist im folgenden allgemeinen Satze enthalten: *Sind die* FOURIER-*Reihen von zwei integrierbaren Funktionen von Potenzreihentypus, und ist wenigstens eine der beiden Funktionen beschränkt, so ist auch die* FOURIER-*Reihe ihres Produkts von Potenzreihentypus.*

Es sei nämlich von den beiden Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ z. B. $\varphi(t)$ beschränkt, dann lässt sich eine Folge von ganzen rationalen Ausdrücken in e^{it} angeben, die einerseits in ihrer Gesamtheit beschränkt sind, andererseits aber fast überall gegen die Funktion $\varphi(t)$ konvergieren. Eine solche Folge $\{P_m(e^{it})\}$ bilden z. B. nach den wohlbekannten Sätzen von FEJÉR und LEBESGUE die arithmetischen Mittel der FOURIER-Reihe von $\varphi(t)$. Durch Multiplikation mit $e^{ikt}\psi(t)$ erhält man

$$\psi(t)\, P_m(e^{it})\, e^{ikt} \rightarrow \varphi(t)\, \psi(t)\, e^{ikt}$$

und da die linksstehenden Funktionen dem absoluten Werte nach alle kleiner

sind als die Funktion $C|\psi(t)|$, wo C eine passend gewählte Konstante bedeutet, da sie also in ihrer Gesamtheit dem absoluten Werte nach unterhalb einer integrierbaren Funktion liegen, so darf man gliedweise integrieren:

$$\int_0^{2\pi} \psi(t) P_m(e^{it}) e^{ikt} dt \to \int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi(t) e^{ikt} dt.$$

Da nun aber $\psi(t)$ vom Potenzreihentypus ist, so verschwindet das von o bis 2π genommene Integral von $e^{irt}\psi(t)$ für jede ganze positive Zahl r, also verschwinden auch die linksstehenden Integrale für ganze positive k und es verschwindet also auch der rechtsstehende Grenzwert. Somit ist

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi(t) e^{ikt} dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

d. h. die Fourier'sche Reihe des Produkts $\varphi(t)\psi(t)$ ist vom Potenzreihentypus.

Wenden wir nun den Satz auf das Produkt

$$\gamma^2(t) g(t) e^{-it}$$

an. Da $\gamma(t)$ beschränkt und ihre Fourier-Reihe vom Potenzreihentypus ist, so gilt nach dem Satze dasselbe für $\gamma^2(t)$. Andererseits ist die Fourier-Reihe der Funktion $F^*(e^{it})$ und somit auch jene ihres Differentialquotienten $g(t)$ vom Potenzreihentypus; ferner beginnt letztere mit $i A_1 e^{it}$, also ist auch noch die Fourier-Reihe von $g(t)e^{-it}$ vom Potenzreihentypus. Dasselbe gilt daher auf Grund unseres Satzes vom Produkt $\gamma^2(t) g(t) e^{-it}$.

Nun ist aber

$$\gamma^2(t) g(t) e^{-it} = e^{i(2n+1)t} \bar{g}(t);$$

also ist die Fourier-Reihe des rechtsstehenden Ausdruckes vom Potenzreihentypus und somit ist für alle positive ganze Zahlen k

$$\int_0^{2\pi} e^{i(2n+1+k)t} \bar{g}(t) dt = 0,$$

oder, indem wir auf die konjugierten Werte übergehen,

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(2n+1+k)t} g(t) dt = 0$$

D. h. die (potenzreihenartige) FOURIER-Reihe von $g(t)$ bricht nach dem Gliede vom Index $2n+1$ ab; dasselbe gilt somit auch für die FOURIER-Reihe von $F^*(e^{it})$ d. i. für die Potenzreihe von $F^*(z)$. Also *ist* $F^*(z)$ *ein rationales Polynom höchstens* $2n+1$*-ter Ordnung.*

Kehren wir endlich zum Differentialquotienten von $F^*(z)$ zurück, den wir mit $f^*(z)$ bezeichnen, so *ist* $f^*(z)$ *ein rationales Polynom höchstens* $2n$*-ter Ordnung, das mit den vorgeschriebenen Gliedern*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

beginnt, und für welches das Integral des absoluten Wertes $I[f^*] = T$ *möglichst klein ausfällt.* Somit *besitzt unser Minimumproblem tatsächlich eine innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Lösung.*

Die weiteren Eigenschaften der Funktion f^*, d. h. die spezielle Verteilung ihrer Nullstellen haben wir schon in § 1. erkannt. Ich möchte jedoch bemerken, dass wir den § 1., der uns hauptsächlich zur Orientierung dienen sollte, entbehren könnten, da jene spezielle Verteilung der Nullstellen sich jetzt auch leicht aus der Tatsache ergibt, dass die FOURIER-Reihe der Funktion

$$e^{i(n+1)t}\,\overline{\mathrm{sg}}\,g(t) = -\,i\,e^{int}\,\overline{\mathrm{sg}}\,f^*(e^{it})$$

vom Potenzreihentypus ist.

§ 5.

Wir haben soeben gesehen, dass unser Minimumproblem wenigstens eine Lösung besitzt; wir wollen jetzt zeigen, dass es *nur eine* Lösung besitzt.

Nehmen wir an, es gäbe zwei verschiedene Lösungen; beide wären dann rationale Polynome höchstens $2n$-ter Ordnung mit den gemeinsamen Anfangsgliedern

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

Schreiben wir die beiden Funktionen in der Form $f^*(z)$ und $f^*(z) + \varphi(z)$, wo also

$$f^*(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots + a_{2n} z^{2n},$$
$$\varphi(z) = b_{n+1} z^{n+1} + \cdots + b_{2n} z^{2n}$$

gesetzt ist. Wir bilden nun das Polynom $f_\mu = f^* + \mu\varphi$, wo μ ein beliebig veränderliches Parameter bedeutet. Dann ist laut Annahme

$$I[f^*] = I[f^* + \varphi] = I^*;\ I[f_\mu] \geq I^*.$$

Ist nun zunächst μ nur reell veränderlich, so ist der Integrandus im Ausdrucke für $I[f_\mu]$, also auch $I[f_\mu]$ selbst eine konvexe Funktion von μ; ferner ist für $\mu = 0$ und für $\mu = 1$

$$I[f_\mu] = I^*;$$

daher ist für alle Werte von μ zwischen 0 und 1

$$I[f_\mu] \leqq I^*.$$

Es ist daher genau

$$I[f_\mu] = I^* \quad (0 \leqq \mu \leqq 1).$$

Somit ist f_μ nicht nur für $\mu = 0$ und $\mu = 1$, sondern auch für alle μ zwischen 0 und 1 ein Minimalpolynom, dessen Nullstellen daher nach der bekannten Art verteilt sein müssen. Daher sind, zunächst für $0 \leqq \mu \leqq 1$, sämtliche Nullstellen des Polynoms

$$z^{2n} f_\mu(z)\, f_\mu\left(\frac{1}{z}\right) = z^{2n} f^*(z)\, \bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right) + z^{2n}\left[f^*(z)\,\bar{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right) + \bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)\varphi(z)\right]\mu + z^{2n}\varphi(z)\,\bar{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right)\mu^2 =$$

$$= \alpha(z) + \beta(z)\,\mu + \gamma(z)\,\mu^2$$

von gerader Ordnung. Nun kommen aber die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hiefür in gewissen algebraischen Relationen zum Ausdruck; diese Relationen bestehen also für alle Werte von μ zwischen 0 und 1 und somit überhaupt für alle reelle und komplexe Werte von μ. Daher sind sämtliche Nullstellen der Funktion

$$\alpha(z) + \beta(z)\,\mu + \gamma(z)\,\mu^2$$

für jeden Wert μ von gerader Ordnung; speziell hat also die Funktion ausschliesslich *mehrfache Nullstellen.*

Wir unterscheiden 4 Fälle:

1) *$\gamma(z)$ verschwindet identisch.* Dann verschwindet auch $\varphi(z)$ identisch, d. h. $f^*(z)$ und $f^*(z) + \varphi(z)$ sind nicht verschieden.

2) *Die Diskriminante der Gleichung 2-ten Grades in μ*

$$\alpha(z) + \beta(z)\,\mu + \gamma(z)\,\mu^2 = 0$$

verschwindet identisch. Die Diskriminante ist

$$D(z) = \beta^2(z) - 4\,\alpha(z)\,\gamma(z) = z^{4n}\left[f^*(z)\,\bar{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right) - \bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)\varphi(z)\right]^2;$$

verschwindet also $D(z)$ identisch, so ist, ebenfalls identisch,

$$z^{2n} f^*(z)\, \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = z^{2n} f^*\left(\frac{1}{z}\right) \varphi(z).$$

Nun ist aber $\varphi(z)$ durch z^{n+1} teilbar, somit ist es auch das rechtsstehende Polynom und daher ist es auch das linksstehende. Andererseits aber ist $a_0 \neq 0$, und so muss schliesslich das Polynom

$$z^{2n} \bar{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{b}_{2n} + \bar{b}_{2n-1} z + \cdots + \bar{b}_{n+1} z^{n-1}$$

durch z^{n+1} teilbar sein, was, da der Grad des Polynoms $< n + 1$ ist, das identische Verschwinden nach sich zieht. Also verschwindet auch $\varphi(z)$ identisch.

3) *$\beta(z)$ verschwindet identisch.* Dann ist

$$z^{2n} f^*(z)\, \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = - z^{2n} f^*\left(\frac{1}{z}\right) \varphi(z),$$

woraus, ähnlich wie in 2), das identische Verschwinden von $\varphi(z)$ folgt.

4) *Es verschwinden weder $\gamma(z)$, noch $\beta(z)$ oder $D(z)$ identisch.* Dann besitzen sowohl $\gamma(z)$ wie $\beta(z)$ und $D(z)$ nur je eine endliche Anzahl von Nullstellen. Dasselbe ist für $\alpha(z)$ immer der Fall. Also hat im allgemeinen für einen gegebenen Wert von z die Gleichung in μ

$$\alpha(z) + \beta(z)\mu + \gamma(z)\mu^2 = 0$$

zwei verschiedene Lösungen, μ_1 und μ_2, und welche wir von beiden in den linksstehenden Ausdruck eintragen, so hat die so definierte Funktion von z den gegebenen Wert zur Nullstelle, also zur mehrfachen Nullstelle. Somit genügen der betreffende Wert von z und die entsprechenden Werte μ_1 resp. μ_2 auch der Gleichung

$$\alpha'(z) + \beta'(z)\mu + \gamma'(z)\mu^2 = 0.$$

D. h. die beiden Gleichungen 2-ten Grades haben im allgemeinen ihre beiden Wurzeln gemein; also ist

$$\frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} = \frac{\beta'(z)}{\beta(z)} = \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)},$$

oder, indem man integriert,

$$\beta(z) = c_1 \alpha(z);\ \gamma(z) = c_2 \alpha(z).$$

Da ferner die Funktionen $z^{-2n}\alpha(z)$, $z^{-2n}\beta(z)$, $z^{-2n}\gamma(z)$ längs des Einheitskreises reell sind, so sind es auch ihre konstanten Verhältniszahlen c_1 und c_2. Ausser-

dem ist, da $\gamma(z)$ nicht identisch verschwindet, $c_2 \neq 0$. Indem wir nun zu den ursprünglichen Bezeichnungen zurückkehren, so ist also

$$f_\mu(z)\bar{f}_\mu\left(\frac{1}{z}\right) = f^*(z)\bar{f}^*\left(\frac{1}{z}\right)(1 + c_1\mu + c_2\mu^2),$$

wo c_1 und c_2 reell sind und $c_2 \neq 0$. Dann aber kann

$$I[f_\mu] = I^* \left|1 + c_1\mu + c_2\mu^2\right|^{\frac{1}{2}}$$

nicht entlang der Strecke $0 \leq \mu \leq 1$ konstant sein. Damit sind wir auf einen Widerspruch gestossen.

§ 6.

Wir ergänzen noch unsere Resultate durch den folgenden Satz, der gewissermassen als Umkehrung der Resultate des § 1. gelten darf, und durch den die Bestimmung der Minimalfunktion $f^*(z)$ auf ein algebraisches Problem zurückgeführt wird:

Kann man die Nullstellen des rationalen Polynoms höchstens $2n$-ter Ordnung

$$f_1(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots + a_{2n} z^{2n} \quad (a_0 \neq 0)$$

derart zu Paaren anordnen, dass die beiden Elemente je eines dieser Paare entweder identisch und in diesem Falle auf dem Einheitskreise oder ausserhalb desselben gelegen, oder aber Spiegelbilder von einander in bezug auf den Einheitskreis sind, dann ist $f_1(z)$ Lösung unseres Minimumproblems.

Unter der gemachten Voraussetzung liegen nämlich sämtliche Pole der rationalen Funktion

$$\frac{z^{2n} f_1\left(\frac{1}{z}\right)}{f_1(z)}$$

ausserhalb des Einheitskreises; auf dem Einheitskreise selbst hat die Funktion keine Nullstelle und die innerhalb des Kreises gelegenen Nullstellen sind sämtlich von gerader Ordnung; daher sind die beiden Determinationen von

$$z^n \sqrt{\frac{\bar{f}_1\left(\frac{1}{z}\right)}{f_1(z)}},$$

deren Randwerte gleich

$$\pm z^n \overline{\mathrm{sg}}\, f_1(z) = \pm e^{int} \overline{\mathrm{sg}}\, f_1(e^{it})$$

sind, im Kreisinneren und auf dem Rande regulär; dasselbe gilt auch für ihr Produkt mit irgend einer regulären Funktion $\psi(z)$. Also ist auch das Produkt

$$\overline{\mathrm{sg}}\, f_1(e^{it})\, e^{int}\, \psi(e^{it})$$

Randwert einer regulären Funktion. Daher ist

$$\int_0^{2\pi} \overline{\mathrm{sg}}\, f_1(e^{it})\, e^{i(n+1)t}\, \psi(e^{it})\, dt = -i \int_{|z|=1} \overline{\mathrm{sg}}\, f_1(z)\, z^n\, \psi(z)\, dz = 0.$$

D. h. für die Funktionen

$$g(t) = f_1(e^{it}),\ h(t) = e^{i(n+1)t}\psi(e^{it})$$

ist die in § 4. hergeleitete notwendige und hinreichende Bedingung erfüllt, und somit ist

$$\int_0^{2\pi} |f_1(e^{it})|\, dt \leq \int_0^{2\pi} |f_1(e^{it}) + e^{i(n+1)t}\psi(e^{it})|\, dt,$$

oder in der früher benutzten Schreibweise

$$I[f_1] \leq I[f_1 + z^{n+1}\psi].$$

Damit ist der behauptete Satz bewiesen.

Wir können sämtliche Resultate in den folgenden Satz zusammenfassen:

Unter allen innerhalb und auf dem Einheitskreise regulären Funktionen $f(z)$, deren Potenzreihe mit den vorgeschriebenen Gliedern

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

beginnt, gibt es eine und nur eine solche, für welche der Integralwert

$$\int_{|z|=1} |f(z)|\, |dz|$$

möglichst klein ausfällt.

Diese Funktion ist vollständig charakterisiert durch die folgenden Eigenschaften:

1) *Sie ist ein rationales Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung;*

2) *ihre Nullstellen lassen sich derart zu Paaren anordnen, dass die beiden Elemente je eines dieser Paare entweder identisch sind und in diesem Falle ausser-*

halb oder auf dem Einheitskreise liegen, oder aber Spiegelbilder von einander in bezug auf den Einheitskreis sind.

§ 7.

Das schon in der Einleitung erwähnte CARATHÉODORY-FEJÉR'sche Problem lautet: *Wir betrachten sämtliche innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktionen $g(z)$, deren Potenzreihenentwickelung mit den vorgeschriebenen Anfangsgliedern*

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$$

beginnt. Gibt es unter diesen Funktionen eine solche, für welche der Maximalwert von $|g(z)|$ auf dem Einheitskreise möglichst klein ausfällt? Wenn ja, welche sind die weiteren Eigenschaften dieser Funktion?

Dieses Problem steht in enger Beziehung zu dem bisher behandelten Problem. Als Mittelglied behandeln wir zunächst das folgende Problem: Gegeben sind die Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$, und wir betrachten sämtliche innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktionen $f(z)$, für welche *die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ihrer Potenzreihe die Gleichung*

$$c_n a_0 + c_{n-1} a_1 + \cdots + c_0 a_n = 1$$

befriedigen. Gibt es unter diesen Funktionen eine solche, für welche $I[f]$ möglichst klein wird, und wenn ja, was sind die weiteren Eigenschaften dieser Funktion?

Was zunächst die Existenz betrifft, so lässt sich durch fast buchstäbliche Wiederholung des § 2. die Existenz einer Funktion $F^*(z)$ zeigen, die innerhalb des Einheitskreises regulär und beschränkt, auf demselben von beschränkter Schwankung ist, für welche ferner die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ der Potenzreihenentwicklung die Bedingung

$$c_n A_1 + c_{n-1} 2 A_2 + \cdots + c_0 (n+1) A_{n+1} = 1$$

erfüllen, und für welche unter allen ähnlichen Funktionen $F(z)$ die totale Schwankung $T[F]$ möglichst klein wird.

Nun ist aber diese Funktion resp. ihr Differentialquotient $f^*(z)$, in bezug auf ihre eigenen Anfangsglieder, a fortiori zugleich Lösung unseres alten Problems; also ist

$$f^*(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots + a_{2n} z^{2n}$$

ein Polynom höchstens $2n$-ter Ordnung, dessen Nullstellen in der bekannten Weise verteilt sind.

Andererseits aber ist jetzt auch noch, da die $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nicht einzeln gegeben, sondern nur der einzigen Bedingung

$$c_n a_0 + c_{n-1} a_1 + \cdots + c_0 a_n = 1$$

unterworfen sind,

$$I[f^*] \leq I[f^* + \lambda \varphi]$$

gegenüber allen innerhalb und auf dem Einheitskreise regulären Funktionen

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots,$$

deren Koeffizienten der homogenen Bedingung

$$c_n b_0 + c_{n+1} b_1 + \cdots + c_0 b_n = 0$$

genügen. Also ist nach § 4. für alle solche Funktionen

$$\int\limits_{|z|=1} \overline{\operatorname{sg}}\, f^*(z) \varphi(z) \frac{1}{z}\, dz = i \int\limits_0^{2\pi} \overline{\operatorname{sg}}\, f^*(e^{it}) \varphi(e^{it})\, dt = 0.$$

Nun sind aber speziell die Funktionen

$$\varphi(z) = c_{k-1} z^{n-k} - c_k z^{n-k+1} \quad (1 \leq k \leq n)$$

von dieser Art; somit ist

$$\int\limits_{|z|=1} \overline{\operatorname{sg}}\, f^*(z) [c_{k-1} z^{n-k-1} - c_k z^{n-k}]\, dz = 0 \quad (1 \leq k \leq n).$$

Diese Relationen lassen sich folgendermassen deuten. Die Funktion $z^n \overline{\operatorname{sg}}\, f^*(z)$ stimmt auf dem Einheitskreise mit der einen der beiden Determinationen von

$$z^n \sqrt{\frac{\overline{f^*\left(\frac{1}{\bar z}\right)}}{f^*(z)}}$$

überein, die wir durch $h(z)$ bezeichnen. Infolge der eigentümlichen Verteilung der Nullstellen von $f^*(z)$ ist $h(z)$ eine solche rationale Funktion, deren Nullstellen — höchstens n an der Zahl — innerhalb des Einheitskreises, ihre Pole aber, mit der entsprechenden Multiplizität, in den Spiegelbildern der Nullstellen liegen. Längs des Einheitskreises ist $|h(z)| = 1$. Nach Einführung der Funktion $h(z)$ lauten unsere Relationen:

$$c_{k-1}\int\limits_{|z|=1} h(z)\,z^{-k-1}\,dz = c_k\int\limits_{|z|=1} h(z)\,z^{-k}\,dz \quad (1 \leq k \leq n).$$

Dies besagt, dass *die ersten $n+1$ Koeffizienten der Potenzreihe für $h(z)$ mit den Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ proportional sind.* Die Koeffizienten resp. der Proportionalitätsfaktor α lassen sich leicht berechnen. Da

$$h(z) = \alpha(c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots), \quad f^*(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

ist, so wird

$$\alpha = \alpha(c_n a_0 + c_{n-1} a_1 + \cdots + c_0 a_n) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{|z|=1} h(z)\,f^*(z)\,z^{-n-1}\,dz =$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{|z|=1} f^*(z)\,\overline{\mathrm{sg}}\,f^*(z)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\,|dz| = \frac{I^*}{2\pi}.$$

Also *beginnt die Potenzreihe der rationalen Funktion*

$$g^*(z) = \frac{2\pi}{I^*}\,h(z)$$

genau mit den Gliedern

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n.$$

Ich behaupte, dass *die Funktion $g^*(z)$ eine Lösung und zwar die einzige Lösung des* Carathéodory-Fejér'schen *Problems ist.* Es ist nämlich der Maximalwert von $|g^*(z)|$, den dieser übrigens in allen Punkten des Einheitskreises annimmt, gleich $\frac{2\pi}{I^*}$. Andererseits besteht für jede innerhalb und auf dem Einheitskreise reguläre Funktion

$$g(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

die Ungleichung

$$1 = c_n a_0 + c_{n-1} a_1 + \cdots + c_0 a_n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{|z|=1} g(z)\,f^*(z)\,z^{-n-1}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} g(z)\,f^*(z)\,z^{-n}\,|dz| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\max|g(z)|\int\limits_{|z|=1} |f^*(z)|\,|dz| = \frac{I^*}{2\pi}\max|g(z)|,$$

also die Ungleichung

$$\max|g(z)| \geq \frac{2\pi}{I^*};$$

und zwar kann das Gleichheitszeichen nur dann gelten, wenn $|g(z)\,z^{-n}|$, also $|g(z)|$ längs des Einheitskreises konstant und $g(z)\,f^*(z)\,z^{-n}$ daselbst positiv resp. nichtnegativ ist, was nur für $g(z) =$ positives Multiplum von $h(z) = z^n\,\overline{\mathrm{sg}}\,f^*(z)$ zutrifft, also nur für $g(z) = \frac{2\pi}{I^*}\,h(z) = g^*(z)$.

Es verdient bemerkt zu werden, dass für diese Schlussweise, speziell also für den Beweis der Eindeutigkeit der Minimallösung $g^*(z)$, die tiefer liegende Eindeutigkeitsfrage für $f^*(z)$ nicht in Betracht kommt.

Damit ist gezeigt, dass *das* Carathéodory-Fejér'*sche Problem eine und nur eine Lösung $g^*(z)$ hat, und zwar ist $g^*(z)$ eine rationale Funktion mit höchstens n Nullstellen, die alle innerhalb des Einheitskreises liegen und mit derselben Anzahl von Polen, die, jede mit der entsprechenden Multiplizität, in die Spiegelbilder der Nullstellen in bezug auf den Einheitskreis fallen; auf dem Einheitskreise selbst ist $|g^*(z)|$ konstant.*

Kolozsvár, den 29. Oktober 1916.

ÜBER DIE LÖSUNG DER KONGRUENZ

$(\lambda + 1)^p - \lambda^p - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$

VON

A. ARWIN

in LUND.

Der Versuch das Fermat'sche Problem $x^p + y^p = z^p$ in zur Primzahl p prime ganzen Zahlen zu lösen führt leicht zur Untersuchung der Möglichkeit der Kongruenz $(\lambda + 1)^p - \lambda^p - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$, und diese ist eben der Gegenstand einer Untersuchung in dieser Abhandlung. Die Ausführung, die das Problem mit sich zog und unten angegeben worden ist, wurde eine Folge vom Zusammenführen ganzzahliger Werte $(\mathrm{mod}\, p)$ und $(\mathrm{mod}\, p^2)$ und von dem Verhältnis dieser Werte zu einander. Hierin liegt das Neue, das in dieser Abhandlung zu finden ist, wie auch in der Übersicht der Natur der Lösungen, die daraus ersichtlich ist. Dass endlich wirklich solche Lösungen in den verschiedenen Fällen und damit Gruppen $(\mathrm{mod}\, p^2)$ mit gewissen Eigenarten existieren können, ist ein Resultat vom reinen experimentellen Prüfen. Dazu sei nur bemerkt, dass die Giltigkeit von $2^{p-1} \equiv 1\, (p^2)$ für $p = 1093$ von W. MEISSNER beispielsweise in Archiv der Math. u. Physik 1914 angegeben worden ist, während das zweite Beispiel für das, was ich "v-Gruppen innerhalb eines Systemes $(a)\, (\mathrm{mod}\, p^2)$" genannt habe, nämlich die Primzahl $p = 59$, wohl die erste Primzahl zu sein scheint, die solche Gruppen besitzt, aber gar nicht so eigenartig wie $p = 1093$ ist, sondern von vielen anderen begleitet wird, wenn diese auch nicht zu zahlreich sind.

Aus der Identität

$$(\lambda + 1)^p - \lambda^p - 1 = p\,\lambda\,(\lambda + 1)\,(\lambda^2 + \lambda + 1)^\varepsilon\, f_p(\lambda, 1) \qquad (1)$$

wo p eine Primzahl sein soll, $\varepsilon = 1$ oder 2, je nachdem $p = 6n - 1$ oder $6n + 1$ ist, geht hervor, dass sich $f_p(\lambda, 1)$ relativ invariant für die Substitutionsgruppe

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad -1+\lambda, \quad -\frac{1}{1+\lambda}, \quad -\frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad -\frac{1+\lambda}{\lambda} \tag{2}$$

verhält. Infolge (2) lässt sich, wie gezeigt werden kann, $f_p(\lambda, 1)$ homogen mittels $(\lambda^2+\lambda+1)^3 = K(\lambda)$ und $[\lambda(\lambda+1)]^2 = L(\lambda)$ darstellen, d. h. $f_p(\lambda, 1) = \psi_p(K, L)$ gilt. Die Lösung von $f_p(\lambda, 1) \equiv 0\ (p)$ erfordert also auch die Zerlegung von $\psi_p(K, L)$ in Linearfaktoren $\prod_\nu (K(\lambda) + h_\nu L(\lambda)) \pmod p$, und man erhält alle Lösungen zu $f_p(\lambda, 1) \equiv 0\ (p)$ durch Auflösen jener Kongruenzen sechsten Grades $K(\lambda) + h_\nu L(\lambda) \equiv 0\ (p)$, die als Invarianten für jede Substitutionsgruppe (2) betrachtet werden können, wo h_ν ein für jede Gruppe bestimmter, charakteristischer Zahlenfaktor ist, der die Invariantenkonstante genannt werden mag. Man findet leicht, dass $\frac{\lambda^{p-1}-1}{\lambda+1}$ sich $\pmod p$ mittels solcher Invarianten $K(\lambda) + h_\nu L(\lambda)$ aufbauen lässt, weil ja immer die Werte $\lambda = +1, \pm 2$ etc, die sämtlich $\frac{\lambda^{p-1}-1}{\lambda+1} \equiv 0\ (p)$ lösen, hinsichtlich der Substitutionsgruppe (2) zusammengefasst werden können, und zwei Gruppen infolge des Gruppencharakters ein Element nicht gemein haben können, ohne identisch zu werden. Ausser den vollständigen Gruppen sechsten Grades existieren auch zwei Nebengruppen vom Grade 2 und 3, deren Elemente als Lösungen respektive aus $\lambda^2+\lambda+1 \equiv 0\ (p)$, also nur für Primzahlen $p = 6n+1$ vorhanden sind, und aus

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)(2\lambda+1)}{2} = \frac{2\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda-2}{2} \equiv 0 \pmod p$$

wo $p = 6n \pm 1$ ist, erhalten werden können. Weil das Quadrat des letzten Ausdruckes sich auch für die Substitution $(\lambda : -1+\lambda)$ invariant verhält, so erhält man

$$\left[\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)(2\lambda+1)}{2}\right]^2 \equiv K(\lambda) + h_q L(\lambda) \pmod p \tag{3}$$

wo h_q aus

$$K(1) + h_q L(1) \equiv 0 \pmod p$$

bestimmt wird, d. h. den Wert

$$h_q \equiv -\frac{27}{4} \pmod p \tag{4}$$

erhält. Man hat also

$$\frac{\lambda^{p-1}-1}{\lambda+1} \equiv (\lambda^2+\lambda+1)^{\varepsilon} \sqrt{K(\lambda) - \frac{27}{4} L(\lambda)} \prod_{(\nu)}^{n-1} [K(\lambda) + h_\nu L(\lambda)] \pmod{p} \qquad (5)$$

weil die Anzahl der vollständigen Gruppen immer gleich $n-1$ ist. Es sei noch bemerkt, dass es nur für die aus (5) genommenen Invariantenkonstanten h_ν zutrifft, dass eine Kongruenz $K(\lambda) + m L(\lambda) \equiv 0 \, (p)$ überhaupt auflösbar werden kann. Auf dieselbe Weise lassen sich nun auch die Werte aus

$$\frac{\lambda^{\varphi(p^2)}-1}{\lambda+1} \equiv 0 \pmod{p^2} \qquad (6)$$

zu Gruppen und Invarianten zusammenführen. Als beleuchtendes Beispiel teile ich die folgende Zahlentabelle für $p = 11$ mit, wo die Werte also (mod 121) zusammengefasst worden sind.

Eingang-Elemente:	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$-(1+\lambda)$	$-\frac{1}{1+\lambda}$	$-\frac{\lambda}{1+\lambda}$	$-\frac{1+\lambda}{\lambda}$	Invarianten
$4 + n \cdot 11$	—	—	—	—	—	—	— —
$4 + 0 \cdot 11$	4	− 30	− 5	+ 24	− 25	+ 29	$K - 41 \cdot L$
$4 + 1 \cdot 11$	15	− 8	− 16	− 53	+ 52	+ 7	$K - 30 \cdot L$
$4 + 2 \cdot 11$	26	14	− 27	− 9	+ 8	− 15	$K - 19 \cdot L$
$4 + 3 \cdot 11$	37	36	− 38	+ 35	− 36	− 37	$K - 8 \cdot L$
$4 + 4 \cdot 11$	48	58	− 49	− 42	+ 41	− 59	$K + 3 \cdot L$
$4 + 5 \cdot 11$	59	− 41	− 60	+ 2	− 3	+ 40	$K + 14 \cdot L$
$4 + 6 \cdot 11$	− 51	− 19	+ 50	+ 46	− 47	+ 18	$K + 25 \cdot L$
$4 + 7 \cdot 11$	− 40	+ 3	+ 39	− 31	+ 30	− 4	$K + 36 \cdot L$
$4 + 8 \cdot 11$	− 29	+ 25	+ 28	+ 13	− 14	− 26	$K + 47 \cdot L$
$4 + 9 \cdot 11$	− 18	+ 47	+ 17	+ 57	− 58	− 48	$K + 58 \cdot L$
$4 + 10 \cdot 11$	− 7	− 52	+ 6	− 30	+ 19	+ 51	$K - 52 \cdot L$
$1 + n \cdot 11$	—	—	—	—	—	—	— —
$1 + 0 \cdot 11$	1	1	− 2	+ 60	+ 60	− 2	$\sqrt{K - 37 \cdot L}$
$1 + 1 \cdot 11$	12	− 10	− 13	− 28	+ 27	+ 9	$K - 37 \cdot L$
$1 + 2 \cdot 11$	23	− 21	− 24	+ 5	− 6	+ 20	$K - 37 \cdot L$
$1 + 3 \cdot 11$	34	− 32	− 35	+ 38	− 39	+ 31	$K - 37 \cdot L$
$1 + 4 \cdot 11$	45	− 43	− 46	− 30	− 50	+ 42	$K - 37 \cdot L$
$1 + 5 \cdot 11$	56	− 54	− 57	− 17	+ 16	+ 53	$K - 37 \cdot L$
$-1 + n \cdot 11$	—	—	—	—	—	—	— —
$-1 + 1 \cdot 11$	10	− 12	—	—	—	—	$(\lambda + 1)^2$
$-1 + 2 \cdot 21$	21	− 23	—	—	—	—	$(\lambda + 1$
$-1 + 3 \cdot 11$	32	− 34	—	—	—	—	$(\lambda + 1)^2$
$-1 + 4 \cdot 21$	43	− 45	—	—	—	—	$(\lambda + 1)^2$
$-1 + 5 \cdot 11$	54	− 76	—	—	—	—	$(\lambda + 1)^2$

Alles in allem bilden die Elemente dieser Tabelle $6 . 11 + 6 . 5 + 2 . 5 + 3 = 109$ verschiedene zu 121 relativ prime Werte, die also mit den $\varphi(11^2) - 1 = 109$ überhaupt existierenden zusammenfallen. Weiter findet man, dass die Gruppen mit den Eingangelementen $4 + 11\, n$ die Folge der Invarianten konstanten $-41 + 11\, n, n = 0, 1, .., 10$ haben, d. h. dass die elf Gruppen mit dem ersten Kolonnenelemente $4 + 11\, n$ sich $(\mathrm{mod}\, 11)$ zu der Gruppe $4, 3, -5, 2, -3, -4$ mit der Invariantkonstante -8 zusammenziehen. Die Elemente $1 + 11\, n$ haben dagegen alle dieselbe Invariante, deren Konstante $\equiv -4\, (\mathrm{mod}\, 11)$ ist, und die Werte $-1 + 11\, n$ haben die Invariante $(\lambda + 1)^2$. Ehe ich zu prüfen übergehe, in wie weit die oben angegebenen Eigenschaften allgemein giltig sind, will ich auf folgenden Sachen hinweisen. Aus

$$\begin{aligned} K - 41\, L &\equiv K - 8\, L + 8 . 11 \\ K - 30\, L &\equiv K - 8\, L + 7 . 11 \qquad (\mathrm{mod}\, 121) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

folgt

$$\prod_{n=0}^{10} [K - (41 + 11\, n)\, L] \equiv (K - 8\, L)^{11} + (K - 8\, L)^{10}\, 11 \sum_{1}^{10} n + \cdots \equiv \equiv (K - 8\, L)^{11} \qquad (\mathrm{mod}\, 121) \tag{7}$$

Man erhält also

$$\frac{\lambda^{110} - 1}{\lambda + 1} \equiv \frac{[(K - 8\, L) \sqrt{K - 37\, L}\, (\lambda + 1)]^{11}}{\lambda + 1} \qquad (\mathrm{mod}\, 121) \tag{8}$$

d. h. die elfte Potenz der Invarianten zu $\frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda + 1} \equiv 0\, (\mathrm{mod}\, 11)$. Mit Hülfe der oben gegebenen Andeutungen kann die allgemeine Untersuchung auf folgende Weise durchgefürt werden. Man wähle zum Eingangelemente $a + n\, p, n = 0, 1, \ldots p - 1$, wo a einer Nebengruppe $(\mathrm{mod}\, p)$ nicht gehören darf, und führe auf diesen Kolonnenelementen die Gruppenoperationen aus. Es entsteht daraus ein Gruppensystem (a) von Werten, wo infolge des Gruppencharakters alle Gruppen verschieden sind, und kein Element zweimal in derselben Gruppe auftreten kann. Beim Übergange zu $(\mathrm{mod}\, p)$ würde nämlich eine Nebengruppe hervorkommen, was dem Auswahle des Elementes a wiederspricht. In diesem Systeme (a) stehen also $6\, p$ zu p^2 relativ prime und unter einander verschiedene Werte. Wählt man ein Element b, das nicht in der vorigen Gruppe a liegt, und verfährt man wie oben, so erhält man noch $6\, p$ verschiedene Werte, von denen keiner im System (a) vorkommen kann, denn beim Übergange zu $(\mathrm{mod}\, p)$ würden sonst die Gruppen a und b zusammenfallen. In der Weise erhält man zu jeder vollständigen Gruppe a

vom sechsten Grade $(\operatorname{mod} p)$ ein Gruppensystem (a) $(\operatorname{mod} p^2)$. Das System, das $(\operatorname{mod} p)$ zu der Nebengruppe dritten Grades gehört, nenne ich System (1), und zweiten Grades System (c). Vom Kolonnenelemente $1 + np, n = 0, 1, \ldots \frac{p-1}{2}$ ausgehend findet man, dass dasselbe Element nicht zweimal in derselben Gruppe ausser in $1, -2, -\frac{1}{2}$ $(\operatorname{mod} p^2)$ vorkommen kann. Man hat nur noch zu zeigen, dass für Eingangelemente $1 + np$, wo $n \leq \frac{p-1}{2}$ ist, nicht zwei Elemente dieses Typus in derselben Gruppe stehen können, denn sie können nur so mit einander zusammenstehen, dass $(1 + n_1 p)(1 + n_2 p) \equiv 1 \pmod{p^2}$ gilt, d. h. $n_1 + n_2 \equiv 0\ (p)$, was ausgeschlossen sein muss, weil n_1 und $n_2 \leq \frac{p-1}{2}$ sind. Man erhält also von den Eingangelementen $1 + np$, $\frac{p-1}{2}$ verschiedene, vollständige Gruppen sechsten Grades $(\operatorname{mod} p^2)$, und so die Nebengruppe $(\operatorname{mod} p^2)$ selbst vom dritten Grade. Die Kolonnenelemente $-1 + np, n = 0, 1, \ldots \frac{p-1}{2}$ ergeben nur zweielementige Gruppen, denn die übrigen Elemente können nicht zu p^2 prim auftreten. Weil $(-1 + np)x \equiv 1$ (p^2) die Lösung $x \equiv -(1 + np)$ besitzt, so folgt $(\lambda + 1 - np)(\lambda + 1 + np) \equiv (\lambda + 1)^2$ (p^2) als die Invariante jener Gruppen. Sind in der Weise alle Werte $-1 + np$ genommen worden, so sind also für $p = 6n - 1$, wo keine Nebengruppe zweiten Grades auftreten kann, alle zu p^2 prime Werte gefunden, deren Anzahl also gleich

$$6(n-1)p + 6\frac{p-1}{2} + 3 + 2\frac{p-1}{2} = (6n-2)p - 1 = \varphi(p^2) - 1$$

ist, und die Zahl der Gruppen

$$(n-1)p + \frac{p-1}{2} + 1 + \frac{p-1}{2} = n \cdot p,$$

wie zu erwarten war. Das Zusammenrechnen der Elemente für $p = 6n + 1$ wird erst folgen, wenn das der Nebengruppe zweiten Grades $(\operatorname{mod} p)$ gehörige System (c) eingehend diskutiert worden ist.

In der folgenden Darstellung möge mit $a_m^{(b)}$ ein Element genannt werden, das in b:ter Kolonne und $m + 1$:ter Zeile steht, und statt $a_0^{(b)}$ wird einfach $a^{(b)}$ geschrieben. In der Tabelle oben ging ich vom Eingangelemente $a_m^{(1)} = a^{(1)} + mkp$ aus, wo k gleich Eins gewählt wurde, aber doch beliebig zu wählen war.

Aus

$$\left.\begin{aligned} a_m^{(1)} \; a_m^{(2)} &\equiv 1 \\ a_{m+1}^{(1)} a_{m+1}^{(2)} &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \quad (p^2)$$

ergibt sich nach Subtraktion und Anwendung von

$$a_{m+1}^{(1)} - a_m^{(1)} = kp$$

$$a_m^{(1)} \left(a_{m+1}^{(2)} - a_m^{(2)} \right) + kpa_{m+1}^{(2)} \equiv 0 \quad (p^2)$$

oder auch

$$a_{m+1}^{(2)} - a_m^{(2)} \equiv - kpa_{m+1}^{(2)} a_m^{(2)} \quad (p^2). \tag{9}$$

Es ist aber

$$a_{m+1}^{(1)} a_m^{(1)} = (a^{(1)})^2 + ka^{(1)} p (2m + 1)$$

oder

$$a_{m+1}^{(1)} a_m^{(1)} \equiv (a^{(1)})^2 \quad (p)$$

und aus

$$a_{m+1}^{(1)} a_m^{(1)} a_{m+1}^{(2)} a_m^{(2)} \equiv 1 \quad (p)$$

ergibt sich

$$a_{m+1}^{(2)} a_m^{(2)} \equiv \left(\frac{1}{a^{(1)}}\right)^2 \equiv (a^{(2)})^2 \quad (p)$$

d. h. (9) lässt sich schreiben

$$a_{m+1}^{(2)} - a_m^{(2)} \equiv [- k (a^{(2)})^2] p \quad (p^2),$$

wo

$$- k(a^{(2)})^2 = [- k (a^{(2)})^2] + lp$$

ist, und also $[-k(a^{(2)})^2]$ der Rest, nachdem $-k (a^{(2)})^2$ nach (mod p) reduziert worden ist. In ähnlicher Weise können die Kolonnenwerte der übrigen Kolonnen bestimmt werden, so dass man das folgende Schema aller Werte erhält

$$
\begin{aligned}
a_m^{(1)} &\equiv a^{(1)}+m\,kp, & k &= \text{beliebig}\\
a_m^{(2)} &\equiv a^{(2)}+mk_2p, & k_2 &= [-k\,(a^{(2)})^2]\\
a_m^{(3)} &\equiv a^{(3)}+mk_3p, & k_3 &= -k\\
a_m^{(4)} &\equiv a^{(4)}+mk_4p, & k_4 &= [+k\,(a^{(4)})^2] \qquad (p^2)\\
a_m^{(5)} &\equiv a^{(5)}+mk_5p, & k_5 &= -k_4\\
a_m^{(6)} &\equiv a^{(6)}+mk_6p, & k_6 &= -k_2
\end{aligned}
\tag{10}
$$

In der Tabelle für $p=11$ waren $k=1$, $a^{(2)}\equiv -30$, $(a^{(2)})^2\equiv 900\equiv -2$ (11) d. h. $[-k\,(a^{(2)})^2]=2$. Also werden die Elemente der zweiten Kolonne gleich $a_m^{(2)}\equiv -30+{}$ $+2.11\,m$, und $(a^{(4)})^2\equiv 576\equiv 4$, $[+k(a^{(4)})^2]\equiv 4$, d. h. $a_m^{(4)}\equiv 24+4.11\,m, a_m^{(5)}$ $-25-4.11\,m, a_m^{(6)}\equiv 20-2.11\,m$, Werte, die in der Tabelle leicht gefunden werden können. Ähnliche Resultate erhält man für das Gruppensystem (1). Mit Hülfe dieser Resultate kann ohne weiteres eine Tabelle (mod 169) über ein System (c) aus den Lösungen der Kongruenz $\lambda^2+\lambda+1\equiv 0$ (13) ausgeführt werden, d. h. in diesem Falle haben wir ein System (3), weil $3^2+3+1\equiv 0$ (13) ist. Die erste Gruppenzeile (mod 169) wird also, $+3, -56, -4, +42, -43, +55$ (mod 169) und daraus nach (10) die übrigen

$$
\begin{aligned}
a_m^{(1)} &\equiv +\ \ 3+13\,m & a_m^{(4)} &\equiv +42-4.13\,m\\
a_m^{(2)} &\equiv -56-\ 3.13\,m & a_m^{(5)} &\equiv -43+4.13\,m \qquad (169)\\
a_m^{(3)} &\equiv -\ \ 4-13\,m & a_m^{(6)} &\equiv +55+3.13\,m
\end{aligned}
$$

Infolge des Charakters des Systems (3), aus Lösungen zu $\lambda^2+\lambda+1\equiv 0$ (13) hervorgegangen zu sein, folgt, dass es für alle m $a_m^{(2)}\equiv a_m^{(3)}\equiv a_m^{(5)}$ und $a_m^{(1)}\equiv a_m^{(4)}$ $\equiv a_m^{(6)}$ (13) gelten muss.

Weil aber zwei Zeilen nicht dasselbe Element enthalten können ohne identisch zu werden, und weil dasselbe Element nur zweimal in Kolonnen, die einander (mod 13) kongruent sind, auftreten kann, denn nur jene führen zum selben Werte für (mod p) über, so erhält man die Zahl der doppelt vorkommenden Zeilen durch Lösen der diophantischen Gleichung

$$a_x^{(1)}=a_y^{(4)}=a_z^{(6)}$$

d. h.

$$4y+x\equiv 3 \pmod{13}$$

oder

$$\begin{aligned} y &= 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \\ x &= 3,\ 12,\ 8,\ 4,\ 0,\ 9,\ 5,\ 1,\ 10,\ 6,\ \ 2,\ 11,\ \ 7. \end{aligned}$$

Gehe ich also von der ersten Zeile als behalten aus, dann muss die dritte gestrichen werden, weil $a^{(1)}_0 \equiv a^{(4)}_3$ die Identität dieser Zeilen mit sich führt. Mit der dritten muss dann auch infolge $a^{(1)}_4 \equiv a^{(4)}_3$, die aus $y \equiv 3$ und $x \equiv 4$ hervorgeht, gestrichen werden. Mit $y \equiv 4$ und $x \equiv 0$ sind wir nun in der ersten Zeile wieder, und es sollen also folgende Zeilen als doppelt auftretend gestrichen werden

behaltene Zeile	gestrichene Zeile
$m = 0$	$m = 3$ und 4
$m = 1$	$m = 12$ » 7
$m = 2$	$m = 8$ » 10
$m = 5$	$m = 9$ » 6

d. h. für jede behaltene Zeile müssen zwei gestrichen werden, eine Eigenschaft, deren Allgemeinheit für jedes System (c) auf folgende Weise dargelegt werden kann. Aus

$$c^{(1)}_m = c^{(1)} + mp \text{ und } c^{(4)}_m = c^{(4)} + mk_4p$$

erhält man nach (10)

$$k_4 \equiv [+k(c^{(4)})^2] \equiv \left[\frac{1}{(1+c^{(1)})^2}\right] \equiv \frac{1}{c^{(1)}} \equiv -(1+c^{(1)})$$

d. h. aus

$$c^{(1)}_x \equiv c^{(4)}_y;\ c^{(1)} + xp \equiv -\frac{1}{1+c^{(1)}} + yk_4p \quad (p^2)$$

$$x \equiv -\frac{(c^{(1)})^2 + c^{(1)} + 1}{p(1+c^{(1)})} + yk_4 \equiv b + yk_4 \quad (p).$$

Für

$y \equiv r$ erhält man $x \equiv b + rk_4$

$y \equiv b + rk_4$ » » $x \equiv b + k_4(b + rk_4) \equiv rk_4^2 + b(1 + k_4) \quad (p)$

$y \equiv rk_4^2 + b(1 + k_4)$ » » $x \equiv rk_4^3 + b(1 + k_4 + k_4^2) \equiv r$

weil, wie oben gezeigt wurde, $k_4 \equiv -(1 + c^{(1)}) \pmod p$ gilt, wo

$$(c^{(1)})^2 + c^{(1)} + 1 \equiv 0 \quad (p)$$

ist. Mit $m=r$ als behaltene Zeile müssen also $m\equiv b+rk_4$ und $m\equiv rk_4^2+b(1+k_4)$ (p) gestrichen werden, d. h. nur ein Drittel der Zeilen sollen behalten werden, wenn die Nebengruppe zweiten Grades (mod p^2) selbst nicht gerechnet wird. Man kann natürlich auch $c_x^{(1)}\equiv c_z^{(6)}(p)$ gebrauchen. Es lässt sich dann auch leicht zeigen, dass dabei dieselben Zeilen gestrichen werden müssen. In einem Systeme (c) kommen also $\frac{p-1}{3}$ vollständige Gruppen vor und das Zusammenrechnen der Elemente im Falle $p=6n+1$ ergibt also:

Elemente

$$6p(n-1)+6\frac{p-1}{2}+2\frac{p-1}{2}+3+6\frac{p-1}{3}+2=p(p-1)-1=\varphi(p^2)-1,$$

Zahl der Gruppen

$$p(n-1)+\frac{p-1}{2}+1+\frac{p-1}{2}+\frac{p-1}{3}+1=np+2n+1.$$

Voll ausgeschrieben sieht die Tabelle für das System (3) (mod 169), wie auf der folgenden Seite angegeben worden ist, aus.

Die Untersuchung der Invariantenkonstanten schreitet auf folgende Weise fort.

Für ein System (a) möge k_{τ_v} die Invariantenkonstanten (mod p^2) heissen und k_τ die der Gruppe a (mod p). Dann gilt für alle v, $k_{\tau_v}\equiv k_\tau$ (mod p), und man erhält, wenn die Invariante der Gruppe v in der Form $\varphi(a_{v-1}^{(1)}, k_{\tau_v})$, wo $k_{\tau_v}\equiv k_{\tau_1}+$ $+r_v p$ ist, geschrieben wird, folgende Entwicklungen

$$\varphi(a_{v-1}^{(1)}, k\ )\equiv\varphi(a^{(1)}+vkp, k_{\tau_1}+r_v p)$$
$$\varphi(a^{(1)}, k_{\tau_1})+vkp\varphi'_a(a^{(1)}, k_{\tau_1})+r_v p\varphi'_k(a^{(1)}, k_{\tau_1})\equiv 0 \quad (p^2)$$

wo $\varphi'_a(a^{(1)}, k_{\tau_1})$ die Derivierte der Funktion $\varphi(a^{(1)}, k_{\tau_1})$ nach $a^{(1)}$ als Variabel ist. Ähnliches gilt für $\varphi'_k(a^{(1)}, k_{\tau_1})$.

Aus der vorigen Kongruenz erhält man

$$vk\varphi'_a(a^{(1)}, k_{\tau_1})+r_v\varphi'_k(a^{(1)}, k_{\tau_1})\equiv 0 \quad (p). \tag{11}$$

Wäre es möglich, dass in einem System (a) $k_{\tau_\mu}\equiv k_{\tau_v}$ (p^2) für $\mu\neq v$ gelten könnte, so ergäbe (11) für $r_\mu\equiv r_v$ (p)

$$\mu k\varphi'_a(a^{(1)}, k_{\tau_1})+r_v\varphi'_k(a^{(1)}, k_{\tau_1})\equiv 0 \quad (p).$$

Nach Subtraktion erhält man

$$k(\mu-v)\varphi'_a(a^{(1)}, k_{\tau_1})\equiv 0 \quad (p)$$

d. h weil $\mu\neq v$ und $k_{\tau_1}\equiv k_\tau$ (p) ist, ergibt sich

1	2	3	4	5	6
λ	$\frac{1}{\lambda}$	$-(1+\lambda)$	$-\frac{1}{1+\lambda}$	$-\frac{\lambda}{1+\lambda}$	$-\frac{\lambda+1}{\lambda}$
$3+0\cdot13\equiv+3$	$-56-0\cdot39\equiv-56$	$-4-0\cdot13\equiv-4$	$42-0\cdot52\equiv+42$	$-43+0\cdot52\equiv-43$	$55+0\cdot39\equiv+55$
$3+1\cdot13\equiv+16$	$-56-1\cdot39\equiv+74$	$-4-1\cdot13\equiv-17$	$42-1\cdot52\equiv-10$	$-43+1\cdot52\equiv+9$	$55+1\cdot39\equiv-75$
$3+2\cdot13\equiv+29$	$-56-2\cdot39\equiv+35$	$-4-2\cdot13\equiv-30$	$42-2\cdot52\equiv-62$	$-43+2\cdot52\equiv+61$	$55+2\cdot39\equiv-36$
$3+3\cdot13\equiv+42$	steht in der Zeile 1, Kolonne 4, und deshalb wird diese Zeile gestrichen $m=0$				
$3+4\cdot13\equiv+55$	» » » » 1, » 5, » » » » » » $m=0$				
$3+5\cdot13\equiv+68$	$-56-5\cdot39\equiv-82$	$-4-5\cdot13\equiv-69$	$42-4\cdot52\equiv-49$	$-43+5\cdot52\equiv+48$	$55+5\cdot39\equiv+81$
$3+6\cdot13\equiv+81$	steht in der Zeile 6, Kolonne 6, und deshalb wird diese Zeile gestrichen $m=5$				
$3+7\cdot13\equiv-75$	» » » » 2, » 6, » » » » » » $m=1$				
$3+8\cdot13\equiv-62$	» » » » 3, » 4, » » » » » » $m=2$				
$3+9\cdot13\equiv-49$	» » » » 6, » 4, » » » » » » $m=5$				
$3+10\cdot13\equiv-36$	» » » » 3, » 6, » » » » » » $m=2$				
$3+11\cdot13\equiv-23$	$-56-11\cdot39\equiv+22$	$-4-11\cdot13\equiv+22$	$42-11\cdot52\equiv-23$	$-43+11\cdot52\equiv+22$	$55+11\cdot39\equiv-23$
$3+12\cdot13\equiv-10$	steht in der Zeile 2, Kolonne 4, und deshalb wird diese Zeile gestrichen $m=1$				

(mod 169).

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_a(a^{(1)}, k_\tau) &\equiv 0 \\ \varphi\ (a^{(1)}, k_\tau) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (p)$$

die gleichzeitig gelten müssen, was nur für Nebengruppen zutreffen kann. In einem System (a) können also die k_{τ_v} in folgender Form gesetzt werden

$$k_{\tau_v} \equiv k_{\tau_1} + vrp \quad (p^2) \tag{12}$$

wo r aus der Kongruenz

$$k\varphi'_a(a^{(1)}, k_{\tau_1}) + r\varphi'_k(a^{(1)}, k_{\tau_1}) \equiv 0 \quad (p)$$

bestimmt worden ist. Auf dieselbe Weise kann auch gezeigt werden, dass in einem Systeme (1) alle Invariantenkonstanten gleich werden, denn setzen wir $\varphi(1, k_\tau) \equiv 0\,(p)$ und $\varphi(1 + \mu p, k_{\tau_\mu}) \equiv 0\,(p^2)$, so ergibt sich für $k_{\tau_\mu} \equiv k_{\tau_1} + r_\mu p\ (p^2)$

$$\varphi(1 + \mu p, k_{\tau_1} + r_\mu p) \equiv \varphi(1, k_{\tau_1}) + \mu p\varphi'(1, k_{\tau_1}) + r_\mu p\varphi'_k(1, k_{\tau_1}) \equiv 0 \quad (p^2)$$

d. h.

$$r_\mu p\varphi'_k(1, k_{\tau_1}) \equiv r_\mu p[(1 + \mu p)(2 + \mu p)]^2 \equiv 0 \quad (p^2)$$

oder $r_\mu \equiv 0$ (p) d. h. $r_\mu = 0$, und es gelten also für alle diese Gruppen

$$k_{\tau_v} \equiv k_{\tau_a} \equiv -\frac{27}{4} \qquad (\mathrm{mod}\ p^2) \tag{12}$$

und die Invariante der Nebengruppe selbst mag

$$\sqrt{K(\lambda) + k_{\tau_a} L(\lambda)}$$

geschrieben werden.

Weil also in einem System (a) für $v \neq \mu$ auch immer $k_{\tau_v} \not\equiv k_{\tau_\mu}$ (p^2) gilt, so erhält man

$$\prod_v [K(\lambda) + k_{\tau_v} L(\lambda)] \equiv [K(\lambda) + k_{\tau_s} L(\lambda)]^p + [\ ]^{p-1} L\, p \sum_1^{h-1} n + \cdots$$
$$\equiv [K(\lambda) + k_{\tau_s} L(\lambda)]^p \quad (p^2)$$

wo k_{τ_s} eine beliebige Invariantenkonstante innerhalb des Systems (a) ist, das also als Lösung aus der Kongruenz

$$[K(\lambda) + k_{\tau_s} L(\lambda)]^p \equiv 0 \quad (p^2)$$

erhalten werden kann. Man sieht aber leicht ein, dass schon

$$[K(\lambda) + k_{\tau_s} L(\lambda)]^2 \equiv 0 \quad (p^2) \tag{13}$$

dies tut, da jeder Faktor für sich $\equiv 0 \pmod{p}$ wird.

In derselben Weise kann auch das ganze System (1) und die Nebengruppe selbst doppelt als Lösung aus

$$[\sqrt{K(\lambda) + k_{r_a} L(\lambda)}]^2 \equiv 0 \quad (p^2) \tag{14}$$

erhalten werden.

Es sei jetzt angenommen, dass in

$$(\lambda + 1)^p - \lambda^p - 1 = p\lambda(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)^\varepsilon f_p(\lambda, 1)$$

$f_p(\lambda, 1) \equiv 0 \ (p)$ für $\lambda \equiv a \ (p)$ lösbar wäre, d. h. dass $\lambda \equiv a$ eine Lösung der Kongruenz

$$(\lambda + 1)^p - \lambda^p - 1 \equiv 0 \quad (p^2) \tag{15}$$

ist. Dann muss infolge des Invariantencharakters von $f_p(\lambda, 1)$ das ganze System die (a) Kongruenz (15) lösen. Schreiben wir also System (a) wie gewöhnlich, dann stehen folgende Elemente in Zeile $m = 0$

$$a, \frac{1}{a}, \quad -(1 + a), \quad -\frac{1}{1 + a}, \quad -\frac{a}{1 + a}, \quad -\frac{1 + a}{a}$$

und in Zeile $m = v$

$$a^p = a + vp, \quad \frac{1}{a^p}, \quad -(1 + a^p), \quad -\frac{1}{1 + a^p}, \quad -\frac{a^p}{1 + a^p}, \quad -\frac{1 + a^p}{a^p}.$$

Infolge (15) kann diese Zeile auch so geschrieben werden

$$a^p, \quad \frac{1}{a^p}, \quad -(1 + a)^p, \quad -\frac{1}{(1 + a)^p}, \quad -\left(\frac{a}{1 + a}\right)^p, \quad -\left(\frac{1 + a}{a}\right)^p.$$

Die erste Art die Gruppe $m = v$ zu schreiben ist daraus veranlasst, dass mit a immer $a^p = a + vp$, infolge $\dfrac{a^{p-1} - 1}{p} \equiv \dfrac{v}{a} \ (p)$ als erstes Kolonnenelement auftreten muss, und die zweite, wie gesagt, weil a eine Lösung zu (15) sein soll. Mit Hülfe der Formeln (10) findet man, dass das System (a), das (15) löst, notwendig die Eigenschaft haben muss, dass die Elemente jeder Gruppe zur p:ten Potenz erhoben kolonnenweise in die einzige Gruppe $m = v$ übergehen, die dabei in sich selbst übergeht. Ich nenne diese spezielle Gruppe innerhalb eines Systemes (a) ihre v-Gruppe und ihre Invariantenkonstante k_{r_v}. Das Charakteristische der Elemente einer v-Gruppe sind also die beiden Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{p-1} &\equiv 1 \\ (\lambda+1)^{p-1} &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \pmod{p^2} \tag{16}$$

die gleichzeitig gelten müssen.

Nun können wir also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das System (a) (15) löst, so formulieren, dass es eine v-Gruppe haben muss.

Angenommen, dass eine v-Gruppe existieren kann, was im Falle eines Systems (c) unmittelbar einleuchtet, so können folgende Entwicklungen durchgeführt werden. Es sei τ ein Faktor in $p-1$ von der Art, dass schon

$$\begin{aligned} a_v^{(\varrho)^\tau} &\equiv 1 \\ (-1)^\tau \left(1 + a_v^{(\varrho)}\right)^\tau &\equiv 1 \end{aligned} \qquad \pmod{p^2}$$

gelten, dann ergibt sich

$$1 \equiv a_v^{(\varrho)^{r\tau}} \equiv (a^{(\varrho)} + vkp)^{r\tau} \equiv a^{(\varrho)^{r\tau}} + \frac{rv\tau k}{a^{(\varrho)}} p \qquad (p^2)$$

für beliebiges r. Also

$$a^{(\varrho)^{r\tau}} \equiv 1 - \frac{rv\tau k}{a^{(\varrho)}} p \qquad \pmod{p^2} \tag{17}$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\begin{aligned} \left(1 + a_v^{(\varrho)}\right)^{r\tau} &\equiv (1 + a^{(\varrho)} + vkp)^{r\tau} \equiv \\ &\equiv (1 + a^{(\varrho)})^{r\tau} \left[1 + \frac{rv\tau k}{1 + a^{(\varrho)}} p\right] \qquad \pmod{p^2} \end{aligned}$$

d. h.

$$(1 + a^{(\varrho)})^{r\tau} \equiv (-1)^{r\tau} \left(1 - \frac{rv\tau k}{1 + a^{(\varrho)}} p\right) \qquad \pmod{p^2}.$$

Daraus erhält man für ein beliebiges Gruppenelement $a_m^{(\varrho)}$

$$\begin{aligned} a_m^{(\varrho)^{r\tau+1}} &\equiv (a^{(\varrho)} + mkp)^{r\tau+1} \\ &\equiv a^{(\varrho)^{r\tau+1}} + a^{(\varrho)^{r\tau}} mk(r\tau+1)p \\ &\equiv a^{(\varrho)} + k[m(r\tau+1) - rv\tau]p \\ &\equiv a^{(\varrho)} + k[(m-v)(r\tau+1) + v]p \qquad \pmod{p^2} \end{aligned} \tag{18}$$

und so auch

$$(-1)^{r\tau}\left(1+a_m^{(0)}\right)^{r\tau+1}\equiv(1+a^{(0)})+k[(m-v)(r\tau+1)+v]p \quad (p^2). \qquad (18^1)$$

Aus (18) und (18^1) ersieht man, dass

$$(-1)^{r\tau}\left(1+a_m^{(0)}\right)^{r\tau+1}\equiv 1+a_m^{(0)r\tau+1} \qquad (\text{mod } p^2)$$

gilt, d. h. System ($a^{(1)}$) löst die Kongruenzen

$$(-1)^{r\tau}(1+\lambda)^{r\tau+1}\equiv\lambda^{r\tau+1}+1 \qquad (\text{mod } p^2) \qquad (19)$$

für alle r. Die Werte $r=1$ und $\tau=p-1$ ergeben (15). Im Falle $\tau=3$ d. h. $p=6n+1$ drückt (19) eine bekannte Tatsache aus, nähmlich dass alle diese Ausdrücke mit $(\lambda^2+\lambda+1)^2$ teilbar werden.

Weiter folgt aus (18) und (18^1), weil $[(m-v)(r\tau+1)+v]\equiv k_1$ (p) eindeutig in k_1 und m lösbar ist, wenn die eine gegeben wird (denn v und τ haben konstante Werte im Gruppensysteme), dass die Elemente einer Gruppe m zur Potenz $(r\tau+1)$ erhoben wieder eine Gruppe desselben Systems bilden, wo die Gruppenzeile aus der obigen Kongruenz gefunden wird. Wiederholt man diese Operation, die man Subst. $\overline{r\tau+1}$ nennen kann, so werden die Gruppenzeilen wieder mit behaltener Kolonnenordnung permutiert und $k_2\equiv(m-v)(r\tau+1)^2+v$ (p). Nach s Substitutionen erhält man also die Gruppenzeile $k_s\equiv(m-v)(r\tau+1)^s+v$ (p), d. h. die anfängliche, wenn $(r\tau+1)^s\equiv 1$ (p) gilt. In derselben Weise kann das System der Subst. $\overline{r\tau-1}$ unterworfen werden. Dabei wird aber die Kolonnenordnung verändert und die Gruppenzeile aus $k_1\equiv(v-m)(r\tau-1)+v$ (p) gefunden. Durch Wiederholen ergibt sich $k_2\equiv(m-v)(r\tau-1)^2+v$ (p), d. h. weil $(r\tau-1)^2$ eine Substitution von Art $(r\tau+1)$ ist, so haben also die Kolonnen wieder ihre ursprüngliche Ordnung erhalten.

Um das eben angeführte mit Beispielen zu beleuchten, kann man sich der Tabelle des Systems (3) (mod 169) bedienen. Weil $p=13$ die primitiven Wurzeln ± 2 haben und τ gleich 3 ist, so muss die Subst. $\overline{-3+1}=$ Subst. $\overline{-2}$ von der Art sein, alle Gruppenzeilen mit behaltener Kolonnenordnung zu permutieren, und die Elemente nach zwölf Wiederholungen wieder in der anfänglichen Zeile stehen. Man bestätigt dies aus

$3^{-2}\equiv-75$ in der Zeile 8		$49^{-2}\equiv+29$ in der Zeile 3		
$75^{-2}\equiv+81$ » » » 7		$29^{-2}\equiv+42$ » » » 4		
$81^{-2}\equiv-62$ » » » 9		$42^{-2}\equiv+16$ » » » 2		(mod 169)
$62^{-2}\equiv+55$ » » » 5		$16^{-2}\equiv+68$ » » » 6		
$55^{-2}\equiv-10$ » » » 13		$68^{-2}\equiv-36$ » » » 11		
$10^{-2}\equiv-49$ » » » 10		$36^{-2}\equiv+3$ » » » 1		

Die wiederholte Anwendung der Subst. $\overline{3 - 1}$ soll dagegen ein Element aus der ersten Kolonne abwechselnd in die zweite und erste Kolonne hineinlegen. In unserer Tabelle für $p = 13$ ist $v = 11 \equiv -2 \pmod{13}$. Setzen wir also in $k_1 \equiv (v - m)(r\tau - 1) + v \ (13)$ $v = -2$, $r\tau - 1 = 2$, so ist $k_1 + 1$ die Zeile, und die Werte ergeben sich wie hier unten angegeben wird.

Man erhält nähmlich (mod 169)

$3^2 \equiv + 9$	steht für $m =$	0	und $k_1 \equiv$	7	in der Zeile	8,	Kol.	2
$9^2 \equiv + 81$	» »	$= 7$	»	$\equiv 6$	» » »	7,	»	1
$81^2 \equiv - 30$	» »	$= 6$	»	$\equiv 8$	» » »	9,	»	2
$30^2 \equiv + 55$	» »	$= 8$	»	$\equiv 4$	» » »	5,	»	1
$55^2 \equiv - 17$	» »	$= 4$	»	$\equiv 12$	» » »	13,	»	2
$17^2 \equiv - 49$	» »	$= 12$	»	$\equiv 9$	» » »	10,	»	1
$49^2 \equiv + 35$	» »	$= 9$	»	$\equiv 2$	» » »	3,	»	2
$35^2 \equiv + 42$	» »	$= 2$	»	$\equiv 3$	» » »	4,	»	1
$42^2 \equiv + 74$	» »	$= 3$	»	$\equiv 1$	» » »	2,	»	2
$74^2 \equiv + 68$	» »	$= 1$	»	$\equiv 5$	» » »	6,	»	6
$68^2 \equiv + 61$	» »	$= 5$	»	$\equiv 10$	» » »	11,	»	2
$61^2 \equiv + 3$	» »	$= 10$	»	$\equiv 0$	» » »	1,	»	1

Die Subst. $\overline{3 + 1} = 4$ soll nur Werte aus der ersten Kolonne geben und, da $4^6 \equiv 1 \ (13)$ ist, so werden die Gruppenzeilen in zwei Zyklen mit sechs Reihen in jedem Zyklus verteilt etc.

Zuletzt sei noch folgendes hinzugefügt. Vorausgesetzt, dass eine v-Gruppe existiert, so findet man, dass das ganze System (a) die Kongruenz

$$(\lambda^{2p} + \lambda^p + 1)^3 + h_{\tau_v}[\lambda^p(\lambda^p + 1)]^2 \equiv 0 \qquad \pmod{p^2} \tag{20}$$

löst, denn sie hat die sechs Lösungen $\lambda^p \equiv a + vp$, $\dfrac{1}{a + vp}$ etc. (p^2), die infolge $(a + vp)^{p-1} \equiv 1$ etc. (p^2) alle sechs lösbar werden, das ganze System (a) ergebend. Aus der Formel

$$[K(\lambda) + h_{\tau_v} L(\lambda)]^p = K(\lambda)^p + h_{\tau_v}^p L(\lambda)^p + p[K(\lambda) + h_{\tau_v} L(\lambda)]\,\chi(\lambda)$$

geht hervor, dass das System (a) ebenfalls die Kongruenz

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)^{3p} + h_{\tau_v}^p \lambda (\lambda + 1)^{2p} \equiv 0 \qquad (p^2)$$

löst, weil $K(\lambda) + h_{\tau_v} L(\lambda) \equiv 0 \pmod p$ für das System giltig ist. Also löst das System (a) auch ihre Differenz, die, wenn $\lambda(\lambda + 1) \equiv \alpha$ gesetzt wird, infolge (15) sich so schreiben lässt

$$(\alpha^p + 1)^3 + h_{\tau_v} \alpha^{2p} \equiv (\alpha + 1)^{3p} + h_{\tau_v}^p \alpha^{2p} \qquad (\text{mod } p^2). \tag{21}$$

Trifft es überhaupt zu, dass $h_{\tau_v}^{p-1} \equiv 1$ (p^2) ausfällt, dann wird

$$(\alpha + 1)^p - \alpha^p - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^2) \tag{22}$$

d. h. wenn das System (λ_s) eine v-Gruppe hat, deren Invariantenkonstante $h_{\tau_v}^{p-1} \equiv 1$ (p^2) genügt, so muss $\lambda_s(\lambda_s + 1) \equiv \alpha_s \pmod p$ wieder ein System (α_s) mit einer v-Gruppe geben, von deren Invariantenkonstante aber nichts ausgesagt werden kann.

Was endlich die Existenz der v-Gruppen betrifft, so haben wir gesehen, dass im Falle eines Systems (c) immer v-Gruppe vorhanden ist, im Falle eines Systems (1) zeigt $2^{1092} \equiv 1$ (1093^2), dass v-Gruppe vorhanden sein kann, und im Falle eines Systems (a) gibt $p = 59$ ein sehr lehrreiches Beispiel, denn es kommen nämlich hier zwei verschiedene v-Gruppen vor, was gar nicht immer unter den mit v-Gruppe versehenen, doch ziemlich seltenen Primzahlen der Fall ist. Man hat die Gruppen

$$\left.\begin{array}{l} 4,\ 15,\ -5,\ -12,\ +11,\ -16,\ h_{\tau_v} \equiv 18 \\ 3,\ 20,\ -4,\ -15,\ +14,\ -21,\ h_{\tau_v} \equiv 4 \end{array}\right\} \quad (59) \tag{23}$$

Hier sind:

$$\left.\begin{array}{l} 3^{59} \equiv 3 + 5 \cdot 59 \\ 4^{59} \equiv 4 + 5 \cdot 59 \\ 5^{59} \equiv 5 + 5 \cdot 59 \\ 11^{59} \equiv 11 - 24 \cdot 59 \\ 12^{59} \equiv 12 - 24 \cdot 59 \\ 14^{59} \equiv 14 - 19 \cdot 59 \\ 15^{59} \equiv 15 - 19 \cdot 59 \\ 16^{59} \equiv 16 - 19 \cdot 59 \\ 20^{59} \equiv 20 - 14 \cdot 59 \\ 21^{59} \equiv 21 - 14 \cdot 59 \\ 18^{59} \equiv 18 + 27 \cdot 59 \end{array}\right\} \quad (59^2) \tag{24}$$

Die respektiven v-Gruppen sind

$$\begin{matrix} 3^{59} \equiv 3 + 5\cdot 59 \\ 4^{59} \equiv 4 + 5\cdot 59 \end{matrix}\; h_{\tau_v} \equiv 4 + 17\cdot 59; \qquad \begin{matrix} 4^{59} \equiv 4 + 5\cdot 59 \\ 5^{59} \equiv 5 + 5\cdot 59 \end{matrix}\; h_{\tau_v} \equiv 18 - 32\cdot 59 \qquad (59^2)$$

und im letzten Falle wird h_{τ_v} aus

$$[\overline{4 + 5\cdot 59}^2 + 4 + 5\cdot 59 + 1]^3 + h_{\tau_v}\overline{(4 + 5\cdot 59)(5 + 5\cdot 59)^2} \equiv 0 \qquad (59^2)$$

bestimmt d. h.

$$(21 - 14\,.\,59)^3 + h_{\tau_v}(20 - 14\,.\,59)^2 \equiv 0 \qquad (59^2).$$

Schon daraus ersieht man nach den obigen Werten (24), dass

$$h_{\tau_v}^{58} \equiv 1 \qquad (\text{mod } 59^2)$$

gelten muss, was ja auch der Fall ist. Es sollen also die $\lambda(\lambda+1) \equiv \alpha$ (59), wo λ ein Element der Gruppe $h_{\tau_v} \equiv 18$ (59) ist, wieder Gruppen bilden, die als System (α) nach (21) und (22) wieder v-Gruppen haben. In der Tat erhält man, dass $4\,.\,5 \equiv 20$, $11\,.\,12 \equiv 14$ und $15\,.\,16 \equiv 4$ (mod 59) sind.

Zusatz.

Endlich wollen wir noch zusehen, unter welchen Bedingungen

$$(\lambda + 1)^p - \lambda^p - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^3)$$

lösbar werden kann. Von demn oben gezeigten ausgehend, sieht man ein, dass sie die Form

$$\begin{matrix} \lambda \equiv a^p \equiv a + mp + np^2 \\ (a + 1)^p \equiv a + 1 + mp + np^2 \end{matrix} \qquad (\text{mod } p^3)$$

haben müssen, denn

$$(a + mp + np^3 + 1)^p - (a + mp + np^2)^p - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^3)$$

gibt

$$(a + 1)^p - a^p - 1 + mp^2((a + 1)^{p-1} - a^{p-1}) \equiv 0 \qquad (p^3)$$

d. h.

$$(a + 1)^p - a^p - 1 \equiv 0 \qquad (p^3).$$

Von den Lösungen (mod p^2) ausgehend, sieht man ohne weiteres ein, dass sie die obige Form haben müssen. Im Falle $p = 59$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 3^{59} &\equiv 3 + 5 \cdot 59 + 34 \cdot 59^2 \\ 4^{59} &\equiv 4 + 5 \cdot 59 - 17 \cdot 59^2 \qquad \pmod{59^3} \\ 5^{59} &\equiv 5 + 5 \cdot 59 + 18 \cdot 59^2 \end{aligned}$$

Es existieren also keine Lösungen zu

$$(\lambda + 1)^{59} - \lambda^{59} - 1 \equiv 0 \qquad \pmod{59^3}$$

Die Kriterien der Lösungen (mod p^4) werden nicht mehr so einfach und übersichtlich.

BIBLIOGRAPHIE.

Athenæum.

Roma.

SIBIRANI, FILIPPO, Riassunto-formulario di geometria analitica, algebra, calcolo infinitesimale, calcolo vettoriale e meccanica razionale. — IV + 575 pp. 8. 1915. Lire 12: —

1. Sistemi di coord. e loro trasformazioni. Geometria nelle forme di prima specie. Rappresentaz. analitica delle curve piane, superficie e curve gobbe. La retta nel piano e il punto come inviluppo d. rette per esso. Curve piane speciali. Le coniche. Il piano n. spazio e il punto come inviluppo di piani per esso. La retta n. spazio. Alcune superficie e curve storte speciali. Le quadriche. Proiettività fra forme di 2:a specie, di 3:a specie. — 2. Congruenze. Calcolo combin. e sue applicaz. Probabilità. Sostituzioni. Determinanti. Sistemi di equaz. lin. I numeri reali e la corrispondenza fra essi e i segmenti. Numeri complessi. Limiti. Le serie. Prodotti infin. e frazioni continue. Generalità s. funzioni. Funz. raz. intere. Primi teoremi sulle equaz. algebr. Funz. simmetriche d. radici. Risultato-eliminaz.-discrimin. Sostituzioni lin.-trasformaz. nelle equaz. Equazioni binomie, cub. e biquadrat. Risoluzione alg. delle equaz. Separaz. d. radici. Risoluzioni num. d. equaz. — 3. Altre nozioni gen. sulle funz. Continuità e discontin. Infinitesimi ed infiniti. Integrale def. Derivate e differenz. d. funz. d'una variabile. Deriv. e differenz. d. funz. di più variabili. Integrazione indef. Integrali di funz. aventi punti di infin. ed integrali estesi ad intervalli infiniti. Integrali d. funz. di più variabili. Funz. implicite. Formule abbrev. del Taylor-espressioni che si presentano sotto forma indeterm. Crescenza e decresc. d. funz.; massimi e minimi. Serie di funz.-ser. di potenze. — Sviluppi in serie d. funz. Funz. trascend. element. Applicazioni d. calcolo alle linee piane. Applicaz. d. calcolo alle linee storte, alle superficie. Equaz. differenz. Sistemi di equaz. diff. Equaz. alle derivate parziali. Elementi d. calcolo d. variazioni. — 4. Definizioni ed operaz. sui vettori. Punti o vettori funz. di variab. numeriche. Funz. di un punto. Applicaz. geom. ed analit. d. teoria d. vettori. — 5. Cinematica d. punto. Moti finiti di un sistema rigido e loro composiz. Analisi d. moto istant. di un sist. rigido. Moto contin. di un sist. rig. Principi fondament. d. statica. Il princ. dei lavori virtuali. Equilibrio d. sistemi articolati e d. fili. La dinamica d. punto materiale libero. Geo-

metria d. masse. Il princ. d'Alembert e le equaz. gen. d. dinamica. Teor. gen. sul moto di un sist. e loro applicaz. Dinamica d. sist. rig. Moto ed equil. relativo. Attraz. newtoniana. Statica d. fluidi. Dinamica d. fluidi. Tavola d. abbrev. Indice.

F. Bruns Boghandels Forlag.

Trondhjem.

BIRKELAND, RICHARD, Lærebok i Matematisk Analyse. Differential- og Integralregning. Differentialligninger. Tillæg. — XII + 500 pp. 8. 1917. Kr. 22:50 inbund.

Differential- og Integralregn.: Om funktioner av en variabel. Satser om størrelser som kan nærme sig nul (uendelig smaa størrelser). Grundlæggende begreper i different. regn. Grundlægg. Begreper i integralregn. Beregn. av arealer og buelængder. Integrationsregler. Om høiere deriverte og differentialer. Krumning av plane kurver. Om rækker. Utvikl. av en funkt. i potensrække. Om maksimum og min. av en funkt. av en variabel. Ubest. uttryk. Element. begreper i analyt. rumgeometri. Andengratsflater. Om flater. Part. deriverte. Om kurver i rummet. Volumberegn. Dobbelintegraler. Flate- og kurveintegraler. Trippelintegraler. Beregn. av legemers tyngdpunkter. Træghetsmomenter. Greens og Stokes integralsatser. Best. integraler. Naar funktionen und. integraltegnet blir uendelig el. naar grænserne blir uendel. store. Derivat. und. integraltegn. Potensrækker efter potenser av to variable. Analyt. funkt. Planimetre og integrafer. — Differentiallign.: Indled. Bemerkn. Eksistensbevis f. ordin. diff. lign. av første orden. Forskjell. typer av diff. lign. av første orden, som lar sig løse ved kvadratur. Diff. lign. av n:te orden uten and. led. Lin. diff. lign. av n:te orden med and. led. Simultane (samtidige) diff. lign. av første orden. Partielle diff. lign. av første orden. Trigonom. el. Fourierske rækker. Eks. paa part. diff. lign. av høiere orden end første. — Tillæg: To- og treradede determinanter. Ombytn. av de variable i dobbel- og trippelintegraler. Nogle elementer av imaginærteorien. Endel bemerkn. om konf. avbildn. Integraler av kompl. funktioner. Cauchys formel. Taylors række.

Cambridge University Press.

Cambridge.

CULLIS, C. E., Matrices and determinoids. (University of Calcutta. Readership Lectures.) Vol. 2. — XXIII + 555 pp. 8. 1918. 42 sh.

Compound matrices. Relations between the elements a. minor determinants of a matrix. Some properties of square matrices. Ranks of matrix products a. matrix factors. Equigradent transformations of a matrix whose elements are constants. Some matrix equat. of the sec. degree. The extravagances of matrices a. of spacelets in homogeneous space. The paratomy a. orthotomy of two matrices a. of two spacelets of homogen. space. Appendices. Index.

GEIKIE, ARCHIBALD, Memoir of JOHN MICHELL. — 108 pp. 8. 1918.

Introduct. Biographical sketch. Scientific work: Contributions to geology. Contribut. to physics. Contribut. to astronomy. Index.

PLUMMER, H. C., An introductory treatise on dynamical astronomy. — XIX + 343 pp. 8. 1918. 18 sh.

The law of gravitation. Introduct. propositions. Motion under a central attraction. Expansions in elliptic motion. Relations between two or more positions in an orbit a. the time. The orbit in space. Conditions for the determination of an elliptic orbit. Determinat. of an orbit. Method of Gauss. Determinat. of parabolic a. circular orbits. Orbits of double stars. Orbits of spectroscopic binaries. Dynamical principles. Variation of elements. The disturbing function. Absolute perturbations. Secular perturbat. Secular inequalities. Method of Gauss. Special perturbations. The restricted problem of three bodies. Lunar theory I. Lunar theory II. Precession, nutation a. time. Libration of thee moon. Formulae of numer. calculation.

WHITTAKER, E. T., A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. With an introduction to the problem of three bodies. 2:nd ed. — XII + 432 pp. 8. 1917. 15 sh.

Kinematical preliminaries. The equations of motion. Principles available for the integration. The soluble problems of particle dynamics. The dynamic. specification of bodies. The soluble probl. of rigid dynamics. Theory of vibrations. Non-holonomic systems. Dissipative syst. The principles of least action and least curvature. Hamiltonian syst. and their integral-invariants. The transformat.-theory of dynamics. Properties of the integrals of dynamical syst. The reduction of the probl. of three bodies. The theorems of Bruns and Poincaré. The general theory of orbits. Integration by trigonometric series.

Carnegie Institution of Washington.

Washington.

STRÖMBERG, GUSTAF, A determination of the solar motion and the stream-motion from radial velocities and absolute magnitudes of stars of late spectral types. (Contributions from the Mount Wilson Solar Observatory. No. 144.) (Reprint. from the Astrophysical Journal, vol. 47, 1918.) — 31 pp. 8. 1918.

Dürr'sche Buchhandlung.

Leipzig.

SCHMIDT, MAX, C. P., Altphilologische Beiträge. H. 1. — 82 p. 1903. M. 1:20.

Gauthier-Villars & Cie.

Paris.

LECORNU, LÉON, Cours de mécanique. T. 3. — 665 pp. 8. 1918. Fr. 25:—.

Résistance d. matériaux: Questions relevant uniquement de la statique rationnelle. Principes de statique graphique. Calcul d. efforts moyens. — Relat. entre l. efforts et

l. déformations. Coefficient de sécurité. Traction et compression. Problème gén. Emploi du théorème du travail virtuel. — Applications. Flexion d. poutres. Pièces annulaires. Calcul d. ressorts. Équilibre d'une plaque. — Flambement. Systèmes hyperstat. Principe du travail minimum. Tensions d'un assemblage réticul. Travées solidaires. Équilibre d. voûtes. — Équilibre d'un massif de terre. Action d'une charge posée sur un plan horizont. Poussées d. terres. — Probl. dynamiques. — Recherches expériment. — *Hydraulique:* Généralités. Hydraulique proprem. dite. Mouvement sans perte not. de charge. Mouvem. avec perte de charge. Pertes locales. Pertes graduelles. Tuyaux. Canaux. — Action d'un liquide sur un solide. — Pneumatique. Lois d. écoulements gazeux. Résist. de l'air. — Procédés de mesure. — *Thermodynamique:* Principes fondament. Principe de l'équivalence. Principe de Carnot. — Transformations irréversibles. Fluides homogènes — Étude spéciale d. gazes. — Etudes spéc. d. vapeurs. Écoulement d. fluides élast. Mélanges combustibles. Propagation d'une onde plane. *Théorie d. machines:* Propriétés gén. Préliminaires. Couple moteur et couple résistant. Volant. Régulateurs. Freins. Efforts intér. dans une machine. Similitude dans l. machines. Classificat. d. récepteurs. — Moteurs hydrauliques. Roues hydraul. Turbines. Moteurs thermiques. Généralités. Moteur à combustion externe. Machines à vapeur. Turbines à vap. Moteurs à combust. interne. — *Notions d'aviation:* Équilibre de l'aéroplane. Virage. Stabilité. Stabilisat. automatique. Hélice.

d'Ocagne, Maurice, Cours de géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique. T. 2: Cinématique appliquée. Stéréométrie. Statique graphique. Calcul graphique. Calcul grapho-mécanique. Nomographie. — 364 pp. 8. Fr. 18: —. 1918.

Théorie d. mécanismes: Généralités. Transformateurs cinémat. Transformat. de rotations avec rapport de vitesses constant. Engrenages. Transformateurs de rotat. avec rapport de vitesses variable. Transformat. de rotat. en translation. — Transformateurs géométriques. Systèmes articulés plans. Syst. articulés gauches. — *Cinématique graphique.* — *Stéréométrie:* Généralités. Voûtes en berceau simples. Arches biaises. Appareil orthogonal. Appareil hélicoïdal. Voûtes en berceau composées. Voûtes div. — *Statique graphique:* Notions prélimin. Définition et usage du dynamique et du funiculaire. Déterminat. graph. d. moments. Applicat. à la détermination d. réactions et d. forces intérieures. Déterminat. d. réactions d. appuis. Déterminat. d. forces intér. dans l. syst. réticulaires. Méthode d. sections. Méthode d. nœuds. Diagrammes réciproques. — Applicat. à la déterminat. d. forces élastiques dans l. pièces chargées. — *Calcul graphique:* Résolution graph. d. équations. Intégration graph. Quadratures graphiques. Notions fondament. s. l. courbes intégrales. Construction graph. d. courbes intégrales. Usage d. quadratures graph. en statique graph. Intégration graph. d. équations différentielles du premier ordre. — *Calcul grapho-mécanique:* Principes géométriques et cinémat. sur lesquels repose ce mode de calcul. Intégromètres. Intégraphes. *Nomographie:* Représentation d. fonctions d'une seule variable. Equat. à deux variables. Nomogrammes à entre-croisement. Équat. à trois variables. Équat. à plus de trois variables. Nomogrammes à alignement. Équat. à trois variables. Équat. à plus de trois variables. Applicat. gén. de la méthode d. points alignés à la résolution d.

triangles sphériques. — Appendice: Sur la description mécanique d. courbes algébriques de degré quelconque. Sur la statique graphique d. systèmes de l'espace. Sur l'intégrat. grapho-mécanique de l'équat. de Riccati au moyen du planimètre hachette. Errata et addenda. Index.

OPPERMANN, ALFRED, Note sur le quadrilatère complet. — 27 pp. 8. 1918.

Jul. Gjellerups Forlag.

København.

HJELMSLEV, J., Laerebog i Geometri, til Brug ved Den Polytekniske Laereanstalt. 2:det Afsnit. — 100 pp. 8. 1918.

Teoretisk Infinitesimalgeometri: Plane Kurver. Almind. Principper. Den konvekse Bue. Hjulliniernes Teori. Variable Kurver. Prakt. Anvendelser. Indhyllingskurver. — Rumkurver og deres Tangentflader. Den simple Bue. Rumkurvers analyt. Fremstilling. Kurver paa Cylinder-, Kugle- og Keglefiader. Tangentflad. til en simpel Bue. Buer med monoton Krumning. Krumningens Aendring ved Udfoldn. Simple Rumkurvers projekt. Egenskaber. — Vindskave Flader. Almind. Bemærkn. Vindskave Keglesnitsflader. Konoider. — Fladers Krumning. Indled. Undersøgelser. Analyt. Bestemmelse af nogle spec. Kurver paa en Flade. Meusnier's Teorem og beslægt. Sætninger. Normalsnitenes Krumning. Indhyllingsflader. Krumningslinier.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung.

Berlin & Leipzig.

BÜRKLEN, O. TH., Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithemetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphär. Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, der Differential- u. Integralrechnung. 3:e Aufl. Neudruck. (Sammlung Göschen. 51.) — 227 pp. 8. 1917. M. 0: 80.

JÄGER, GUSTAV, Theoretische Physik. I: Mechanik und Akustik. 4:e verb. Aufl. Mit 24 Fig. (Sammlung Göschen N:r 76.) — 167 pp. 8. 1916. M. 0: 80 geb.

Lehrbücher d. Mechanik u. Akustik. Mechanik eines Massenpunkts. Mechanik starr. Körper. Mechanik nichtstarrer Punksysteme. Elastizitätstheorie. Hydromechanik. Akustik.

ROSE, MAX, Einleitung in die Funktionentheorie. (Die komplexen Zahlen und ihre elementaren Fuktionen.) (Samml. Göschen 581.) 2. verb. Aufl. — 135 pp. 8. 1918. M. 1: 25 geb.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen. Funkt. einer komplex. Veränderlichen. Reihen m. komplex. Gliedern, im bes. Potenzreihen. Spec. Potenzreihen. Konf. Abbildung.

SIMON, MAX, Analytische Geometrie der Ebene. 3:e verbess. Aufl. Neudr. Mit 52 Fig. (Samml. Göschen N:r 65.) — 195 pp. 8. 1917. M. 1: — geb.

Koordinaten u. Punkt. Die gerade Linie. Der Punkt als Träger der sich in ihm schneidenden Geraden. Parallel-Koordinaten-Transformation. Der Kreis. Die Kegelschnitte. Die Parabel. Die Ellipse. Die Hyperbel. Höhere Kurven. Die Cissoide des Diokles. Cassinische Kurven od. Leminskaten. Die Spirale des Archimedes. Die Zykloide od. Radlinie.

STURM, AMBROS, Geschichte der Mathematik bis zum Ausgange des 18. Jahrhunderts. 3:e Aufl. Mit 7 Fig. (Samml. Göschen N:r 226.) — 155 pp. 8. 1917. M. 1: — geb.

Altertum: Ägypter u. Mesopotamier. Griechen. Voreuklid. Zeit. Blüteperiode. Nachklassische Periode. Römer. Inder. — Mittelalter: Araber. Die Zeit d. Abazisten u. Algorithmiker. Die Zeit d. Wiedererwachens d. Mathematik in Europa. Die Zeit d. Aufschwunges d. Mathematik in Deutschland. — Neuzeit: Die Zeit d. Aufschwunges d. Algebra. XVII. Jahrhundert. XVIII. Jahrhundert. Reg.

WIELEITNER, H., Algebraische Kurven. Neue Bearb. II: Allgemeine Eigenschaften. (Samml. Göschen 436.) — 123 pp. 8. 1918. M. 1: 25 geb.

Schnittpunkte zweier Kurven. Polareigenschaften. Die Plückerschen Formeln. Die Hessesche u. verwandte Kurven. Rationale Kurven. Biration. Kurven. Birationale Transformation. Kurven dritt. Ordnung. Kurven viert. Ordnung.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Hannover.

KIEPERT, LUDWIG, Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. T. 2: Integral-Rechnung. 11:e verm. Aufl. d. gleichnamigen Leitfadens von MAX STEGEMANN. Mit 186 Fig. — XXIV + 1020 pp. 8. 1918. M. 15: —

Allgem. Begriffe u. Fundamentalsätze d. Integral-Rechn. Integration durch Substitution. Integrat. durch Zerlegung. Partielle Integrat. — Quadratur d. Kurven. Kubatur d. Rotationskörper. Rektifikat. d. ebenen Kurven. Komplanation d. Rotationsflächen. Rektifikat. d. Raumkurven. — Integration d. gebrochen. rational. Funktionen. Integrat. d. irrat. Funkt. Theorie d. bestimmten Integrale. Kubatur d. körper u. Komplanat. d. krummen Oberflächen. Mehrfache Integrale. Berechn. d. Masse, d. stat. Momente, d. Trägheits-Momente u. d. Schwerpunkts-Koordinaten. Theorie d. Euler'schen Integrale. Integrat. d. Differentiale d. Funktionen v. mehrer. Veränderlichen. Kurven-Integrale. — Theorie d. gewöhnl. Differential-Gleichungen erst. Ordn. u. erst. Grades. Differential-Gleichungen erst. Ordn. u. höher. Grades. Gewöhnl. Diff. Gleich. höher. Ordnung. Lineare Diff. Gleich. m^{ter} Ordnung. Lineare Diff. Gleich. zweiter Ordn. Simultane Diff. Gleich. Integration durch Reihen. Näherungsmethoden zur Integrat. gewöhnl. Diff. Gleich. Tafeln.

Tabelle der wichtigsten Formeln aus der Differential-Rechnung. Sonderabdruck zu *Kiepers Grundriss der Differential-Rechnung.* 12:te vollst. umg. u. verm. Aufl. des gleichnamigen Leitfadens von MAX STEGEMANN. — 49 pp. 8. 1912.

Tabelle der wichtigsten Formeln aus der Integral-Rechnung. Sonderabdruck zu *Kieperts Grundriss der Integral-Rechnung.* 11:e verb. u. verm. Aufl. des gleichnamigen Leitfadens von MAX STEGEMANN. — 67 pp. 8. 1918.

Tabelle der wichtigsten Formeln aus der Integral-Rechnung. Sonderabdr. zu *Kieperts Grundriss der Integral-Rechnung.* 11. verb. u. verm. Aufl. d. gleichnamigen Leitfadens von MAX STEGEMANN. — 69 pp. 8. 1918.

Ulrico Hoepli.

Milano.

BERZOLARI, LUIGI, Geometria analitica. 1: Il metodo delle coordinate. Con 54 incis. (Manuali Hoepli 388—389.) — XV+409 pp. 8. 1911. Lire 3: —

Preliminari. Coordinate nelle forme fondamentali di prima specie. Projezioni ortogon. sopra una retta. Applicaz. alla trigonometria piana e sferica. Coordinate nel piano punteggiato. Equaz. di una retta. Equaz. di curve piane. Coordinate n. piano rigato. Coordinate nello spazio punteggiato. Equaz. di un piano. Equaz. di una retta. Equaz. di superficie e di curve. Coordinate n. spazio di piani. Birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie. Gruppi armonici. Coordinate projett. e projettività n. forme di prima specie. Coordinate projett. omogenee nelle forme di seconda specie. Projettività tra forme di sec. specie. Coordinate projett. omogenee n. forme di terza specie. Projettività tra due spazi.

PINCHERLE, SALVATORE, Algebra complementare. Prima parte: Analisi algebrica. Ed. 3. (Manuali Hoepli 141.) — 174 pp. 8. 1917. Lire 1: 50.

I segmenti. I vettori. I numeri interi, reali, complessi. Limiti. Le radici. Calcolo combinat. Applicaz. del calcolo combinat. Le serie. I prodotti infiniti. Le frazioni continue. Le serie di potenze. Funzione esponenziale. Funz. circolari. Teoria dei logaritmi.

Grill'sche K. u. K. Hofbuchhandlung Julius Benkö.

Budapest.

SCHNEIDER, ROBERT, Die Beweisführung für die Richtigkeit des Fermatschen Satzes. Eine mathematische Studie in 3 Teilen mit üb. 100 Tabellen. Bd. 1, 2. — 1: 90 pp. 8. 1918. M. 10: —; 2: 57 pp. Fol. 1918. M. 10: —

1. Das Verhältnis der auf d. 2. Potenz befindl. ganzen Zahlen zum rechtwinkl. Dreiecke. Die Klassifizierung d. potenziert. ganz. Zahlen u. d. ziffermäss. Nachweis d. Fermat'schen Satzes aus d. Schlussendung d. potenz. ganz. Zahlen. Der ziffermäss. Nachweis d. Ferm. Satzes aus d. sechsziff. Endung sowohl als aus d. der vierziff. Endung u. dem zweiziff. Anfang derjenigen potenz. Zahlen, deren Exponent eine Primzahl ist.

2. Fortsetz. der Entwickelungs- u. Ausarbeitungstabellen mit Zahlen der 7., 11., 13., 17. u. 19. Potenz auf 57 losen Blättern, in einer Mappe.

Carl Kroll.

Berlin S 14.

Otto, Friedr. Aug., Herausforderung an alle Mathematiker der Welt oder die Lösung der Fermatschen Probleme. — 96 pp. 8. 1918. M. 5: — geh.

Herausforderung an alle Mathematiker d. Welt. Die Teilbarkeit d. Zahlen. Die binom. Lehrsätze. Der erweit. Fermatsche Satz. Die Quadratzahlen. Das rechtwinkl. Zahlendreieck. Die Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$. Die Eigensch. d. Gleich. $x^l + y^l = z^l$. Die Unmöglichkeit d. Gleich. $x^m + y^m = z^m$, für d. Fall, dass keine d. Grundzahlen x, y u. z durch die ungerade Primzahl m teilbar ist. Die bisher. Einzelbeweise d. gross. Ferm. Satzes. — Die Wolfskehlstiftung. Die unbest. Gleich. Die Gleich. $ax^2 + 1 = y^2$. Der allg. Beweis d. gross. Ferm. Satzes. Verschied. Sätze, Beweise usw. Die Polygonalzahlen.

A. H. Kruyt.

Amsterdam.

Kortmulder, R. J., De logische grondslagen der Wiskunde. Proefschrift ter verkrijgning van den graad van doctor ... universiteit te Leiden ... III + 135 pp. 8. 1916. F. 2: —.

Jos. Kösel'sche Buchhandlung.

Kempten u. München.

Deckert, Adalbert, Einführung in die Vektor-Rechnung. (Sammlung Kösel.) — IV + 84 pp. 8. 1916. M. 1: 95 geh.

Begriff d. Vektors. Projektionen v. Vektoren. Vereinig. u. Zerlegung v. Vektoren. Vektoren in einem rechtwinkl. Achsensystem. Einf., skalare u. vektorielle Produkte. Besond. Fälle. Projektionen v. Vektorprodukten. Das eb. Vieleck. Rauminhalt d. Pyramide. A[BC]. Vektorprod. [A[BC]]. [AB] [CD]. [[AB] [CD]]. Anwend. d. Infinitesimalrechn. Der Operator ∇. Einwirk. v. ∇ auf ein. Vektor. Besond. Fälle. Ueb. die Divergenz. Der Satz von Gauss. Definit. d. Grösse div. Besond. Fälle. Der Operator ∇^2. Der Operator curl. Besond. Fälle. Umform. einig. schwieriger Ausdrücke. Definit. v. curl. Der Satz v. Stokes. Anwend. V eine Funkt. v. t, x, y, z. Bes. Fall. Der Satz v. Green. Zusammenstell. v. Ergebnissen.

Matematisk Forening.

Köbenhavn.

Andersen, A. F., Bohr, Harald, & Mollerup, Johs., Nyere Undersogelser over Integralregningen. Tre foredrag holdt i Matematisk Forening Kobenhavn. — 63 pp. 8. 1917.

BOHR, H.: En Punktmængdes Maal. ANDERSEN, A. F.: Det Riemann'ske Integralbegreb. MOLLERUP, JOHS. Det Lebesgue'ske Integralbegreb.

Ing. G. Moràvek.

(Selbstverlag des Verfassers), Prag, II—360.

MORÀVEK, G., Allg. einf. Beweise der Gültigkeit des letzten Fermat'schen Satzes über die unbst. Gleichung: $z^n = x^n + y^n$. 4 pp. 8. Juli 1918.

John Murray.

Albemarle Street. London.

Report of the British Association for the advancement of science. 1917. — 264 pp. 8. 1918.

Reuther & Reichard.

Berlin W. 35.

KUNTZE, FRIEDRICH, Denkmittel der Mathematik im Dienst der exakten Darstellung erkenntniskritischer Probleme. (Philosoph. Vorträge, veröffentl. von d. Kantgesellschaft, hrsg. E. Cassirer, M. Frischeisen-Köhler & A. Liebert. N:r 3.) 31 pp. 8. 1912. M. 1: —.

HENRY, VICTOR, Das erkenntnistheoretische Raumproblem in seinem gegenwärtigen Stande. Mit 7. Fig. (»Kantstudien». Ergänzungshefte im Auftrag d. Kantgesellschaft, hrsg. H. Vaihinger, B. Bauch & A. Liebert. N:r 34.) — 98 pp. 8. 1915. M. 3: 20.

Vorbemerk. Literaturverzeichn. Problemstellung. Einzelaxiomatische Untersuchung d. erkenntnistheoret. Raumproblems. Der erkenntnistheoret. Charakter d. einz. in d. geometr. Axiomen dem Raum zuerkannten Grundeigenschaften.

G. E. Stechert & C:o.

New York.

DE LA VALLÉE POUSSIN, CH.-J., Cours d'Analyse Infinitésimale. T. 1. 3:e éd., considérablement remaniée. (Photogr. reprint.) — 452 pp. 8. 1914. 4: 50 Dol.

Introduction. Dérivation d. fonctions explicites d'une variable. Formule de Taylor. Applicat. diverses. Fonctions explicites de plusieurs variables. Fonct. implicites. Changement de variables. Intégrales indéfinies. Méthodes classiques d'intégrat. Théorie élement. d. intégrales définies. Intégrale de Riemann. Intégrale de Lebesgue. Formules fondament. de la théorie d. courbes planes. Formules fondament. de la théorie d. surfaces et d. courbes gauches. Calcul d. aires, d. arcs et d. volumes. Évaluation approchée d. intégrales définies. Des séries.

B. G. Teubner.

Leipzig & Berlin.

Ahrens, W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele. 2. verm. u. verb. Aufl. Bd. 2. Mit 128 Fig. — X + 455 pp. 8. 1918. M. 14:— geh., M. 15:— geb.

Magische Quadrate. Eulersche Quadrate. Anordnungsprobleme: Verschiedene Anordnungen. Kirkmans Schulmädchen-Problem. Das Josephsspiel. Brücken u. Labyrinthe. Das Hamiltonsche Dodekaederspiel. Das Farben-Karten-Problem. Das Boss Puzzle oder Fünfzehner-Spiel. Das Dominospiel. Zeit u. Kalender. Geometr. Konstruktionen durch Falten v. Papier. Seltsame Verwandtschaften. Nachträge u. Berichtig. zu Bd 1, 2. G. Pólya: »Ueber die »doppelt-periodischen» Lösungen des n-Damen-Problems.» Literarischer Index. Reg.

Berichte und *Mitteilungen*, veranlasst durch die Internationale Mathemat. Unterrichtskommission, hrsg. von W. Lietzmann. 2:e Folge. III. — VIII + 99 pp. 8. 1917. M. 4:— geh.

Titel u. Inhaltsübersicht zur erst. u. zweit. Folge d. Ber. u. Mitteilungen. — E. & K. Körner: Gesamtregister d. Schriften d. deut. Unterausschusses d. Internat. Math. Unterrichtskommission. Vorbemerk. Inhaltsverzeichnis d. Gesamtregisters. Inhalt d. einzelnen Hefte, zum Teil in Tabellen. Alphabet. Sachregister. — W. Lietzmann: Zusammenstellung d. bis Ostern 1917 auf Veranlass. d. IMUK im Auslande veröffentlichten Arbeiten. — F. Klein & W. Lietzmann: Zum Abschluss d. Berichte u. Mitteilungen.

Bieberbach, Ludwig, Differential- und Integralrechnung. Bd 1: Differentialrechnung. — VI + 130 pp. 8. 1917. M. 2:80 kart. — Bd 2: Integralrechnung. — VI + 144 pp. 8. 1918. M. 3:40 geh. (Teubners Leitfäden f. d. Math. u. Techn. Hochschulunterricht.)

Bd 1. Der Funktionsbegriff. Der Zahlbegriff. Unendliche Reihen. Stetige Funktionen. Differentialrechn. Einige einfache geom. Anwend. Die Taylorsche Formel. Unbestimmte Formen. Beispiel einer stetig. nirgends differenzierbaren Funkt. Funkt. von zwei Variabeln.

Bd 2. Die Aufgaben. d. Integralrechn. Theorie d. unbestimmten Integrale. Bestimmte Integrale. Üb. die numer. Auswertung von bestimmt. Integralen. Bogenlänge u. Krümmung. Darstellung von Funkt. durch Reihen u. bestimmte Integrale. Doppelintegrale. Die Verwend. d. komplexen Zahlen. Reg. Berichtig.

Borel, Émile, Die Elemente der Mathematik. Vom Verfasser genehmigte deutsche Ausgabe, besorgt von Paul Stäckel. Bd 1: Arithmetik u. Algebra, nebst d. Elementen d. Differentialrechnung. 2. Aufl. Mit 56 Fig. u. 3 Taf. — XVI + 404 pp. 8. 1919. M. 11:— geh., M. 12:— geb.

Arithmetik: Dezimale Zählung. Addition u. Subtraktion. Multiplik. d. ganz Zahlen. Division. Teilbarkeit. Grösster gem. Teiler u. kleinst. gem. Vielfaches. Primzahlen. Gewöhnl. Brüche. Dezimalbrüche; angenäh. Quotienten. Quadrat; Quadratwurzel. —

Algebra: Anwend. d. Buchstaben. Posit. u. negat. Zahlen. Anwend. d. posit. u. negat. Zahlen; gleichförm. Beweg. Anfangsgründe d. alg. Rechn. Gleichungen u. Ungleichheiten erst. Grades. Aufgaben erst. Grades. Untersuch. d. Binoms erst. Grades; graph. Darstell. Gleich zweit. Grades. Aufgaben zweit. Grades. Untersuch. u. graph. Darstell. d. Verlaufs d. gebroch. lin. Funktion. Grundbegriffe d. Diff.-rechn. Reihen u. Logarithmen; Zinseszinsen. — Lösung d. Aufgaben: Arithm. Alg.

Brill, Alexander, Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. 3:e Aufl. (Abhandl. u. Vorträge aus d. Gebiete d. Mat., Nat.-wiss u. Technik. 3.) — IV + 48 pp. 8. 1918. M. 2: —.

Vorw. Die Forderung. Geometrie d. Bewegung. Dynamik d. mater. Punktes. Einsteins Theorie d. Gravitation.

Cohn, Emil, Physikalisches über Raum und Zeit. 3:e Aufl. (Vorträge u. Abhandl. aus d. Gebiete d. Math., Nat.-wiss. u. Technik. 2.) — 31 pp. 8. 1918 M. 1:20 geh.

Czuber, Emanuel, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Bd. 1. 4:e sorgfält. durchges. Aufl. — XII + 569 pp. 8. 1918. M. 16: — geh., M. 18: — geb.

Entwicklung d. Zahlbegriffs. Variable. Funktionen. — Der Differentialquotient u. das Differential. Allgem. Sätze üb. Differentiation. Differentialquotienten d. element. Funkt. Allgem. Sätze üb. d. Zusammanhang einer Funkt. m. ihrem Differentialquot. Die höh. Differentialquotitenten u. Differentiale. Transformat. d. unabhäng. Variablen. — Part. Differentialquotienten u. Differentiale. Das totale Differential. Differentiat. zusammangesetzter u. impliz. Funktionen. Transformat. d. Variablen. — Reihen m. konstanten Gliedern. Reihen m. var. Gliedern. Die Formeln u. Reihen v. Taylor u. Maclaurin. Die elem. Funktionen einer komplex. Variablen. Die unbest. Formen. — Max. u. Minima d. Funkt. einer Var. Max. u. Minima d. Funkt. mehr. unabhäng. Variablen. Max. u. Minima v. Funkt. mehr. abhäng. Var. — Anwend. d. Differentialrechn. auf d. Untersuchung v. Kurven u. Flächen: Die Tangente u. die Normale. Asymptoten. Gestalt einer Kurve in d. Umgeb. eines Punktes. Verhalten zweier Kurven in d. Umgeb. es. gemeinsam. Punktes. Länge es. Kurvenbogens. Bogendiff. Krümmung eb. Kurven. Die sing. Punkte eb. Kurven. Einhüllende Kurven. — Das begleit. Dreikant er. Raumkurve. Erste u. zweite Krümmung. Tangenten u. Tangentialebenen, Normalen u. Normalebenen er. krumm. Fläche. Einhüll. Flächen. Die Polarfläche er. Raumkurve. Krümmung v. Kurven auf krumm. Flächen. Spez. Kurven auf krumm. Flächen.

Fricke, Robert, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen. Bd. 1: Differentialrechnung. Mit 129 Fig., 253 Aufgaben u. einer Formeltabelle. — XII + 400 pp. 8. 1918. M. 14: — geh., M. 15: — geb. — Bd 2: Integralrechnung. Mit 100 Fig., 242 Aufgaben u. einer Formeltabelle. — V + 413 pp. 8. 1918. M. 14: — geh., M. 15: — geb.

1. Zahlen, Variable und Funktionen. Die Differentiation d. Funktionen einer Variablen. Wiederholte Differentiat. d. Funkt. einer Variablen. Die Differentiat. d. Funkt. mehrerer Variablen. — Methoden d. Berech. d. Funktionen: Näherungsdarstel-

lungen mittelst ganzer Funktionen. Konvergenz d. unendl. Reihen. Berechn. d. Extremwerte d. Funkt. — Anwend. d. Differentialrechn.: Untersuchung d. ebenen Kurven. Untersuchung d. Flächen u. Kurven im Raume. Untersuchung d. Bewegungen.

2. Das unbestimmte Integral. Das best. Integral. Integrationen bei mehreren Variablen. — Anwend. d. Integralrechn.: Geometr. Anwendungen d. Integralrechn. Physikal. Anwend. d. Integralrechn. Fouriersche Reihen u. harmonische Analyse. — Lösung v. Differentialgleichungen: Gewöhnl. Differentialgleichungen erst. Ordn. Gewöhnl. Differentialgleichungen höh. Ordn. Partielle Differentialgl. Komplexe Zahlen u. Funktionen.

Koenigsberger, Leo, Weierstrass' erste Vorlesung über die Theorie der elliptischen Funktionen. Sonderabdr. aus d. XXV. Bde Heft 10—12 d. Jahresberichts d. Deut. Mathematiker-Verein. — 32 pp. 8. 1917. M. 2:40 geh.

Lietzmann, W., Was ist Geld? (Math.-Phys. Bibl., hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. 30.) — 55 p. 8. 1918. M. 1:—.

Das Geld im Einzelbesitz: Münzgeld. Papiergeld. Einnahme u. Ausgabe. Vermögen. — Das Geld u. der Staat: Bargeldverkehr. Bargeldloser Verkehr. Der Staat. — Das Geld in d. Welt: Das Währungsmetall. Arbeit u. Boden. — Lit.

Lietzmann, W., & Trier, V., Wo steckt der Fehler? Trugschlüsse und Schülerfehler. 2:e verm. u. verb. Aufl. Mit 29 Fig. (Math.-Physik. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. 10.) — IV + 53 pp. 8. 1917. M. 1:— geh.

Luckey, P., Einführung in die Nomographie. T. 1.: Die Funktionsleiter. Mit 24 Fig. (Math.-Physik. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. 28.) — IV + 43 pp. 8. 1918. M. 1:— geh.

Die Kunst, Rechnungen zu vermeiden. Die Doppelleiter als Darstell. einer Funkt. einer Veränderl. Einf. Leitern. Die logarithm. Leiter. Der Grundgedanke d. Rechenschieber.

Maennchen, Philipp, Geheimnisse der Rechenkünstler. 2:e Aufl. (Math.-Physik. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. 13.) — 50 pp. 8. 1918. M. 1:— geh.

Müller, Emil, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Technische Hochschulen. Bd 1. 2:e Aufl. — XIV + 370 pp. 8. 1918. M. 16 geh. —; M. 18:— geb.

Einleit. Unendlich ferne (od. uneigentliche) Elemente. Bezeichn.-weise u. Abkürzungen. — Abbild. durch zugeordn. Normalrisse: Benennungen u. Sätze üb. zugeordn. Normalrisse. Seitenrisse. Drehungen. Das Weglassen d. Rissachsen. Die Grundaufgaben üb. Lagenbeziehungen. Schattenbestimm. f. ebenfläch. Körper in zugeordn. Normalrissen. Affinität. Massaufgben. — Kurven u. Flächen. Lösung sie betreff. Aufg. in zugeordn. Normalrissen: Allgem. üb. Kurven. Allgem. üb. krumme Flächen. Kurven zweit. Ordn. Kegel- u. Zylinderflächen, allgem. abwickelbare Flächen. Kugelfläche. Drehflächen. Schraubflächen. Windschiefe. u. graph. Flächen. Sachverzeichn. Namenverzeichn.

Neuendorff, R., Praktische Mathematik. T. 2.: Geometrisches Zeichnen. Projektionslehre. Flächenmessung. Körpermessung. (Aus Natur u. Geisteswelt, Bd 526.) — 104 pp. 8. 1918. M. 1:50 geb.

Salmon, George, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Nach d. freien Bearb. von Wilhelm Fiedler neu hrsg. von Friedrich Dingeldey. 7:e Aufl. T. 2. — X + 445 pp. 8. 1918. M. 13:— geh.; M. 14:— geb.

Lineare Systeme von Kegelschnitten. Projekt. Eigenschaften d. Kegelschnitte. Besond. homogene Gleichungsformen zweit. Grades. Die allgem. homog. Gleichung zweit. Grades. Invarianthentheorie d. binären Formen. Invarianteutheorie d. Kegelschnitte. Analyt. Grundlagen d. Metrik. Von d. reziproken Verwandtschaften. Von d. Methode d. Projektion. Literaturnachweis. Nachträge u. Bericht.

Schudeiský, A., Projektionslehre. Die rechtwinklige Parallelprojektion u. ihre Anwend. auf d. Darstellung technischer Gebilde nebst einem Anhang üb. d. schiefwinkl. Parallelprojektion in kurzer, leicht fasslicher Behandlung für Selbstunterricht u. Schulgebrauch. (Aus Natur u. Geisteswelt Bd. 564.) — 83 pp. 8. 1918. M. 1:50 geb.

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Ursprüngl. Übersetzung des Lehrbuches von J. A. Serret, seit der dritten Aufl. gänzlich neu bearbeitet von G. Scheffers. 6. u. 7. Aufl. Bd. 1: Differentialrechnung. Mit 70 Fig. XVII + 670 pp. 8. 1915. geh. M. 13:—; geb. M. 14:—.

Einleit. Begriffe: Von d. Zahlen. Von d. Funktionen. Der Begriff d. Grenze. Die Begriffe $+\infty$ und $-\infty$. Stetigkeit. Das Rechnen m. Grenzwerten. — *Differentialquotient einer Funkt. v. einer Veränderl.:* Die abgeleit. Funkt. Differentiation entwickelter algebr. Funktionen. Anwend. Differentiat. v. zusammengesetzt. Funktionen. Differentiat. d. Logarithmus u. d. Exponentialfunkt. Differentiat. d. Kreisfunkt. Differentiat. d. unentwickelten Funkt. — *Höhere Differentialquotienten, partielle Diff.-quot. u. vollständige Differentiale.* — *Differentiat. unentwickelter Funktionen:* Unabhängigkeit v. Funkt. u. Gleichungen. Ableitungen u. Differentiale unentwickelt. Funkt. Die Elimination willkürlicher Konstanten. Die Eliminat. willkürl. Funkt. Einführung v. neuen Veränderl. — *Entwicklung d. Funkt. in Potenzreihen:* Über unendl. Reihen überhaupt. Der Taylorsche Satz für Funkt. v. einer Värenderl. Reihenentwicklungen spez. Funktionen. Reihenentwickl. nach posit. u. negat. Potenzen. Bestimm. v. Grenzwerten. Der Taylorsche Satz f. Funkt. v. mehrer. Värenderl. — *Theorie d. Maxima u. Minima:* Funktionen v. einer Veränderl. Anwend. Funkt. v. mehrer. Veränderl. Anwend. — *Theorie d. ebenen Kurven:* Kurve, Tangenten u. Normalen. Homogene Koordinaten. Singuläre Punkte. Differentialquotient d. Fläche u. d. Bogenlänge. Krümmung d. eben. Kurven. Polarkoordinaten. Einhüllende Kurven. Oskulierende Kurven. — *Anwendungen d. Theorie d. eben. Kurven:* Die Fläche u. das Bogenelement d. Kegelschnitte. Krümmung d. Kegelschnitte. Die gemeine Zykloide. Epi- u. Hypozykloide. Einige and. bemerk.-werte Kurven. — *Theorie d. Raumkurven u. Flächen:* Tangenten. u. Normalen. Bogenelement einer Raumkurve. Torsion er. Raumkurve. Einhüllende Flächen. Polarfläche, Evoluten u. Evol-

venten. Berührung höher. Ordn. zwischen Kurven u. Flächen. — *Flächenkurven u. Flächenfamilien:* Die Krümmungsradien es. Flächenpunktes. Die Dupinschen Indikatrizen. Hauptkrümmungsradien u. Krümmungsmass er. Fläche. Dreifache orthogon. Flächensysteme. Höhen- u. Fallkurven. Flächenfamilien. — *Element. Funktionen einer komplexen Veränderlichen:* Allgem. üb. komplexe Zahlen. Unendl. Reihen. m. kompl. Gliedern. Analyt. Funkt. Einige besond. Funkt. — *Theorie d. Partialbruchzerlegung:* Existenz d. Partialbruchzerleg. Ausführung d. Partialbruchzerleg. Reelle Partialbruchzerlegung. — Geschichtliche Anm. Sachreg. Berichtigungen.

Stolz, Otto, & Gmeiner, J. A., Theoretische Arithmetik. 1. Abt.: Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen. 2:e Aufl. umgearb. von J. Anton Gmeiner. (Dritte Aufl. der Abschnitte I—IV des 1. Teiles d. Vorles. üb. Allgem. Arithmetik von O. Stolz.) (B. G. Teubners Samml. von Lehrbüchern ... d. math. Wiss., Bd. IV, 1.) — VI + 148 pp. 8. 1911. geb. M. 5:20.

Einleit. Begriff d. Grösse u. Zahl. Die natürl. Zahlen. Analyt. Theorie d. rational. Zahlen: Theorie d. Rechengesetze. Die ration. Zahlen. — Synthetische Theorie d. rational. Zahlen. Die systemat. Brüche. Übungen. Sachenreg.

Timerding, H. E., Der goldene Schnitt. Mit 16 Fig. (Math.-Physik. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. 32.) — 57 pp. 8.1919. M. 1:— geh.

Wieleitner, H.: Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. 2:e durchges. Aufl. 5. bis 8. Tausend. Mit 10 Fig. (Math.-Physikal. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. 2.) — 58 pp. 8. 1918. M. 1:— geh.

Die natürl. Zahlen u. die Null. Die negat. Zahlen. Die Brüche. Die Irrationalzahlen. Die imag. Zahlen. Weiterführ. Literatur. Index.

Vandenhoeck & Ruprecht.

Göttingen.

Grelling, Kurt, Die philosophische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — 36 pp. 8. 1910. M. 1:70. (Sonderabdr. a. d. Abhandl. d. Fries'schen Schule, N. F., Bd 3., H. 3.)

Das Problem. Der Gegenstand d. Wahrscheinlichkeitsurteile. Philos. u. mathemat. Wahrscheinlichkeit. Das Mass d. Wahrscheinlichk. Die Grundsätze d. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Kowalewsky, Michael, Über die Antinomienlehre als Begründung des transzendentalen Idealismus. — 72 pp. 8. 1918. M. 2:40. (Sonderabdr. a. d. Abhandl. d. Fries'schen Schule, N. F., Bd 4., H. 4.)

Einleit. Allgemeines üb. d. transzendentalen Idealismus u. d. Antinomienlehre als seine Begründung. Kritik d. Kantischen Antinomien. Kritik d. späteren Beweise d. transzendent. Idealismus. Zwei Beweise d. Idealität d. Zeit. Schluss. Üb. einige Versuche, die Antinomien v. Standpunkte d. transzendent. Realismus aufzulösen.

Friedrich Vieweg & Sohn.

Braunschweig.

Einstein, A, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, gemeinverständlich. (Sammlung Vieweg, Tagesfragen aus d. Gebieten d. Naturviss. u. d. Technik. H. 38.) — IV + 70 pp. 8. 1917. M. 2: 80 geh.

Holborn, L., & Scheel, Karl, Vier- und fünfstellige Logarithmentafeln nebst einigen physikalischen Konstanten. 2:e Aufl. — 24 pp. 8. 1914. M. 0: 80 geh.

Timerding, H. E., Die Analyse des Zufalls. Mit 10 Abb. (Die Wissenschaft, Sammlung v. Einzeldarstellungen aus d. Gebieten d. Naturwiss. u. d. Technik, Bd 56.) — VIII + 168 pp. 8. 1915. M. 5: — geh.; M. 5: 80 geb.

Der Begriff d. Zufalls. Die statistische Methode. Stationäre Zahlenreihen. Das »Gesetz d. grossen Zahlen». Die Theorie d. Glücksspiele. Die math. Analyse stationärer Reihen. Das Urnenschema. Näherungsformeln. Die statist. Theorie d. Zufalls. Die genetische Theorie d. Zufalls.

Librairie Vuibert.

Paris.

Baire, René. Théorie des nombres rationnels, des limites et de la continuité. 2:e édition. — 59 pp. 8.

Introd. — Définition d. nombres irrationnels. Bornes sup. et infér. d'un ensemble. Limite d'une suite de nombres. Valeurs approchées d'un nombre. Différence de deux nombres. Théorèmes sur l. limites. Notions de fonction et de continuité. Fonctions d'arguments rationnels. Principe d'extension. Extension du calcul algébr. Théorèmes sur l. fonctions contin. Fonctions inverses. Définit. d. fonctions $\sqrt[m]{x}$, a^x, x^y, $\log x$.

Delens, P., Problèmes d'arithmétique amusante. — VIII + 164 pp. 8. 1914. Fr. 2: —

Avant-propos. Caractères de divisibilité. — 1. Trouver un ou plusieurs chiffres effacés d'un nombre inconnu lorsqu'on connait l. chiffres restants. — 2. Trouver le résultat d'une suite d'opérations effectuées sur d. nombres inconnus quelconques, sans demander aucun renseignement. — 3. Deviner un ou plusieurs nombres pensés. — Recréations avec d. dés, avec d. dominos, avec un jeu de cartes. — Note s. l. extractions de racines.

Rebière, A., La vie et les travaux des savants modernes d'après les documents académiques. 3:e édition, ornée de portr., rev. et augm. par E. Goursat. VIII + 472 pp. 8.

L'Académie d. Sciences: La science antique. Les grands précurseurs. L'ancienne Acad. d. sci. L'Institut et l'Acad. d. sci. depuis 1795. Les prix et l. lauréats. Les documents académiques. Les secrét. perp. — Les mathématiciens et l. astronomes:

Cassini. Huyghens. Newton. Leibniz. Les trois Bernoulli. Euler. Clairaut. D'Alembert. Lagrange. Herschel. Monge. Laplace. Delambre. Legendre. Carnot. Fourier. Gauss. Poncelet. Cauchy. Chasles. Le Verrier. Bertrand. Hermite. Poincaré. — Les physiciens et les chimistes. — Les naturalistes.

VOGT, H., Solutions des exercices proposés dans les Eléments de Mathématiques Supérieures. — 276 pp. 8. 1913.

Compléments d'algèbre. Géométrie analyt. Dérivées et différentielles. Théorie d. équations. Applications géométriques. Calcul intégral. Equations différentielles.

Nicola Zanichelli.

Bologna.

ENRIQUES, FEDERIGO, Conferenze sulla geometria non-euclidea, per cura del Dott. OLEGARIO FERNANDEZ. 46 pp. 8. 1918. L. 3: —

Il primo libro d. elementi e le promesse d. geometria d'Euclide. I principi d. geometria gen. indipendente dal postulato d'Euclide. La metrica-proiettiva e la indimostrabilità d. postulato d'Euclide.

SUR L'INTÉGRALE DE LEBESGUE.

PAR

FRÉDÉRIC RIESZ

à KOLOZSVÁR.

(Extrait d'une lettre à M. G. MITTAG-LEFFLER.)

L'été dernier, quand nous parlions des idées de M. LEBESGUE, vous m'avez aimablement invité à vous donner, pour les Acta mathematica, quelques détails au sujet d'une note que j'ai publiée antérieurement (Comptes rendus, le 4 mars 1912) et dans laquelle j'ai indiqué comment je m'imagine l'introduction de l'intégrale indépendamment de la théorie de la mesure. Les voilà; mais avant tout, permettez-moi de vous rappeler que ce n'est pas moi le premier qui ai tâché de refondre l'œuvre admirable de M. LEBESGUE, que c'était plutôt la lecture d'une note de M. BOREL sur ce sujet (Comptes rendus, le 12 février 1912) qui m'a donné l'occasion d'exposer mes idées sur la même question. Depuis-là, peu après, M. BOREL a développé sa méthode dans un mémoire détaillé qu'il faisait paraître dans le Journal des mathématiques (6e série, t. 8, p. 159). En étudiant ce mémoire, je vois de nouveau que le point de vue que j'adopte diffère beaucoup de celui de M. BOREL; moi, je tiens à définir l'intégrale aussitôt que possible, pendant que M. BOREL commence par introduire la mesure, seulement que, au lieu de la définir suivant M. LEBESGUE, il se sert de la définition qui est son propre et qui conduit aux ensembles moins généraux que l'on appelle, avec M. LEBESGUE, les ensembles mesurables B. Sans doute, cette définition a ses avantages quand il s'agit de certaines questions délicates, comme par exemple dans l'étude approfondie des ensembles de mesure nulle; mais on ne doit pas oublier que le grand mérite de la théorie de M. LEBESGUE consiste en ce qu'elle est compréhensive sans être sensible, c'est à dire qu'elle permet d'ajourner les questions délicates sans les abandonner. À cet égard, je dois préférer une autre idée de M. BOREL (Comptes rendus, le 14 et le 28 février 1910) dont j'ai pris connaissance seulement après la publication de ma note; elle consiste à

définir l'intégrale en négligeant d'abord un nombre fini ou une infinité d'intervalles dont la somme est arbitrairement petite et puis faire tendre cette somme vers zéro. Il faut regretter que M. Borel ne continuait pas de développer cette idée féconde, sur laquelle on pourrait baser effectivement une théorie élémentaire telle que je l'ai en vue; d'ailleurs, l'idée fut reprise récemment avec succès par M. Hahn (Monatsberichte f. Math. u. Phys., 1915, p. 3). Une autre définition où la mesure n'intervient pas, est due à M. Perron (Sitzungsberichte, Heidelberg 1914, 14. Abh.); il s'y agit d'une généralisation très subtile, mais un peu artificielle, de l'idée classique d'envisager l'intégration comme l'inverse de la différentiation. Enfin, je me rappelle d'avoir parcouru incidemment, pendant mon dernier séjour à Stockholm, une note de M. Young sur le même sujet qui est imprimée dans les Comptes rendus de 1915 ou de 1916; malheureusement, à cause de la guerre, ces Comptes rendus ne se trouvent pas actuellement à notre bibliothèque.

Dans ce qui suit, je ne parlerai que des fonctions d'une seule variable; mais j'ajoute que, pour l'intégration des fonctions à plusieurs variables, on n'aura presque rien à changer.

1.

En commençant d'exposer ma méthode, il me faut tout de suite avouer que je n'ai pas l'intention d'écarter complètement la mesure. Au contraire, le point le plus essentiel de ma méthode consiste à faire intervenir dès le commencement une classe particulière d'ensembles mesurables, savoir les ensembles de *mesure nulle*. On y entend, d'après M. Lebesgue, les ensembles qu'on peut enfermer dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles de manière que la somme des longueurs soit arbitrairement petite. Il découle immédiatement de cette définition que *tout ensemble compris dans un ensemble de mesure nulle est lui-même de mesure nulle* et que *la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de tels ensembles, c'est à dire l'ensemble que l'on obtient en les réunissant, l'est aussi*. En particulier, *chaque ensemble fini ou dénombrable de points est de mesure nulle.*

C'est tout ce qu'il nous faudra savoir sur ces ensembles particuliers.

2.

Envisageons maintenant une infinité dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, \ldots,$ appartenant à l'intervalle ab et formé chacun d'un nombre fini d'intervalles que l'on peut supposer de ne pas empiéter les uns sur les autres. Désignons par

l_n la longueur totale de l'ensemble E_n — on pourrait aussi l'appeler mesure de E_n — c'est à dire la somme des longueurs des intervalles dont il se compose. De plus, considérons l'ensemble E^* des points communs à une infinité d'entre les ensembles E_n. Je dis que E^* *ne peut être de mesure nulle que si* $l_n \to 0$.

Pour le voir, considérons d'abord le cas particulier où chaque ensemble E_n contient tous les suivants. Dans ce cas, la suite des l_n étant décroissante, elle tendra vers une limite déterminée positive ou zéro, et pour voir que c'est précisément vers zéro qu'elle tend, il suffit de montrer que l'hypothèse que $l_n > \delta > 0$, pour tous les n, aboutit à une contradiction. Or, l'ensemble E^* étant de mesure nulle, il peut être enfermé dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles tels que leur somme soit inférieure à δ et on pourra aussi s'arranger que chaque point de E^* soit intérieur à un au moins de ces intervalles; en effet, on pourrait, s'il était nécessaire, dilater tous les intervalles sans que leur somme cesse d'être inférieure à δ. Ces intervalles ne recouvriront complètement aucun des ensembles E_n, puisque dans le cas contraire il existerait d'après un théorème bien connu de M. Borel, un nombre fini d'entre eux ayant la même propriété; mais c'est impossible, leur somme étant inférieure à δ et la longueur totale de E_n y étant supérieure. C'est à dire que, en excluant de E_n les points intérieurs aux intervalles où nous avons enfermé l'ensemble E^*, il reste encore un certain ensemble fermé $\bar{E}_n$. Or, les ensembles fermés E_n dont chacun contient les suivants, admettent au moins un point compris dans chacun d'eux; ce point étant compris dans tous les E_n, il l'est aussi dans E^*; mais, d'autre part, en définissant les ensembles E_n, nous avons supprimé tous les points de E^*. Voici la contradiction annoncée.

3.

Allons maintenant au cas général! Si les l_n ne tendaient pas vers zéro, il existerait une infinité d'ensembles E_n dont les longueurs totales l_n surpasseraient une certaine quantité $\delta > 0$. Alors en désignant par E_m^n l'ensemble qu'on obtient en réunissant les ensembles $E_m, E_{m+1}, \ldots, E_n$ $(m \leq n)$ et par l_m^n la longueur totale de cet ensemble, on aurait aussi, pour m quelconque et pour n suffisamment grand $l_m^n > \delta$. C'est à dire que, en désignant par λ_m la limite de la suite croissante l_m^n (m fixe, $n \to \infty$), on aurait $\lambda_m > \delta$ pour tous les m.

Soit ε une quantité positive inférieure à δ, d'ailleurs quelconque, et choisissons successivement les indices $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \ldots$ de sorte qu'on ait pour tous les m

$$l_m^{n_m} > \lambda_m - \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Désignons par $E^{(m)}$ la partie commune des ensembles $E_1^{n_1}, E_2^{n_2}, \ldots, E_m^{n_m}$ et par $l^{(m)}$ la longueur totale de $E^{(m)}$. Je dis qu'on a

$$l^{(m)} > \delta - \varepsilon$$

et cela pour tous les m. Cette inégalité suit immédiatement, à plus forte raison, de l'inégalité plus précise

$$l^{(m)} > \lambda_m - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)$$

que nous allons vérifier par récurrence. En effet, comme $l^{(1)} = l_1^{n_1}$, l'inégalité est vraie, par hypothèse, pour $m = 1$; supposons qu'elle le soit encore pour $m - 1$; il faut montrer qu'elle subsiste pour m. Or, l'ensemble $E^{(m)}$ est la partie commune de $E^{(m-1)}$ et de $E_m^{n_m}$ pour lesquels on a, par hypothèse,

$$l^{(m-1)} > \lambda_{m-1} - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right), \quad l_m^{n_m} > \lambda_m - \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

et qui sont tous les deux compris dans l'ensemble $E_{m-1}^{n_m}$ dont la longueur totale ne dépasse pas la limite λ_{m-1}. Par conséquent on a

$$l^{(m)} > l^{(m-1)} + l_m^{n_m} - \lambda_{m-1} > \lambda_{m-1} - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right) + \lambda_m - \frac{\varepsilon}{2^m} - \lambda_m = \lambda_m - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^m}\right),$$

ce qu'il fallait montrer.

L'inégalité que nous venons de démontrer, indique que les longueurs totales $l^{(m)}$ des ensembles $E^{(m)}$ dont chacun contient les suivants, restent supérieures à une quantité $\delta' = \delta - \varepsilon > 0$; d'autre part, l'ensemble des points communs à tous les $E^{(m)}$ étant compris dans E^*, sera de mesure nulle, mais ce sont précisément les hypothèses correspondant au cas particulier déjà traité et qui nous ont conduit à une contradiction.

4.

Le résultat que nous venons d'obtenir, suffit complètement pour introduire l'intégrale, et c'est seulement pour éviter double emploi que je fais déjà ici une remarque qui nous sera essentielle dans la suite; il s'y agit de ce que j'ai démontré, en réalité, un peu plus que le fait annoncé. En effet, après avoir déduit de l'hypothèse que l_n ne tend pas vers zéro, l'inégalité $\lambda_m > \delta$, j'ai fait voir comment cette inégalité aboutit à une contradiction, sans qu'il nous aurait

fallu retourner à l'hypothèse faite. C'est à dire que nous avons démontré, en réalité, que l'hypothèse que l'ensemble E^* soit de mesure nulle, entraîne la relation

$$\lambda_m \to 0 \qquad (m \to \infty),$$

ou bien, ce qui revient au même, la relation

$$l_m^n \to 0 \qquad (m \to \infty,\ n \to \infty);$$

cette relation comprend, pour $m = n$, la relation $l_n \to 0$. (D'ailleurs, on aurait pu aussi déduire la relation $l_m^n \to 0$ de cette dernière relation bien qu'elle ait une forme plus particulière; en effet, l'hypothèse faite sur la suite $\{E_n\}$ est également remplie pour toutes les suites $\{E_m^n\}$.)

Ces résultats s'étendent presque immédiatement à un tableau infini à double entrée $\{E_{ik}\}$; on aura seulement à préciser le sens qu'il faudra donner aux notations E^*, E_m^n, l_m^n et λ_m. Quant à l'ensemble E^*, convenons qu'il soit formé des points appartenant à une infinité d'entre les ensembles E_{ik}, en exigeant de plus que *tous les deux indices* croissent indéfiniment. C'est à dire que les points de E^* sont caractérisés par le fait que pour m quelconque et pour chaque point appartenant à E^*, il existe des ensembles E_{ik} avec $i \geqq m$, $k \geqq m$ qui le contiennent. Par E_m^n nous entendrons l'ensemble formé en réunissant tous les ensembles $E_{ik}(i = m, \ldots, n;\ k = m, \ldots, n)$; l_m^n est la longueur totale de E_m^n et λ_m désigne la limite de l_m^n quand n va à l'infini. Ces conventions faites, les raisonnements du numéro précédent s'appliquent entièrement au cas considéré et fournissent des résultats analogues à ceux que nous venons d'obtenir.

Je vais énoncer nos résultats sous la forme que j'en aurai besoin, la relation particulière $l_n \to 0$ pour le cas d'une suite et la relation plus générale $l_m^n \to 0$ pour le cas du tableau.

Lemme particulier: *Étant donnée une infinité dénombrable d'ensembles E_1, $E_2, \ldots$, compris dans le même intervalle et formé chacun d'un nombre fini d'intervalles, soient $l_1, l_2, \ldots$ leurs longueurs totales et soit E^* l'ensemble des points appartenant à une infinité d'entre eux. Si l'ensemble E^* est de mesure nulle, on a, n allant à l'infini:*

$$l_n \to 0.$$

Lemme général: *Étant donné un tableau à double entrée $\{E_{ik}\}$ d'ensembles du type considéré, soit E^* l'ensemble des points tels que, pour chaque point et pour chaque nombre m, il existe des ensembles E_{ik} avec $i \geqq m$, $k \geqq m$ qui le contiennent; de plus, soit E_m^n l'ensemble formé en réunissant les ensembles $E_{ik}(i, k = m, m+1, \ldots, n)$*

et soit l_m^n sa longueur totale. Si l'ensemble E^* est de mesure nulle, on a, m et n allant à l'infini:

$$l_m^n \rightarrow 0.$$

Bien entendu, ces deux lemmes sont compris dans des théorèmes connus appartenant à la théorie générale de la mesure; ainsi, par exemple, le premier est compris dans un théorème de M. Borel (Comptes rendus, le 17 décembre 1903), mais il peut aussi être regardé comme cas particulier du théorème fondamental de M. Lebesgue concernant l'intégration terme à terme des suites bornées. Pour nous, il s'agissait seulement d'établir ces lemmes indépendamment de la théorie générale. D'ailleurs, quant au premier lemme, il fut déjà établi avant Lebesgue par Arzelà pour le cas particulier où il n'y a aucun point appartenant à l'ensemble E^* (Memorie Ist. Bologna 1899, p. 131).

5.

Pour définir l'intégrale, je commence par les fonctions particulières appelées *fonctions simples* et définies comme il suit: on partage l'intervalle $ab\,(a<b)$ en un nombre fini de segments et on fait correspondre à chaque segment une quantité constante; quant aux points de division, on y peut attacher des valeurs quelconques; d'ailleurs, ces dernières n'importent pas au point de vue de l'intégration. Pour ces fonctions simples, on définira l'intégrale comme d'ordinaire en ajoutant les produits de chaque segment et de la valeur correspondante.

Soit maintenant $\{\varphi_n(x)\}$ une suite infinie de fonctions simples, bornées dans leur ensemble et tendant presque partout, c'est-à-dire sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle, vers une fonction limite $f(x)$. Je dis que les intégrales des $\varphi_n(x)$ tendent vers une valeur limite et que cette limite est toujours la même pour deux suites tendant vers la même fonction $f(x)$. Pour le voir, considérons d'abord le cas particulier où $f(x)=0$ sur tout l'intervalle. Désignons par E_n l'ensemble formé par les intervalles où $|\varphi_n(x)| \geq \varepsilon$, ε étant une quantité positive arbitrairement choisie, et soit l_n la longueur totale de cet ensemble. Les fonctions $\varphi_n(x)$ étant bornées dans leur ensemble, leur module reste inférieure à une constante G. Alors le module de l'intégrale de $\varphi_n(x)$ sera inférieure à

$$l_n G + \varepsilon(b-a),$$

et comme les hypothèses de notre lemme particulier sont remplies pour les ensembles E_n, la quantité l_n tend vers zéro. C'est-à-dire que, pour n suffisamment grand, l'intégrale de $\varphi_n(x)$ sera, en valeur absolue, inférieure à la quantité arbitrairement petite $\varepsilon(b-a)$. Donc l'intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Le cas général se ramène immédiatement au cas particulier que nous venons de considérer, et celà en remarquant que, dans le cas général, ce sont les suites $\{\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\}$ qui tendent presque partout vers zéro; m et n y peuvent aller à l'infini de toute sorte possible, indépendamment l'un de l'autre. On en conclut, en appliquant le résultat particulier établi, que la différence des intégrales de φ_m et de φ_n tend aussi vers zéro et il s'en suit, d'après le critère général de CAUCHY, que l'intégrale de φ_n tend vers une limite déterminée. Quand il s'agit de deux suites distinctes $\{\varphi_n\}$ et $\{\varphi'_n\}$ tendant presque partout vers la même fonction $f(x)$, on n'aura qu'à appliquer le même raisonnement à la suite $\{\varphi_n - \varphi'_n\}$; on en conclut que les intégrales des φ_n et des φ'_n tendent vers la même limite.

Après le résultat que nous venons d'établir, la définition de l'intégrale est immédiate. *Appelons fonction sommable toute fonction $f(x)$ du type considéré, c'est-à-dire qui est la limite — presque partout — d'une suite bornée de fonctions simples $\varphi_n(x)$. Comme valeur d'intégrale, nous y attachons la limite de l'intégrale des $\varphi_n(x)$; d'après ce que nous venons de voir, cette limite existe et elle est parfaitement déterminée par la fonction $f(x)$, indépendamment du choix particulier de la suite approchante.*

6.

On pourrait être tenté d'appliquer le même procédé une seconde fois, en espérant de définir ainsi l'intégrale pour une classe de fonctions plus large. Je dis que le procédé ne fournira rien de nouveau. D'une façon précise, je dis que *la fonction limite d'une suite bornée de fonctions sommables qui converge presque partout, est elle-même une fonction sommable et que, de plus, la suite peut être intégrée terme à terme.*

Démontrons d'abord le lemme suivant, qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème important de M. EGOROFF (Comptes rendus, le 30 janvier 1911): *Si une suite $\{\varphi_n(x)\}$ de fonctions simples converge presque partout dans l'intervalle ab, on peut enlever de cet intervalle un système (fini ou dénombrable) d'intervalles tels que leur somme soit aussi petite que l'on veut, et que d'autre part, la convergence devienne uniforme sur l'ensemble qui reste.*

Pour le voir, soient ε une quantité positive arbitrairement petite et p un nombre entier positif, d'ailleurs quelconque, et désignons par E_{ik} l'ensemble où $|\varphi_i(x) - \varphi_k(x)| \geq \frac{1}{p}$. Les φ tendant presque partout vers une limite déterminée, l'ensemble E^* correspondant au tableau $\{E_{ik}\}$ sera de mesure nulle; car les points où les φ convergent n'y appartiennent pas. Il s'en suit, d'après notre lemme

général, que $l_m^n \to 0$; donc il y a un premier indice m_p tel qu'on ait $l_m^n < \frac{\varepsilon}{2^p}$ pour $m = m_p$ et pour tous les $n \geqq m_p$. Considérons le système d'intervalles que l'on définira en prenant d'abord les intervalles dont se compose l'ensemble $E_m^m = E_{mm}$, puis les intervalles formant l'ensemble $E_m^{m+1} - E_m^m$, puis ceux formant l'ensemble $E_m^{m+2} - E_m^{m+1}$ et ainsi de suite. En prenant un nombre fini quelconque de ces intervalles, ils seront compris, pour n suffisamment grand, dans l'ensemble E_m^n et comme ils n'empiètent pas les uns sur les autres, leur somme ne surpassera pas la longueur totale l_m^n de cet ensemble. C'est-à-dire que, pour $m = m_p$, la somme de tous les intervalles choisis sera inférieure à $\frac{\varepsilon}{2^p}$. D'autre part, ces intervalles renferment tous les ensembles E_{ik} tels que $i \geqq m_p$, $k \geqq m_p$. Faisons maintenant parcourir à p tous les entiers positifs, en gardant la même quantité donnée ε; la somme des intervalles correspondants sera inférieure à $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \cdots = \varepsilon$. Excluons tous ces intervalles; sur l'ensemble qui reste, la convergence des φ_n vers leur limite sera uniforme. En effet, on y a $|\varphi_i(x) - \varphi_k(x)| < \frac{1}{p}$ pour tous les $i, k \geqq m_p$.

Voilà une conséquence immédiate du lemme établi. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ une suite bornée de fonctions simples, convergeant presque partout vers la fonction $f(x)$, et soit ε une quantité positive arbitrairement donnée. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que les φ_n soient comprises entre les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$; s'il n'en était pas ainsi, on remplacerait la valeur de $\varphi_n(x)$, partout où elle surpasse la borne supérieure de $f(x)$, par cette borne elle-même et on ferait la modification analogue pour la borne inférieure. Cela étant, enlevons de l'intervalle ab un système d'intervalles dont la somme $< \varepsilon$ et tels que la suite converge uniformément sur l'ensemble qui reste. Alors on aura sur cet ensemble et pour n suffisamment grand $|f(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon$. D'autre part, comme il est permis d'intégrer terme à terme, la différence des intégrales de f et de φ_n sera aussi, pour n suffisamment grand, aussi petite qu'on voudra, par exemple $< \varepsilon$. C'est-à-dire *qu'on peut, pour chaque fonction sommable $f(x)$, choisir une fonction simple $\varphi(x)$ de sorte qu'elle soit comprise entre les deux bornes de $f(x)$, que de plus la différence des intégrales de $f(x)$ et de $\varphi(x)$ soit inférieure à ε et enfin que la différence elle-même des deux fonctions soit inférieure à ε, sauf peut-être pour un ensemble de points que l'on peut enfermer dans des intervalles dont la somme est inférieure à ε.*

Pour démontrer maintenant le théorème annoncé, soit $\{f_n(x)\}$ une suite bornée de fonctions sommables, tendant presque partout vers la fonction $g(x)$.

Faisons correspondre à chaque fonction $f_n(x)$ une fonction simple $\varphi_n(x)$ d'après la loi que nous venons d'établir, en y posant $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$. Je dis qu'on a, presque partout, $f_n(x) - \varphi_n(x) \to 0$. En effet on peut, pour chaque indice n, enlever de l'intervalle ab un système d'intervalles dont la somme $< \frac{1}{2^n}$, de sorte que, sur l'ensemble qui reste, on ait $|f_n(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n}$. Enlevons les intervalles correspondant à $n = k+1, k+2, \ldots$; leur somme sera inférieure à $\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + + \cdots = \frac{1}{2^k}$. Sur l'ensemble qui reste on aura pour tous les n, à partir de $n = k+1$, $|f_n(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n}$, par conséquent, $f_n(x) - \varphi_n(x)$ y tend vers zéro. C'est-à-dire que les points où cette différence ne tend pas vers zéro, peuvent être enfermés dans des intervalles dont la somme est inférieure à $\frac{1}{2^k}$ et comme k est arbitraire cette somme peut être rendue arbitrairement petite. Par conséquent, ces points d'exception, s'il en existe, forment un ensemble de mesure nulle. Il s'en suit que les φ_n tendent presque partout vers la même limite que les f_n, savoir vers $g(x)$. De plus, les $\varphi_n(x)$ restant par hypothèse entre les mêmes bornes que les $f_n(x)$, ils sont bornés dans leur ensemble. Donc $g(x)$ est la limite, presque partout, d'une suite bornée de fonctions simples; elle est par conséquent sommable. Enfin, son intégrale est la limite des intégrales des $\varphi_n(x)$, ou bien, ces intégrales étant égales, à $\frac{1}{2^n}$ près, à celles des $f_n(x)$, ces dernières intégrales tendent aussi vers l'intégrale de $g(x)$. Le théorème annoncé est donc démontré.

7.

Jusqu'ici il s'agissait toujours des fonctions sommables bornées; pour arriver aux fonctions sommables *non bornées*, on pourrait, au lieu d'exiger de la suite $\{\varphi_n(x)\}$ d'être bornée, faire quelque autre hypothèse plus générale; en tout cas, il faudrait choisir cette hypothèse de sorte qu'on puisse en conclure la convergence des intégrales. Voilà une telle hypothèse: supposons que l'intégrale de $\varphi_n(x)$, prise sur un nombre fini d'intervalles dont la longueur totale est suffisamment petite, soit elle-même aussi petite que l'on voudrait et cela indépendamment de n. Sous cette hypothèse, les raisonnements faits pour les suites bornées s'appliquent presque sans modification et conduisent précisément à toutes les fonctions sommables au sens de Lebesgue. Cependant, du moins à première

vue, l'hypothèse proposée pourrait paraître un peu artificielle, et il me semble plus naturel d'aller une voie qu'on a suivi déjà bien des fois quand il s'agissait d'étendre l'intégrale à des fonctions non bornées. Tout d'abord, introduisons les *fonctions mesurables;* nous appelons ainsi chaque fonction $f(x)$, bornée ou non, qui est la limite — presque partout — d'une suite, bornée ou non, de fonctions simples. *Lorsque la fonction mesurable $f(x)$ est bornée, elle est aussi sommable;* en effet, si la suite correspondante $\{\varphi_n(x)\}$ n'était pas bornée, on pourrait la modifier, comme nous venons de voir, en remplaçant la valeur de $\varphi_n(x)$, partout où elle ne serait pas compris entre les deux bornes de $f(x)$, par la borne plus proche. Donc chaque fonction mesurable et bornée est sommable; inversement, à plus forte raison, chaque fonction bornée et sommable est mesurable. Lorsque la fonction mesurable $f(x)$ n'est pas bornée, désignons par $f(x; c, d)$, où $c \leq d$, la fonction égale à $f(x)$ partout où $c \leq f(x) \leq d$, égale à c partout où $f(x) \leq c$ et à d partout où $f(x) \geq d$. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ une suite de fonctions simples tendant presque partout vers $f(x)$; alors les fonctions correspondantes $\varphi_n(x; c, d)$ formeront une suite bornée de fonctions simples qui tend presque partout vers $f(x; c, d)$. Par conséquent, la fonction bornée $f(x; c, d)$ sera sommable. Cela étant, faisons tendre c vers $-\infty$ et d vers $+\infty$ et cela de toutes les manières possibles; si alors l'intégrale de $f(x; c, d)$ tend toujours vers la même limite finie déterminée, nous attacherons cette limite comme valeur d'intégrale à la fonction $f(x)$ et nous convenons de dire que la fonction non bornée $f(x)$ est sommable. On voit aisément qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, consiste en ce que l'intégrale de $f(x; c, d)$ soit une fonction bornée des paramêtres c et d.

Posons en particulier $c = 0$ ou $d = 0$; il s'en suit que *la partie positive et la partie négative d'une fonction sommable sont aussi sommables et que, par conséquent, le module $|f(x)|$ l'est aussi; inversement, lorsque pour une fonction mesurable $f(x)$, le module $|f(x)|$ est sommable, la fonction elle-même est aussi sommable.*

Il sera bien de fois utile de voir si une fonction est mesurable, avant de s'occuper de la question si elle est sommable. On a évidemment les règles suivantes qui découlent immédiatement de la définition: la somme, la différence, le produit et dans le cas où le diviseur ne s'annule pas, le quotient de deux fonctions mesurables le sont également. Mais il y a plus: *la limite d'une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout, sera elle-même une fonction mesurable.* Ce fait ressort des raisonnements du numéro précédent qui se simplifient même, puisque maintenant n'interviennent plus les hypothèses dont on avait besoin pour intégrer terme à terme.

8.

Les propriétés principales des fonctions sommables découlent, grâce aux définitions données, presque immédiatement, par passage à la limite, des propriétés analogues des fonctions simples; permettez que je n'entre pas dans les détails. Je me contente d'indiquer que, entre autres, la somme et la différence de deux fonctions sommables le seront aussi et que leurs intégrales s'obtiennent par addition et par soustraction des intégrales relatives aux deux fonctions, que de plus le produit de deux fonctions sommables dont l'une est au moins bornée, est aussi sommable, enfin que $f(x)$ étant sommable dans deux des intervalles ab, bc, ac $(a < b < c)$, elle le sera aussi dans le troisième et que l'intégrale prise sur ac est la somme des deux autres. Cela suffit pour pouvoir dire quelques mots sur *la mesure des ensembles.* Vous savez certainement comment on peut définir la mesure après avoir introduit l'intégrale: soit E un ensemble et soit $f(x)$ la fonction égale à 1 pour les points x appartenant à cet ensemble et égale à 0 ailleurs. Si la fonction $f(x)$ est mesurable et par conséquent sommable dans un intervalle quelconque contenant E, elle l'est évidemment dans chaque intervalle et son intégrale est la même sur tous les intervalles qui contiennent E. Alors nous dirons que l'ensemble E est mesurable et nous y attacherons comme mesure $m(E)$ la valeur de l'intégrale considérée. À chaque ensemble mesurable correspond de cette façon une certaine fonction sommable caractéristique ne prenant que les valeurs 0 et 1, et en appliquant à ces fonctions les résultats trouvés, on aura les théorèmes principaux sur la mesure. Ainsi par exemple, désignons par $f(x)$, $f_n(x)$ les fonctions caractéristiques qui correspondent aux ensembles E, E_n et pour fixer les idées, supposons que tous ces ensembles soient compris dans l'intervalle ab. À l'ensemble complémentaire $C(E)$ de E par rapport à l'intervalle ab correspond une fonction égale à $1 - f(x)$ sur cet intervalle et égale à 0 ailleurs; donc *$C(E)$ est mesurable et on a $m(E) + m(C(E)) = b - a$.* À la partie commune des ensembles $E_1, \ldots, E_n$ correspond le produit $f_1(x) \ldots f_n(x)$; à la partie commune d'une infinité dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ correspond le produit infini $f_1(x) f_2(x) \ldots$; or, produit et limite de fonctions mesurables étant elles-mêmes mesurables, *les ensembles considérés sont mesurables.* Dans le cas particulier où chaque ensemble E_n contient les suivants, la valeur du produit infini n'est autre que la limite de $f_n(x)$, alors son intégrale sera la limite de celle de $f_n(x)$, c'est à dire qu'elle sera la limite de $m(E_n)$; donc *dans ce cas, la mesure de la partie commune est fournie par la limite de $m(E_n)$.* D'autre part, réunissons un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$; quant à l'ensemble qui vient, il y correspond la fonction

$1-(1-f_1(x))(1-f_2(x))\ldots$, et cette expression se réduit à $f_1(x)+f_2(x)+\cdots$ dans le cas particulier où le produit de deux fonctions $f_n(x)$ à indices différents s'annule, c'est-à-dire lorsque les ensembles sont sans points communs; par conséquent, *l'ensemble-somme est mesurable et de plus, dans le cas particulier où il n'existe pas des points communs, on a* $m(E_1+E_2+\cdots)=m(E_1)+m(E_2)+\cdots$.

Entre les ensembles et les fonctions mesurables, il y a encore une relation très intime qui joue un rôle important dans la théorie de M. Lebesgue; elle consiste en ce que, *pour* $f(x)$ *mesurable et pour c quelconque, les ensembles où* $f(x)>c$, $f(x)\geq c$, $f(x)<c$, $f(x)\leq c$, $f(x)=c$, *sont mesurables et que, inversement, lorsqu'il en est ainsi, la fonction* $f(x)$ *est mesurable.* Qu'il nous suffise de prouver la première partie de cette assertion, sans insister sur la réciproque. Alors on pourra se borner évidemment, sans restreindre la généralité, au cas où c est positif et à l'ensemble pour lequel $f(x)\geq c$. Or, la fonction caractéristique de cet ensemble est la limite de la suite des fonctions $\frac{1}{c^n}f_n(x;0,c)$ $(n\to\infty)$; ces fonctions étant mesurables, il en sera de même quant à leur limite.

9.

On définira d'une manière tout analogue l'intégrale d'une fonction $f(x)$ sur un ensemble E, n'importe que $f(x)$ soit défini seulement dans E ou bien sur un intervalle ou dans un ensemble quelconque contenant E. À ce but, envisageons la fonction $f(x)$ égale à $g(x)$ sur E et s'annulant ailleurs; si elle est sommable dans un des intervalles contenant E, elle le sera aussi dans tous ces intervalles et son intégrale ne dépend pas du choix particulier de l'intervalle. Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que $f(x)$ est sommable dans E et nous y attacherons comme intégrale l'intégrale de $f_1(x)$ prise sur l'un quelconque des intervalles considérés. Cette définition semble de ne faire aucune hypothèse à l'égard de l'ensemble E; observons qu'on ne restreindra pas la généralité en supposant E mesurable; en effet, même si l'ensemble E lui-même n'était pas mesurable, la partie où $f(x)\neq 0$ le sera certainement puisqu'elle se confonda vec l'ensemble où la fonction sommable $f_1(x)\neq 0$.

Lorsque $f(x)$ *est sommable dans* E, *elle l'est aussi dans chaque sous-ensemble mesurable.* En effet, désignons par $g(x)$ la fonction caractéristique correspondant au sous-ensemble; alors le passage de l'ensemble entier au sous-ensemble revient à multiplier la fonction sommable $f_1(x)$ par la fonction sommable et bornée $g(x)$, ce qui ne touche pas la sommabilité. En particulier, lorsque $f(x)$ est sommable dans l'intervalle ab, il l'est aussi dans chaque sous-ensemble mesurable.

Au point de vue que nous venons d'adopter, les considérations du numéro précédent peuvent être regardées comme correspondant à la fonction $f(x) = 1$, en effet, la mesure d'un ensemble n'est autre que l'intégrale de cette constante prise sur l'ensemble. On se démande, si les résultats acquis au numéro précédent subsistent encore, lorsqu'on y remplace la mesure des ensembles qui interviennent, par l'intégrale d'une fonction sommable quelconque par rapport à ces ensembles. La réponse sera affirmative, comme on voit immédiatement pour les fonctions bornées, pour lesquelles on n'aura presque rien à changer dans les raisonnements; pour les fonctions non bornées, tout revient à observer que lorsqu'on remplace $f(x)$ par la fonction bornée $f(x; c, d)$ et qu'on choisit convenablement les quantités c et d, l'erreur commise relative aux intégrales considérées sera, pour toutes ces intégrales, aussi petite que l'on voudra; bien entendu, on suppose que la fonction soit sommable dans un ensemble E comprenant tous les ensembles considérés. En effet, supposons d'abord $f(x)$ positif; dans ce cas, l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $f(x; 0, d)$ ne surpassera pas, pour aucun des ensembles, l'erreur relative à l'ensemble E. Or, le cas général se ramène au cas considéré en décomposant $f(x)$ en ses deux parties positive et négative. Des résultats que l'on obtient de cette manière, énonçons le suivant: *Lorsque $E_1, E_2, \ldots$ sont des ensembles mesurables sans points communs et que de plus, $f(x)$ est sommable sur l'ensemble $E_1 + E_2 + \cdots$, l'intégrale par rapport à cet ensemble-somme vient en ajoutant les intégrales relatives aux ensembles E_n.* Dans le même ordre d'idées, on arrivera aussi au théorème suivant qui est un des plus utiles dans la théorie de M. Lebesgue: *Lorsque l'ensemble E varie de sorte que $m(E)$ tende vers zéro, il en est de même pour l'intégrale sur E de toute fonction $f(x)$ qui est sommable dans un ensemble contenant E.*

10.

Je terminerai ces lignes en faisant une remarque presque évidente relative à *l'intégrale au sens de* Riemann. Vous avez certainement observé que la définition de l'intégrale dont je viens de me servir, est quelque sorte de généralisation de celle de Riemann. En effet, l'expression

$$\sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

qui intervient chez Riemann, peut être envisagée comme donnant l'intégrale de la fonction *simple* $\varphi_n(x)$ dont les valeurs constantes sur les intervalles (x_k, x_{k+1})

sont choisies égales à l'une des valeurs prises par $f(x)$ sur le même intervalle. Quant aux points x_k, on y peut supposer, pour plus de simplicité, $\varphi_n(x_k) = f(x_k)$. Lorsqu'on passe à la limite, en faisant tendre vers zéro le plus grand des intervalles, ces fonctions simples $\varphi_n(x)$ tendent certainement vers $f(x)$ partout où $f(x)$ est continu. D'autre part, pour les fonctions intégrables au sens de Riemann, les points de discontinuité forment un ensemble de mesure nulle; donc il vient que les fonctions $\varphi(x)$ considérées tendent presque partout vers $f(x)$. Mais il y a plus; pour tout point de continuité x_0, la convergence des $\varphi_n(x)$ vers $f(x)$ est *uniforme aux environs de* x_0. Cela veut dire, avec M. Pringsheim, que, étant donnés le point x_0 et la quantité positive ε arbitrairement petite, il y correspond un certain voisinage de x_0 et un indice ν de sorte que les inégalités $|f(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon$ soient vérifiées pour les $n \geqq \nu$ et pour tous les points x appartenant au voisinage; ou ce qui revient au même, la relation $x_n \rightarrow x_0$ entraîne toujours $\varphi_n(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Par conséquent, *toute fonction intégrable au sens de* Riemann *peut être approchée par une suite bornée de fonctions simples convergeant presque partout et cela de sorte, que la convergence soit uniforme presque partout, c'est à-dire aux environs de chaque point x, sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle.* (Il s'en suit que la convergence est uniforme sur chaque ensemble fermé qui reste après avoir exclu les points d'exception par un système d'intervalles; mais il n'est pas permis d'en conclure que la convergence doit être uniforme sur tout l'ensemble complémentaire des points d'exception; cela revient à ce que, en général, l'ensemble complémentaire ne sera pas fermé.)

La réciproque est vraie: *Lorsque une fonction $f(x)$ est, presque partout, égale à la limite d'une suite bornée de fonctions simples $\varphi_n(x)$ et si, de plus, la convergence est uniforme presque partout, la fonction $f(x)$ est intégrable au sens de* Riemann. En effet, de l'hypothèse faite il vient que la fonction $f(x)$ est bornée et que ses points de discontinuité forment un ensemble de mesure nulle, puisque $f(x)$ est sûrement continu en chaque point x_0 où la convergence est uniforme et les fonctions $\varphi_n(x)$ sont continues. C'est-à-dire que tous les points de discontinuité de $f(x)$ se trouvent parmi les points 1) où la suite ne converge pas (ensemble de mesure nulle), 2) où la convergence n'est pas uniforme (ensemble de mesure nulle), 3) les points de discontinuité des $\varphi_n(x)$ (ensemble dénombrable). Or, les propriétés caractérisant les fonctions intégrables d'après Riemann sont précisément d'être bornées et d'être continues presque partout.

Je profite de l'occasion pour faire quelques indications concernant l'origine de cette notion de convergence uniforme aux environs d'un point, dont vous venez de voir une application qui en prouve l'utilité. Je me l'ai formée, sans en

chercher l'origine, en étudiant l'approximation d'une fonction par des polynomes (Jahresbericht d. deutschen Math.-V., 1908, p. 199); presque en même temps M. Young, dans un travail où il analysait cette notion dont il s'est servi déjà auparavant, déclara de ne pas être sûr où elle puisse se trouver pour la première fois (Proceedings of the London Math. Soc., ser. 2, vol. 6, p. 29). Le rapporteur de ces travaux pour les Fortschritte der Mathematik, M. Faber, nous reproche (1908, p. 468, 472) de ne pas savoir que la notion se trouve déjà chez Weierstrass (Œuvres 2, p. 203); seulement, au lieu d'examiner soigneusement le texte original de Weierstrass, il se contente d'invoquer le témoignage de M. Pringsheim (Encyklop. d. math. Wiss., II¹·, p. 33, 34; édition française, p. 68). Il est vrai que M. Pringsheim qui d'ailleurs s'est servi de cette notion déjà en 1894 (Math. Ann., 44, p. 64, 65, 80), en fait noblement cadeau à Weierstrass, mais en regardant le texte cité de Weierstrass, vous verrez qu'il s'y agit seulement de la convergence uniforme au sens ordinaire; la seule différence consiste à ne pas exiger cette uniformité à la fois pour le domaine entier que l'on envisage, mais exclusivement pour un domaine suffisamment petit entourant le point x_0. C'est-à-dire que la définition de Weierstrass exige seulement qu'il existe un certain voisinage de x_0, déterminé une fois pour toutes, de sorte que, à chaque quantité positive ε, on puisse faire correspondre un nombre ν tel que les inégalités $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ soient vérifiées pour tous les $n \geqq \nu$ et pour tous les points x appartenant au voisinage considéré. Au contraire, dans la définition que nous employons, comme le fait observer aussi l'édition française de l'Encyclopédie, le choix du voisinage dépend en général de la quantité ε, de sorte qu'il pourra se réduire, pour $\varepsilon \to 0$, au point x_0.

Il s'en suit que, jusqu'à d'autres indications, c'est M. Pringsheim lui-même qu'on devra honorer comme l'auteur de cette notion utile.

Kolozsvár, le 19 février 1917.

SUR L'ALLURE DES FONCTIONS DE GREEN ET DE NEUMANN DANS LE VOISINAGE DU CONTOUR.[1]

PAR

PAUL LÉVY

à PARIS.

Introduction.

§ 1. Il est utile, dans bien des questions, de connaître l'allure des fonctions de GREEN ou de NEUMANN dans le voisinage du contour. En désignant par Φ_B^A la valeur d'une de ces fonctions pour les points A et B, on peut se poser à ce sujet le problème suivant:

Problème A. Former une fonction φ_B^A telle que la différence $\Phi_B^A - \varphi_B^A$ soit une fonction holomorphe des points A et B.

Dans le cas où on ne saura pas résoudre ce problème, on peut du moins essayer de résoudre cet autre problème:

Problème B. Former une fonction φ_B^A telle que la différence $\Phi_B^A - \varphi_B^A$ soit finie, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à un ordre donné.

Dans le cas du plan, la résolution du problème B est immédiate, si on utilise la notion de représentation conforme.[2] En effet, si on connaît une représentation conforme du contour étudié C sur un cercle, on en déduit aisément la valeur exacte de Φ_B^A. Or la fonction qui définit cette représentation conforme peut être définie facilement par son développement en série dans le voisinage d'un point M du contour; en prenant pour M le point du contour le plus voisin de B (ou, pour conserver la symétrie, celui pour lequel la somme $MA + MB$ est

[1] Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une note présentée à l'Académie des Sciences le 6 avril 1914.

[2] Voir sur ce sujet les observations de M. HADAMARD à la suite de ma note citée.

minima), et en limitant ce développement à un nombre convenable de termes, on obtient une fonction φ_B^A qui résout le problème B.

Si on cherchait à résoudre par cette méthode le problème A, il faudrait introduire une infinité de coefficients. Le résultat obtenu serait très peu satisfaisant, tant à cause de sa complication qu'à cause du fait que la fonction obtenue φ_B^A ne serait autre que Φ_B^A. Or une solution du problème B ne peut présenter d'intérêt que si la fonction obtenue est beaucoup plus simple que la fonction Φ_B^A.

Il est possible d'obtenir à ce point de vue une solution tout-à-fait satisfaisante, qui a déjà été indiquée par M. E. E. Levi.[1] Je la rappellerai dans la première partie de ce travail. La fonction par laquelle le problème A est ainsi résolu est définie par une intégrale prise le long du contour C. Je résoudrai aussi le problème A pour la fonction de Green d'ordre deux.

Dans le cas de l'espace, la nature analytique des fonctions de Green et de Neumann est beaucoup moins simple. M. Cisotti a déjà obtenu la solution du problème B pour la fonction de Neumann.[2] Il ne considère, il est vrai, les valeurs de la fonction de Neumann (que nous désignons par γ_B^A dans la suite de ce travail), que quand le point B vient en un point β du contour, et l'expression asymptotique qu'il donne de γ_B^A est telle que les dérivés d'ordre supérieur au premier de la différence entre cette expression et γ_B^A ne restent pas finies. Mais d'une part la méthode qu'il a employée peut être étendue au cas où l'on désire une expression asymptotique de γ_B^A telle que la différence entre cette expression et γ_B^A ait ses dérives finies jusqu'à un ordre donné quelconque. D'autre part la connaissance des valeurs de γ_B^A entraîne la connaissance de γ_B^A par l'application de la formule de Green. D'aillleurs les valeurs de γ_B^A sont seules importantes pour les applications. On peut donc dire que le mémoire de M. Cisotti résout notre problème B, pour la fonction de Neumann.

[1] Eugenio Elia Levi. *Sur l'application des équations intégrales au problème de Riemann* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1908] et *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellitiche alle derivate parziali* [Memorie della Societa italiana delle Scienze, 1909].

En publiant ma note des Comptes Rendus, et même en rédigeant le présent travail, j'ignorais les résultats de M. E. E. Levi. Lorsque j'en ai eu connaissance, je n'ai pas supprimé la première partie de ce travail, qui pourtant ne contenait plus de résultats nouveaux que dans le chapitre IV. Il m'a semblé qu'elle était nécessaire dans un exposé complet de la question que j'étudiais, et d'ailleurs mon exposition est assez différente de celle de M. E. E. Levi.

[2] Umberto Cisotti. *Les comportamento della funzione di Neumann in punti prossimi al contorno* [Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1911, 1° semestre]. Il y a d'ailleurs une erreur dans la formule finale de ce travail. La formule qui doit être substituée à celle de M. Cisotti sera indiquée à la fin du § 33.

La seconde partie du présent travail contient une solution du problème B pour les fonctions de GREEN et de NEUMANN. Cette solution est complètement différente de celle de M. CISOTTI. La nature de cette solution sera indiquée dès le § 2 de cette introduction.

Quant au problème A, il ne semble pas qu'on puisse en obtenir dans le cas de l'espace de solution satisfaisante. Il est facile, en considérant les expressions des fonctions de GREEN ou de NEUMANN qui résultent de la théorie des équations intégrales, de voir d'où provient la différence entre ce cas et celui du plan. Dans le cas du plan en effet, le noyau de l'équation intégrale qu'on a à considérer est une fonction holomorphe; il en est donc de même du noyau résolvant, et il en résulte que, si l'on cherche à simplifier la solution en négligeant les termes holomorphes, on peut obtenir un résultat très simple, que nous obtiendrons plus loin par une autre méthode. Dans le cas de l'espace au contraire, le noyau de l'équation intégrale est un noyau singulier; non seulement cette circonstance rend moins simples les formules par lesquelles on peut obtenir la solution, mais elle modifie la nature analytique de cette solution, au point qu'on ne peut plus obtenir de simplification en négligeant les termes holomorphes.

Les mêmes circonstances se présentent si l'on essaie d'employer des méthodes différentes. La méthode de ROBIN donne la fonction de NEUMANN sous la forme d'une série telle que, si on consent à faire une erreur dont les dérivées d'un ordre supérieur à un nombre donné p deviennent infinies, il suffit de considérer un nombre fini de termes de cette série. C'est sur cette remarque que repose la méthode de M. CISOTTI. Mais le nombre de termes à considérer augmentent indéfiniment avec p, de sorte qu'on n'obtient encore aucune solution acceptable du problème A.

§ 2. Les fonctions de GREEN et de NEUMANN sont telles que, si on les a obtenues sous une forme quelconque, il est généralement facile de *vérifier* que la fonction obtenue est bien la fonction de GREEN ou de NEUMANN. De même, si on a obtenu sous une forme quelconque une fonction φ_B^A résolvant un des problèmes A et B, il est facile de *vérifier* cette propriété de φ_B^A. C'est sur cette vérification que reposent les méthodes qui seront développées dans ce mémoire.

Le principe de cette vérification exige la connaissance de quelques théorèmes généraux sur la nature analytique des fonctions harmoniques définies par certaines conditions aux limites. Malgré le caractère intuitif de ces théorèmes, des démonstrations sont évidemment nécessaires, et ces démonstrations tiendront une place importante dans ce travail.

Ceux de ces théorèmes qui seront établis dans la première partie ont pour but d'établir que certaines fonctions sont holomorphes. Ce sont des généralisations de théorèmes de BRUNS[1] et de MM. SCHWARZ et HADAMARD.[2]

La généralisation, consistant seulement dans l'introduction d'un paramètre, n'introduisant pas de modification dans les raisonnements, il suffirait de renvoyer le lecteur au mémoire de M. HADAMARD. J'ai préféré consacrer le Chapitre I de la première partie à la démonstration de ces théorèmes, afin que ce mémoire se suffise à lui-même.

Les théorèmes généraux qui sont nécessaires dans la deuxième partie seront établis dans le Chapitre II de cette partie. Ils n'ont pas été démontrés antérieurement, du moins à ma connaissance.

Je démontrerai ces théorèmes généraux par la voie la plus simple et la plus naturelle qui repose sur l'emploi des équations intégrales, au sujet desquelles j'établirai dans le Chapitre I de la deuxième partie quelques résultats nouveaux. Il serait assez facile, pour les théorèmes de la première partie, de ne pas utiliser la théorie de ces équations, mais cela allongerait un peu l'exposition. Ce serait au contraire plus difficile pour les théorèmes généraux de la deuxième partie.

Une fois ces théorèmes obtenus, il m'a paru intéressant d'éviter une nouvelle application de la théorie des équations intégrales, et de chercher systématiquement tout ce qu'on pouvait déduire de la méthode de vérification à laquelle j'ai déjà fait allusion, et dont le principe découle très simplement des théoremes généraux.

Cette méthode oblige à introduire *a priori* des fonctions harmoniques ayant des singularités convenables. L'étude de ces fonctions sera l'objet d'un chapitre spécial. Les expressions asymptotiques cherchées des fonctions de GREEN et de NEUMANN s'obtiennent ensuite sous forme de séries formées avec ces fonctions harmoniques et dont il est facile de déterminer successivement les coefficients.

[1] H. BRUNS. — *Ueber einen Satz aus der Potentialtheorie* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 81 (1876)]. Voir aussi l'élégant exposé de M. ERHARD SCHMIDT: *Bemerkung zur Potentialtheorie* [Mathematische Annalen, Band 68 (1910)].

[2] JACQUES HADAMARD. — *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.* [Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, t. XXXIII (1908)]. V. pp. 23—27.

Première partie.

Le problème A pour le plan.

CHAPITRE I.

Théorèmes généraux sur les fonctions harmoniques.

§ 3. Etablissons d'abord le théorème suivant, que nous appellerons dans la suite *théorème de* Bruns, bien qu'en réalité il généralise un peu un théorème de Bruns.

C étant une courbe analytique régulière fermée, $\mu(s, \lambda)$ étant une fonction de l'arc s et d'un paramètre λ, holomorphe sur toute la courbe C et pour $\lambda < \Lambda$, les potentiels de simple couche et de double couche de densité $\mu(s, \lambda)$ sont dans toute la région intérieure à C et pour $\lambda < \Lambda$ des fonctions holomorphes de λ et des coordonnées du point attiré. Ces fonctions sont prolongeables à l'extérieur de C et restent holomorphes tant que la distance du point attiré a C ne dépasse pas une valeur convenablement déterminée.

Désignons par M le point du contour C défini par la valeur s de l'arc, et par ϱ la distance de ce point au point attiré A. Les potentiels considérés dans l'énoncé sont définis à l'intérieur de C par les formules

$$U_1(A, \lambda) = \int_C \mu(s, \lambda) \log \frac{1}{\varrho} ds,$$

$$U_2(A, \lambda) = \int_C \mu(s, \lambda) \frac{d \log \frac{1}{\varrho}}{d n} ds.$$

Formons les deux fonctions harmoniques de A, $f_1(A, \lambda)$ et $f_2(A, \lambda)$ définies par les conditions de Cauchy

$$f_1(M, \lambda) = \mu(s, \lambda), \quad \frac{d f_1(M, \lambda)}{d n} = 0;$$

$$f_2(M, \lambda) = 0, \quad \frac{d f_2(M, \lambda)}{d n} = \mu(s, \lambda).$$

Ces fonctions existent, d'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, et sont holomorphes tant que $\lambda < \Lambda$ et que la distance du point A au contour ne dépasse pas une valeur convenablement déterminée ε'. Nous prendrons pour ε un nombre quelconque inférieur à ε'.

Les potentiels U_1 et U_2 étant holomorphes en tout point intérieur à C, il suffit de démontrer que ces potentiels ou leurs prolongements sont holomorphes en tout point A_1 dont la distance à C ne dépasse pas ε. Or un pareil point peut être entouré d'un contour Γ, coupant C en deux points, et tel que les fonctions f_1 et f_2 soient holomorphes à l'intérieur de Γ et sur ce contour. Appelons C_1 l'arc de C intérieur à Γ et Γ_1 l'arc de Γ extérieur à C. Appliquons la formule de GREEN au contour fermé constitué par C_1 et Γ_1, et d'une part aux fonctions f_2 et $\log \varrho$, d'autre part aux fonctions f_1 et $\log \varrho$, ϱ étant la distance du point M qui décrit le contour à un point fixe A intérieur à C. En comptant les normales positivement dans un sens convenable, il vient

$$\int_{C_1} \mu(s, \lambda) \log \varrho \, ds = \int_{\Gamma_1} \left[f_2(M, \lambda) \frac{d \log \varrho}{d n} - \log \varrho \frac{d f_2(M, \lambda)}{d n} \right] ds,$$

$$\int_{C_1} \mu(s, \lambda) \frac{d \log \varrho}{d n} ds = \int_{\Gamma_1} \left[\log \varrho \frac{d f_1(M, \lambda)}{d n} - f_1(M, \lambda) \frac{d \log \varrho}{d n} \right] ds.$$

A l'aide de ces formules, on peut transformer les expressions de U_1 et U_2 de manière à représenter ces fonctions par des potentiels de simple couche et de double couche situées sur l'arc de C extérieur à Γ et sur Γ_1, et dont les densités sont fonctions holomorphes de λ. Ces fonctions sont donc prolongeables dans toute la région intérieure à Γ et sont, en tout point intérieur à ce contour, et en particulier au point considéré A_1, des fonctions holomorphes des coordonnées du point attiré et de λ. Le théorème énoncé est donc démontré.

On peut aisément, comme l'a fait observer M. HADAMARD, le généraliser en remplaçant $\log \varrho$ par la solution fondamentale d'une équation aux dérivées partielles quelconque du type elliptique. La formule de GREEN, sur laquelle repose le raisonnement, doit être remplacée par la formule de réciprocité relative à cette équation.

§ 4. Dans un autre ordre d'idées, nous aurons besoin du théorème suivant, presque évident, mais assez important par la suite pour qu'il soit utile d'insister sur sa démonstration.

Lorsque le point attiré A vient en un point α du contour, la fonction $\dfrac{d \log \varrho}{d n}$ *se réduit à une fonction holomorphe de α et de M.*

Pour démontrer ce théorème, observons d'abord que si une fonction $h(s, \sigma)$ est holomorphe, et si le quotient $\dfrac{h(s, \sigma)}{(s-\sigma)^2}$ est fini, il est holomorphe. En effet, en posant

$$s + \sigma = \xi, \quad s - \sigma = \eta,$$

$h(s, \sigma)$ se réduit à une fonction holomorphe de ξ et η,

$$H(\xi, \eta) = H_0(\xi) + \eta H_1(\xi) + \eta^2 H_2(\xi) + \cdots;$$

l'hypothèse que $\frac{h(s, \sigma)}{(s-\sigma)^2} = \frac{H(\xi, \eta)}{\eta^2}$ reste fini entraîne $H_0(\xi) = H_1(\xi) = 0$, et par suite ce quotient est holomorphe.

Désignons maintenant par s et σ les longueurs d'arc déterminant les positions des points M et α, et par p la distance du point α à la tangente au contour C en M. La fonction étudiée $\frac{d \log \varrho}{d n}$ est (au signe près, si p et dn sont comptés positivement dans le même sens) égale à $\frac{p}{\varrho^2}$. Or p et ϱ^2 sont des fonctions holomorphes de s et σ (par définition du contour régulier les coordonnées de M et α sont des fonctions holomorphes de s et σ, et il suffit de former les expressions de p et ϱ^2 pour vérifier que ces fonctions sont holomorphes). Les quotients $\frac{p}{(s-\sigma)^2}$ et $\frac{\varrho^2}{(s-\sigma)^2}$ étant finis, représentent des fonctions holomorphes. Ce dernier ne s'annulant pas, puisque pour $\varrho = 0$ sa valeur est 1, leur quotient $\frac{p}{\varrho^2}$ est bien holomorphe.

§ 5. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème fondamental de MM. Schwarz et Hadamard, que nous énoncerons de la manière suivante.

Si une fonction harmonique du point A et d'un paramètre λ se réduit, quand A décrit un contour régulier C, à une fonction holomorphe de ce point et de λ, cette fonction est une fonction holomorphe de A et de λ, non seulement à l'intérieur de C, mais aussi à l'extérieur, tant que la distance du point A au contour C ne dépasse pas une valeur convenablement déterminée.

Appelons $f(A, \lambda)$ la fonction considérée, et $f(s, \lambda)$ sa valeur en un point M de C, défini par la valeur s de la longueur d'arc. Cette fonction peut être représentée à l'intérieur de C, d'après Neumann et M. Fredholm, par un potentiel de double couche de densité $\mu(s, \lambda)$, et il suffit, d'après le théorème de Bruns, de démontrer que $\mu(s, \lambda)$ est une fonction holomorphe de s et de λ. Or la densité $\mu(s, \lambda)$ est définie, en conservant les notations du § 4, par l'équation intégrale

$$\pi \mu(\sigma, \lambda) + \int_C \frac{d \log \frac{1}{\varrho}}{d n} \mu(s, \lambda)\, ds = f(\sigma, \lambda)$$

dont le *noyau* $\dfrac{d\log\frac{1}{\varrho}}{dn}$ est une fonction holomorphe de s et σ. Alors, d'après les formules de M. Fredholm, le noyau résolvant est aussi une fonction holomorphe, et il en est de même de la fonction inconnue $\mu(s, \lambda)$.

Ce théorème est susceptible de généralisations indiquées par M. Hadamard. Ainsi il s'applique si la fonction $f(A, \lambda)$ au lieu d'être définie par la suite de ses valeurs sur C, était définie par la suite des valeurs de sa dérivée normale. Seulement, comme elle ne serait définie qu'à une constante additive près, qui pourrait dépendre de λ, il faut ajouter une hypothèse supplémentaire, par exemple que

$$\int_C f(s, \lambda)\, ds$$

soit une fonction holomorphe de λ. D'autres généralisations s'obtiennent en remplaçant l'équation de Laplace par l'équation $\Delta\Delta u = 0$. Dans ce cas (en considérant le problème aux limites correspondant au cas des plaques élastiques encastrées), il faut faire à la fois les deux hypothèses que la fonction considérée et sa dérivée normale soient fonctions holomorphes de s et λ. Enfin, si au lieu d'un paramètre λ, on introduisait plusieurs paramètres, les théorèmes considérés resteraient exacts.

CHAPITRE II.

La fonction de Green pour le plan.

§ 6. La fonction de Green; que nous désignerons par g_B^A, est définie par les conditions qu'elle s'annule quand A est sur le contour C, et que la différence $g_B^A - \log\frac{1}{r}$ (r désignant la distance AB) soit à l'intérieur de C une fonction harmonique du point A. Il est bien connu que c'est une fonction symétrique de A et B, et que la connaissance de cette fonction permet de résoudre le problème de Dirichlet par la formule

$$f(A) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn} f(M)\, ds, \tag{1}$$

ds étant toujours l'élément d'arc décrit par le point M, et la dérivée normale étant comptée positivement vers l'intérieur.

Nous ne considérerons que des contours réguliers. Le théorème de M. Hadamard (loc. cit., p. 27), d'après lequel la singularité de la fonction de Green dans le voisinage d'un point du contour dépend seulement de la partie du contour voisine de ce point, permettrait aisément d'obtenir des généralisations relatives aux contours dont une partie seulement est régulière.

Introduisons une fonction qui jouera un rôle important tant dans la suite de ce Chapitre que dans les suivants. C'est la fonction définie, lorsque A et B sont intérieurs à C, par la formule

$$I_B^A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{d(\log\varrho\log\varrho')}{dn}\,ds,$$

ϱ et ϱ' désignant les distances respectives de A et B au point M.

La formule de Green appliquée aux fonctions $\log\varrho$ et $\log\varrho'$ donne

$$\int\limits_C \log\varrho\frac{d\log\varrho'}{dn}\,ds = \int\limits_C \log\varrho'\frac{d\log\varrho}{dn}\,ds,$$

de sorte que I_B^A peut encore s'écrire sous les deux formes

(2) $$I_B^A = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \log\varrho\frac{d\log\varrho'}{dn}\,ds.$$

(2') $$I_B^A = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \log\varrho'\frac{d\log\varrho}{dn}\,ds.$$

Etudions ce que deviennent cette fonction et sa dérivée normale quand A vient en un point a du contour. La formule (2'), d'après les propriétés connues des potentiels de double couche, donne à la limite

$$I_B^a = -\log r + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \log\varrho'\frac{d\log\varrho}{dn}\,ds,$$

en conservant les notations r et ϱ quand A vient en a. Cette dernière intégrale, considérée comme fonction de B, est un potentiel de simple couche, dont la densité $\frac{d\log\varrho}{dn}$ est une fonction holomorphe des points M et a. Ce potentiel,

d'après le théorème de Bruns, est lui-même une fonction holomorphe des points a et B. Donc I_B^a *est la somme de* $\log \frac{1}{r}$ *et d'une fonction holomorphe.*

De même la formule (2) donne, d'après les propriétés de la dérivée normale des potentiels de simple couche, en désignant par $\frac{d}{dn_a}$ une dérivée normale au point a,

$$\frac{d I_B^a}{dn} = \frac{d \log r}{d n_a} + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d \log \varrho}{d n_a} \frac{d \log \varrho'}{d n} ds.$$

Cette intégrale, considérée comme fonction de B, est un potentiel de double couche dont la densité $\frac{d \log \varrho}{d n_a}$ (qui se déduit de $\frac{d \log \varrho}{dn}$ en échangeant les rôles des points M et a) est holomorphe. D'après le théorème de Bruns, c'est une fonction holomorphe des points a et B. *Donc la dérivée normale de* $I_B^A + \log \frac{1}{r}$, *A venant en un point a du contour est une fonction holomorphe des points a et B.*

§ 7. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème qui constitue le résultat essentiel de ce Chapitre, et qui est le suivant.

La fonction de Green g_B^A *est la somme de* $\log \frac{1}{r} - I_B^A$ *et d'une fonction holomorphe des points A et B.*

Commençons par observer que $g_B^A + \log r + I_B^A$, considéré comme fonction de A, le point paramétrique B étant intérieur au contour, est une fonction harmonique. En effet la somme des deux premiers termes est harmonique, d'après la définition de la fonction de Green, et l'intégrale I_B^A qui est un potentiel d'une simple ou d'une double couche [d'après (2) ou (2')] est harmonique.

D'après le théorème fondamental du § 5, il suffit donc de *vérifier* que $g_B^A + \log r + I_B^A$ se réduit sur le contour à une fonction holomorphe de a et B. Or le premier terme s'annule, par définition de la fonction de Green, et la somme des deux derniers se réduit bien à une fonction holomorphe, d'après les propriétés de I_B^A que nous venons d'établir.

Ce théorème étant établi, en formant la dérivée normale de la fonction holomorphe $g_B^A + \log r + I_B^A$, et en utilisant ce que nous savons sur la dérivée normale de I_B^A, nous obtenons le résultat suivant, relatif à la fonction qui intervient dans la formule (1):

La fonction $\frac{dg_B^a}{dn_a}$ *est la somme de* $2\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn_a}$ *et d'une fonction holomorphe.*[1]

§ 8. Il est à remarquer que, dans les raisonnements précédents nous n'avons utilisé aucune autre propriété de la fonction de Green, que celles qui constituent sa définition.

Dans l'application des théorèmes de Bruns et de M. Hadamard, nous n'avons pas utilisé le fait que les fonctions considérées dans ces théorèmes peuvent être prolongées extérieurement à C. En reprenant à ce point de vue les raisonnements précédents, on constate que les fonctions I_B^A et g_B^A sont prolongeables à l'extérieur de C, et que les fonctions $g_B^A + \log r + I_B^A$ et $\frac{d}{dn_a}(g_B^a + 2\log r)$ sont holomorphes tant que A et B ne s'éloignent pas, extérieurement à C, à une distance de ce contour supérieur à une valeur convenablement déterminée.

Les résultats du § 7 peuvent être appliqués à la détermination de la fonction de Green, par la méthode d'approximations successives indiquée dans ma thèse.[2] Il faut en effet, pour appliquer cette méthode, prendre comme première approximation une fonction différant de g_B^A par une fonction holomorphe. On voit que, contrairement à ce que je pensais en exposant cette méthode, une telle fonction peut être obtenue bien simplement.

CHAPITRE III.

La fonction de Neumann pour le plan.

§ 9. La fonction de Neumann relative au contour C et aux points A et B, que nous désignerons par γ_B^A, est définie par les conditions que, si on la considère comme fonction du point A, la différence $\gamma_B^A - \log\frac{1}{r}$ soit harmonique à l'intérieur de C, que sa dérivée normale sur le contour ait la valeur constante $\frac{2\pi}{L}$ (L désignant la longueur du contour), enfin que sa valeur moyenne sur le

[1] La méthode du texte est une méthode de vérification. Le lecteur obtiendra aisément, en s'inspirant de celle qui sera appliquée à l'étude de la fonction de Green dans l'espace, une méthode permettant d'arriver aux mêmes résultats sans introduire *a priori* la fonction I_B^A.

[2] Paul Lévy. — *Sur les équations intégro-différentielles définissant des fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1911 et Journal de l'Ecole Polytechnique, 1913). V. § 31.

contour soit nulle. Il est bien connu que c'est une fonction symétrique des points A et B, et que son introduction permet de résoudre le problème de NEUMANN par la formule

$$(3) \qquad f(A) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \gamma_M^A \frac{df(M)}{dn} ds.$$

En introduisant toujours la fonction I_B^A étudiée § 6, nous allons démontrer le théorème suivant:

La fonction de NEUMANN γ_B^A *est la somme de* $\log\frac{1}{r} + I_B^A$ *et d'une fonction holomorphe des points* A *et* B.

La différence $\gamma_B^A - \left(\log\frac{1}{r} + I_B^A\right)$ étant, d'après les définitions des fonctions γ_B^A et I_B^A une fonction harmonique de A, il suffit, d'après les théorèmes généraux de § 5, de *vérifier* que sa dérivée normale sur le contour est une fonction holomorphe du point considéré du contour et de B, et que sa valeur moyenne sur le contour est une fonction holomorphe de B.

Or la dérivée normale de la différence considérée est bien une fonction holomorphe, puisque celle du premier terme a, par définition de γ_B^A, une valeur constante, et que celle du second terme est holomorphe, d'après les résultats du § 6.

D'autre part la valeur moyenne de cette différence sur le contour est bien une fonction holomorphe de B. En effet on peut négliger γ_B^A dont, encore par définition, la valeur moyenne est nulle. D'après les résultats du § 6, la différence considérée devient, sur le contour la somme de $2\log r$ et d'une fonction holomorphe de B et de a. La valeur moyenne de cette fonction sur le contour est évidemment une fonction holomorphe de B, et celle de $2\log r$ l'est aussi d'après le théorème de BRUNS. Le théorème énoncé est donc établi.

Les valeurs de la fonction de NEUMANN quand un des points vient sur le contour sont particulièrement importantes à cause du rôle qu'elles jouent dans la formule (3). Le point A venant en un point a du contour, le théorème précédent devient, d'après ce que nous avons établi sur I_B^a:

La fonction γ_B^a *est la somme de* $2\log\frac{1}{r}$ *et d'une fonction holomorphe des points* a *et* B.

Les remarques du § 8 relatives à la fonction de GREEN, s'appliquent à la fonction de NEUMANN.

CHAPITRE IV.

La fonction de Green d'ordre deux pour le plan.

§ 10. Considérons la fonction de Green d'ordre deux, G_B^A. Elle est définie de la manière suivante: considérée comme fonction de A, elle est la somme de $r^2 \log \frac{1}{r}$ et d'une fonction biharmonique et elle s'annule sur le contour ainsi que sa dérivée normale.

J'ai démontré dans ma thèse[1] que la différence $G_B^A - r^2 g_B^A$ est holomorphe. Par suite:

La fonction G_B^A est la somme de $r^2 \log \frac{1}{r} - r^2 I_B^A$ et d'une fonction holomorphe des points A et B.

Voici une démonstration directe de ce résultat.

Observons d'abord que l'expression $G_B^A - r^2 \log \frac{1}{r} + r^2 I_B^A$ est une fonction biharmonique de A; en effet $G_B^A - r^2 \log \frac{1}{r}$ l'est par définition de G_B^A, et $r^2 I_B^A$ l'est en vertu de ce théorème, dont la vérification est immédiate, que le produit de r^2 par une fonction harmonique est une fonction biharmonique.

Il suffit donc, d'après les théorèmes généraux du § 5, de vérifier que cette expression se réduit, quand A vient en un point a du contour, à une fonction holomorphe de a et de B, et qu'il en est de même de sa dérivée normale.

Pour la fonction elle-même, c'est évident, puisque G_B^A s'annule par définition et que $I_B^A - \log \frac{1}{r}$ devient sur le contour une fonction holomorphe de a et B, d'après le § 6.

Quant à la dérivée normale, celle de G_B^A s'annulant, d'après la définition de cette fonction, elle s'écrit

$$r^2 \frac{d}{d n_a}(I_B^A - \log r) + 2r \frac{dr}{dn_a}(I_B^A + \log r) + 2r \frac{dr}{dn_a}\cdot$$

Elle est donc également holomorphe, d'après les résultats du § 6, et parce que $r \frac{dr}{dn_a}$, qui est au signe près la distance du point B à la tangente au contour en a, est également holomorphe. La résultat énoncé est donc établi.

[1] *Loc. cit.* § 35. — Les notations employées dans le travail cité étant différentes de celles du travail actuel, le résultat rappelé dans le texte était énoncé sous une forme un peu différente.

Il est intéressant de connaître aussi les valeurs, quand A vient en a, de $\Delta_A G_B^A$ et de sa dérivée normale, ces quantités jouant dans le problème de détermination d'une fonction biharmonique par ses valeurs au contour et celles de sa dérivée normale le même rôle que $\frac{d}{d n_a} g_B^a$ pour le problème de Dirichlet ou γ_B^a pour le problème de Neumann.

Pour cela partons de l'expression $u = r^2 g_B^A$ qui ne diffère de G_B^A que par une fonction holomorphe. En prenant des axes de coordonnées passant par B, et parallèles à la tangente et à la normale au contour C au point a vers lequel nous voulons faire tendre A, et appelant x et y les coordonnées de A, il vient

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta_A u = 4 g_B^A + 4x \dfrac{\partial g_B^A}{\partial x} + 4y \dfrac{\partial g_B^A}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} \Delta_A u = 8 \dfrac{\partial g_B^A}{\partial y} + 4x \dfrac{\partial^2 g_B^A}{\partial x \partial y} + 4y \dfrac{\partial^2 g_B^A}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Quand A vient en a, ces formules deviennent, en vertu des propriétés élémentaires de la fonction de Green,

$$\Delta_a u = 4y \frac{d g_B^a}{d n_a},$$

$$\frac{d}{d n_a} \Delta_a u = 8 \frac{d g_B^a}{d n_a} + 4x \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{d g_B^a}{d n_a} + 4 k y \frac{d g_B^a}{d n_a},$$

k désignant la courbure du contour C au point a et σ la valeur de s en ce point.

Or, d'après le § 7, $\frac{d g_B^a}{d n_a}$ ne diffère que par une fonction holomorphe de $2 \frac{d \log \frac{1}{r}}{d n_a}$, c'est-à-dire de $-\frac{2y}{r^2}$. Donc, en négligeant des termes holomorphes, les expressions (4) deviennent

$$-8 \frac{y^2}{r^2},$$

$$-16 \frac{y}{r^2} + 16 \frac{x^2 y}{r^4} - 8k \frac{y^2}{r^2} = -16 \frac{y^3}{r^4} - 8k \frac{y^2}{r^2},$$

ou enfin, en appelant p la distance du point B à la tangente au contour C en a, et en observant que $y = -p$,

$$-8 \frac{p^2}{r^2}, \quad 16 \frac{p^3}{r^4} - 8k \frac{p^2}{r^2}.$$

Comme u ne diffère pas de G_B^A que par une fonction holomorphe nous obtenons les résultats suivants:

L'expression $\Delta_a G_B^a$ *est la somme de* $-8\frac{p^2}{r^2}$ *et d'une fonction holomorphe des points* a *et* B.

L'expression $\frac{d}{dn_a}\Delta_a G_B^a$ *est la somme de* $16\frac{p^3}{r^4} - 8k\frac{p^2}{r^2}$ *et d'une fonction holomorphe des points* A *et* B.

§ 11. On peut évidemment concevoir d'autres applications des principes qui précèdent. Toutefois le champ des généralisations n'est pas aussi vaste qu'un examen superficiel pourrait le faire penser.

On a en effet observé le rôle essentiel que jouait cette circonstance que $\frac{d\log r}{dn}$ est sur le contour une fonction holomorphe des deux points dont dépend cette expression. Cette expression étant le noyau de l'équation intégrale dont dépend la résolution du problème de Dirichlet, on voit qu'il ne faut s'attendre à pouvoir généraliser nos résultats que dans les questions dépendant d'équations intégrales à noyaux holomorphes. Or la plupart des problèmes aux limites relatifs à des équations du type elliptique autres que l'équation de Laplace conduisent à des équations à noyaux non holomorphes. Tel est le cas par exemple pour le problème de Dirichlet relatif à l'équation

$$\Delta u + ku = 0.$$

Dans le cas de l'espace, on rencontre la même difficulté, comme nous l'avons déjà observé. S'il n'est pas possible d'étendre au cas de l'espace nos résultats essentiels, on pourrait se demander si l'on peut généraliser du moins les relations simples qui existent entre les fonctions g_B^A, γ_B^A et G_B^A. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

D'après les résultats des § 7 et 9, la fonction $g_B^A + \gamma_B^A - 2\log\frac{1}{r}$ est holomorphe. On doit donc se demander, dans le cas de l'espace, si la fonction $g_B^A + \gamma_B^A - \frac{2}{r}$ est holomorphe. Or s'il en était ainsi, il en serait de même, A et B venant en deux points a et b de la surface, de l'expression

$$\frac{d}{dn_a}\left(g_b^a + \gamma_b^a - \frac{2}{r}\right),$$

qui ne diffère que par une constante de $-2\frac{d}{dn_a}\frac{1}{r} = -\frac{2p}{r^3}$, p étant la distance

de b au plan tangent à la surface considérée en a. Or cette expression n'est manifestement holomorphe pour aucune autre surface que le plan.

On peut aussi se demander si le fait que $G_B^A - r^2 g_B^A$ soit holomorphe est exact dans le cas de l'espace. Or, s'il en était ainsi, l'expression

$$(5) \qquad \frac{d}{d n_a}(G_B^a - r^2 g_B^a) = -r^2 \frac{d}{d n_a} g_B^a$$

serait holomorphe. Or nous verrons plus loin que $\frac{d}{d n_a} g_B^a$ est la somme de $\frac{2p}{r^3}$ et d'une expression qui est au plus de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{r}$, quand B est voisin de a. Il en résulte que l'expression (5) est la somme de $-\frac{2p}{r}$ et d'une quantité infiniment petite. La valeur limite de $\frac{p}{r}$ dépendant de la manière dont B tend vers a, cette expression ne peut pas être holomorphe.

Deuxième partie.

Le problème B pour l'espace.

CHAPITRE I.

Sur la composition des fonctions singulières.

§ 12. Avant d'établir les théorèmes généraux dont il a été question dans l'introduction et qui feront l'objet du Chapitre II, il faut établir quelques résultats préliminaires sur certaines équations intégrales à noyaux singuliers et sur la composition de ces noyaux. Avant même d'établir ces résultats, nous établirons quelques lemmes relatifs aux fonctions singulières que nous aurons à considérer.

Voici les notations que nous emploierons dans tout ce chapitre.

Nous considérerons deux points A et B fixes dans une aire plane S, et un point M mobile dans cette aire. Nous appellerons dS l'élément d'aire décrit par le point M, ξ et η ses coordonnées, x et y celles de A, x' et y' celles de B, ϱ, ϱ' et r les distances MA, MB et AB, Σ la portion de l'aire S intérieure à une circonférence de rayon r ayant pour centre le milieu de AB, Σ' la portion de l'aire S extérieure à cette circonférence, et Σ_1 et Σ_2 les portions de l'aire Σ situées

respectiviment, par rapport à la droite $\varrho = \varrho'$ (perpendiculaire à AB en son milieu), du côté de A et du côté de B. Enfin K représentera toujours un nombre indépendant des points A et B, qui d'ailleurs ne sera pas le même dans les différents énoncés qui vont suivre, ou même dans les différentes parties d'une même démonstration.

Lemme I.[1] — *L'intégrale*

$$I = \iint\limits_{\Sigma'} \frac{dS}{\varrho^{\alpha} \varrho'^{\beta}}$$

admet une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^{\alpha+\beta-2}}$ *si* $\alpha+\beta > 2$, *de la forme* $K \log \frac{1}{r}$ *si* $\alpha+\beta = 2$, *et de la forme* K *si* $\alpha+\beta < 2$.

En effet, ϱ' étant $\geq \frac{\varrho}{3}$ dans la région Σ', nous augmentons I en remplaçant $\frac{1}{\varrho'}$ par $\frac{3}{\varrho}$. Nous augmentons encore cette intégrale en remplaçant le champ d'intégration Σ' par la couronne circulaire $\frac{r}{2} < \varrho < l$, l désignant la plus grande distance de deux points de l'aire S. La nouvelle intégrale obtenue,

$$3^{\beta}\, 2\pi \int\limits_{\frac{r}{2}}^{l} \frac{d\varrho}{\varrho^{\alpha+\beta-1}}$$

admet évidemment les limites supérieures indiquées dans l'énoncé.

Lemme II. — *Si* $\alpha < 2$, *l'intégrale*

$$I_1 = \iint\limits_{\Sigma''} \frac{dS}{\varrho^{\alpha} \varrho'^{\beta}}$$

admet une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^{\alpha+\beta-2}}$.

[1] Ce lemme et le suivant, que l'on présente en général sous une forme un peu différente, sont ceux sur lesquels repose la théorie classique de l'itération des noyaux singuliers des équations intégrales. Ayant besoin de compléter cette théorie au point de vue de l'étude des dérivées des noyaux itérées, nous ferons un fréquent usage de ces lemmes.

En effet, nous augmentons I_1 en remplaçant $\frac{1}{\varrho'}$ par son maximum $\frac{2}{r}$ dans la région Σ_1, puis en remplaçant cette région par le cercle $\varrho < 2r$. La nouvelle intégrale obtenue s'écrit

$$\left(\frac{2}{r}\right)^{\beta} 2\pi \int_0^{2r} \frac{d\varrho}{\varrho^{\alpha-1}} = \frac{K}{r^{\alpha+\beta-2}}.$$

On aurait de même une limite supérieure de l'intégrale analogue à la précédente mais prise dans le champ Σ_2. Nous savons donc limiter supérieurement, dans les différentes portions de l'aire S, les intégrales de fonctions ayant une limite supérieure de la forme $\frac{K}{\varrho^{\alpha}\varrho'^{\beta}}$, pourvu que, dans les régions considérées, l'intégrale de cette limite supérieure ait un sens.

§ 13. Considérons une fonction $f(A, B)$ qui soit finie et continue dans la région S ainsi que toutes ses dérivées tant que les points A et B sont distincts. Supposons qu'un nombre h soit tel que, dans toute région S' intérieure à S et sans point commun avec son contour, et même si A et B sont très voisins, la fonction $f(A, B)$ soit finie si $h \leq 0$ et infinie au plus comme $\frac{1}{r^h}$ si $h > 0$, et que de plus, quel que soit l'entier positif i, toutes les dérivées d'ordre i de $f(A, B)$ soient finies si $h + i \leq 0$ et infinies au plus comme $\frac{1}{r^{h+i}}$ si $h + i > 0$. Supposons enfin que, si $h < 2$, quelle que soit la fonction holomorphe $\omega(A)$, les fonctions

$$(1) \qquad \iint_S f(A, M)\,\omega(M)\,dS, \quad \iint_S f(M, A)\,\omega(M)\,dS,$$

soient holomorphes.[1] Nous dirons qu'une fonction vérifiant toutes ces conditions est *singulière d'ordre* $\leq h$.

Si de plus le module de $f(A, B)$ admet une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^h}$, et que, quel que soit l'entier positif i, les modules de toutes les dérivées d'ordre i de $f(A, B)$ admettent une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^{h+i}}$ nous dirons que cette fonction est *singulière d'ordre* $< h$ *au sens strict*. Cette définition n'est

[1] Cette dernière hypothèse est peut être une conséquence nécessaire des précédentes, au moins de certaines hypothèses moins restrictives en apparence. Mais il serait plus long de résoudre cette question que de vérifier directement, dans les applications que nous avons en vue, que cette hypothèse est bien réalisée

évidemment plus restrictive que la précédente que si $h < 0$. Si $h \geq 0$, les deux définitions sont identiques.

Une fonction $f(A, B)$ sera dite *singulière d'ordre* (h) ou *régulière d'ordre* $(-h)$, (au sens strict ou non), si, quelque petit que soit ε, elle est singulière d'ordre $\leq h+\varepsilon$, mais non d'ordre $\leq h-\varepsilon$.[1]

Si une fonction $f(A, B)$ est singulière d'ordre (h), une quelconque de ses dérivées d'ordre i est singulière d'ordre $(h+i)$ au plus. Nous allons même établir qu'elle est d'ordre $(h+i)$ exactement. Il suffit d'établir ce résultat pour $i=1$ et pour la dérivée $\frac{\partial f(A, B)}{\partial x}$. Pour cela nous supposerons cette dérivée d'ordre $(k+1)$ et nous établirons que $k=h$.

Considérons à cet effet une circonférence γ de centre B et de rayon fini indépendant de B. Par le point A, supposé voisin de B, menons une parallèle à l'axe des x, qui coupe γ en deux points; soit A_1 celui de ces deux points qui est le plus voisin de A. En désignant par D un symbole de dérivation quelconque, d'ordre j, on a

$$D f(A, B) = D f(A_1, B) + \int_{A_1 A} D \frac{\partial f(A, B)}{\partial x} dx.$$

Or $D f(A_1, B)$ est fini sur tout le cercle γ. Par hypothèse, $D \frac{\partial f(A, B)}{\partial x}$ est fini si $k+j+1 < 0$, et dans le cas contraire, devient infinie moins vite que $\frac{1}{r^{k+j+1+\varepsilon}}$, quelque petit que soit ε. On déduit alors de la formule précédente, par un calcul facile, que $D f(A, B)$ est fini si $k+j < 0$, et dans le cas contraire devient infini moins vite que $\frac{1}{r^{k+j+\varepsilon}}$, quelque petit que soit ε. Donc $f(A, B)$ est une fonction singulière d'ordre (k), et on a bien $k=h$.

Considérons maintenant une fonction $f(A, B)$, régulière d'ordre (h), c'est-à-dire singulière d'ordre $(-h)$, h étant positif. Soit i le plus grand entier inférieur

[1] On pourrait introduire une notion plus précise, en appelant *fonction singulière d'ordre h* une fonction singulière d'ordre $\leq h$ dont au moins une dérivée d'indice assez élevé i devienne effectivement infinie comme $\frac{1}{r^{h+i}}$. Mais, pour tirer de cette notion un parti utile, il faudrait modifier un peu nos premières définitions. Ainsi, dans la définition des fonctions singulières au sens strict, il faudrait remplacer $\frac{K}{r^{h+i}}$, dans le cas où $h+i \leq 0$, par $\frac{K}{r^{h+i}} \log \frac{1}{r}$. Comme dans la suite de ce chapitre, la notion de fonction singulière d'ordre (h) nous suffira, il est inutile d'introduire des termes logarithmiques dans nos définitions. Dans le chapitre III, nous donnerons dans le même ordre d'idées des définitions un peu différentes.

à h ($h > i \geq h - 1$). La fonction $f(A, B)$ et ses dérivées d'ordre $\leq i$ par rapport à x et y sont finies. On peut donc trouver un polynôme $P(A, B)$ d'ordre i en x et y, à coefficients fonctions de B, et tel que la différence

$$f_1(A, B) = f(A, B) - P(A, B)$$

s'annule quand A est en B ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre i par rapport à x et y. Or toutes les dérivées d'ordre $i+1$ de $f_1(A, B)$ par rapport à x et y. qui sont les mêmes que celles de $f(A, B)$ sont inférieures en module à $\frac{K}{r^{i+1-h+\varepsilon}}$, quelque petit que soit ε. Les dériviées d'ordre i de $f_1(A, B)$ peuvent alors être obtenues en intégrant les précédentes le long de la droite BA, et on trouve qu'elles sont inférieures en module à $r^{h-i-\varepsilon}$, quelque petit que soit ε. On limite de même successivement les dérivées d'ordres $i-1$, $i-2, \ldots, 1$ de $f_1(A, B)$ et cette fonction elle-même, et on constate ainsi qu'elle est régulière d'ordre (h), au sens strict. Nous avons donc établi le résultat suivant:

Toute fonction régulière d'ordre (h) est la somme d'une fonction régulière d'ordre (h) au sens strict, et d'un polynôme en x et y de degré inférieur à h dont les coefficients sont des fonctions finies et continues de B.

On peut évidemment dans cet énoncé échanger les rôles des points A et B.

§ 14. Dans la théorie des équations intégrales, on appelle *composition* l'opération qui consiste, étant données deux fonctions $f(A, B)$ et $\varphi(A, B)$, à former la fonction

$$F(A, B) = \iint_S f(A, M)\,\varphi(M, B)\,dS. \tag{2}$$

Les fonctions singulières que nous considérons sont par définition telles qu'en les composant avec une fonction holomorphe dépendant d'un seul des points A et B, on obtienne toujours une fonction holomorphe. Bien entendu ces fonctions doivent être singulières d'ordre inférieur à 2 pour que l'opération de composition ait un sens.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant, relatif à la composition des fonctions qui sont toutes les deux singulières.

Si les fonctions $f(A, B)$ et $\varphi(A, B)$ sont singulières d'ordres respectifs (h) et (k) inférieurs à 2, la fonction

$$F(A, B) = \iint_S f(A, M)\,\varphi(M, B)\,dS$$

est singulière d'ordre ($h + k - 2$) au plus.

Vérifions d'abord que les intégrales analogues aux intégrales (1) formées avec $F(A,B)$ sont holomorphes, si $\omega(A)$ est holomorphe. Considérons l'une d'elles, par exemple

$$(3) \qquad \Omega(A) = \iint_S F(A,M)\,\omega(M)\,dS.$$

En posant

$$\omega_1(A) = \iint_S \varphi(A,M)\,\omega(M)\,dS,$$

elle s'écrit

$$\Omega(A) = \iint_S f(A,M)\,\omega_1(M)\,dS.$$

Puisque par hypothèse les intègrales du type (1) formées avec $f(A,B)$ et $\varphi(A,B)$ sont holomorphes, la fonction $\omega_1(A)$ et par suite la fonction $\Omega(A)$ sont holomorphes.

Il faut maintenant établir l'existence des dérivées de $F(A,B)$ et trouver des limites supérieures de leurs modules. Etudions dans ce but une des dérivées, que nous représenterons par

$$(4) \qquad D\mathfrak{D}F(A,B),$$

D étant un symbole de dérivation d'ordre i par rapport à x et y, coordonnées de A, et $\mathfrak{D}$ un symbole de dérivation d'ordre j par rapport à x' et y', coordonnées de B. La limite supérieure que nous cherchons doit être finie si $h+k+i+j-2<0$, et dans le cas contraire de la forme $\frac{K}{r^{h+k+i+j-2+\varepsilon}}$, ε étant aussi petit qu'on veut. Plusieurs cas sont à distinguer suivant les valeurs de i et j.

Premier cas. $h+i<2$, $k+j<2$.

On peut écrire dans ce cas

$$(4') \qquad D\mathfrak{D}F(A,B) = \iint_S Df(A,M)\,\mathfrak{D}\varphi(M,B)\,dS,$$

la dérivation étant légitime, puisque l'intégrale obtenue est absolument et uniformément convergente. La fonction $Df(A,M)$ admet en module une limite supérieure de la forme $\frac{K}{\varrho^{h+i+\varepsilon}}$, ε étant aussi petit qu'on veut, si $h+i\geq 0$, et est finie si $h+i<0$. De même $\mathfrak{D}\varphi(M,B)$ admet en module une limite supérieure de la forme $\frac{K}{\varrho'^{k+j+\varepsilon}}$, si $k+j\geq 0$, et est finie si $k+j<0$. Les lemmes I et II nous

montrent alors que l'expression (4'), dans le cas où $h+k+i+j-2 \geq 0$ (ce qui n'est possible que si $h+i>0$, $k+j>0$), est inférieure en module à $\frac{K}{r^{h+k+i+j-2+\varepsilon}}$, ε étant aussi petit qu'on veut et K convenablement choisi. Dans le cas contraire elle est finie. C'est bien la limitation que nous voulions obtenir.

Deuxième cas. $h+i \geq 2$, $k+j<2$.

La dérivée étudiée (4) peut dans ce cas s'écrire

$$(4'') \qquad D\mathfrak{D}F(A,B)=D\iint\limits_S f(A,M)\,\varphi_1(M,B)\,dS,$$

la fonction $\varphi_1(A,B)=\mathfrak{D}\varphi(A,B)$ étant singulière d'ordre $(k+j)$.

Montrons d'abord que nous pouvons supposer cette fonction singulière d'ordre $(k+j)$ au sens strict, si $k+j<0$. En effet le cas général se ramène à ce cas en ajoutant à $\varphi_1(M,B)$ des termes de la forme

$$\psi(B)\,\xi^\alpha\,\eta^\beta,$$

les fonctions ψ(B) étant finies. Cela revient à ajouter à l'expression (4'') des termes de la forme

$$\psi(B)\,D\iint\limits_S f(A,M)\,\xi^\alpha\,\eta^\beta\,dS,$$

qui sont finis, puisque la fonction sur laquelle on effectue l'opération D est holomorphe comme étant de la forme (1). Nous voyons donc bien que pour trouver une limite supérieure de l'expression (4''), il suffit de la trouver dans le cas où $\varphi_1(A,B)$ est une fonction singulière d'ordre $(k+j)$ au sens strict.

Décomposons maintenant le champ d'intégration S en deux champs, $\Sigma_2+\Sigma'$ et Σ_1. Bien entendu, bien que la définition de ces champs (§ 12) montre qu'ils dépendent de A, nous pouvons les considérer comme fixes lorsque nous effectuons la dérivation D.

L'expression (4'') se présente alors comme la somme de deux termes. Le premier terme

$$\iint\limits_{\Sigma_2+\Sigma'} Df(A,M)\,\mathfrak{D}\varphi(M,B)\,dS$$

est inférieur en module à

$$\iint\limits_{\Sigma_2+\Sigma'} \frac{k}{\rho^{h+i+\varepsilon}\,\rho'^{\,k+j+\varepsilon}}\,dS,$$

et les lemmes I et II nous en donnent une limite supérieure qui est bien de la forme voulue.

Il reste à étudier le terme

$$(5) \qquad D\iint\limits_{\Sigma_1} f(A,M)\,\varphi_1(M,B)\,dS.$$

Posons $i = i_1 + i_2$, i_1 étant le nombre entier tel que $1 \leq h + i_1 < 2$. Remplaçons $\varphi_1(M,B)$ par son développement en série de TAYLOR limité aux termes de degré i_2 autour d'un point A_0, de coordonnées x_0 et y_0. Nous supposerons que A_0 coïncide avec A, mais nous écrirons tout de même A_0, pour indiquer qu'en effectuant la dérivaton D on n'a pas à tenir compte des termes qui contiennent A_0.

Nous avons donc de nouveau deux sortes de termes à distinguer, les premiers termes de ce développement, et le reste. Considérons d'abord les premiers termes, de la forme

$$(6) \qquad X(A_0,B)(\xi - x_0)^{\alpha}(\eta - y_0)^{\beta}, \quad (\alpha + \beta \leq i_2 - 1),$$

$X(A_0,B)$ étant une fonction singulière d'ordre $(k + j + \alpha + \beta)$ au sens strict. Les termes correspondant de (5) peuvent s'écrire

$$(7) \qquad X(A_0,B)\,D\iint\limits_{S} f(A,M)(\xi - x_0)^{\alpha}(\eta - y_0)^{\beta}\,dS$$
$$- X(A_0,B)\iint\limits_{\Sigma_2+\Sigma} Df(A,M)(\xi - x_0)^{\alpha}(\eta - y_0)^{\beta}\,dS.$$

L'intégrale prise dans le champ S, étant de la forme (1), a ses dérivées finies. Le produit de sa dérivée par $X(A_0,B)$ est donc infini au plus comme une fonction singulière d'ordre $(k + j + \alpha + \beta)$, et si on observe que

$$k + j + \alpha + \beta \leq k + j + i_2 - 1 + h + i_1 - 1 = h + k + i + j - 2,$$

on voit qu'on a bien pour ce terme la limitation voulue. Dans l'autre intégrale de la formule (7), la fonction intégrée a son module inférieur à $\frac{K}{\rho^{h+i-\alpha-\beta-\varepsilon}}$. L'intégrale, en vertu des lemmes I et II, et de ce que $h + i - \alpha - \beta \geq 2$ est donc infinie au plus comme $\frac{K}{r^{h+i-\alpha-\beta-2+\varepsilon}}$. Son produit par $X(A_0,B)$ est donc infini au plus comme une foncton d'ordre $(h + k + i + j - 2)$. Nous avons donc pour tous les termes de l'expression (7) la limitation voulue.

Considérons maintenant le reste de la série de TAYLOR. Il est la somme de $i_2 + 1$ termes de la forme

$$X(M, A_0, B)(\xi - x_0)^{\alpha}(\eta - y_0)^{\beta}, \quad (\alpha + \beta = i_2),$$

la fonction $X(M, A_0, B)$ étant inférieure au module maximum des dérivées d'ordre i_2 de $\varphi_1(M, B)$ quand M décrit la région Σ_1, c'est-à-dire ayant une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^{k+j+i_2+\varepsilon}}$, ε étant aussi petit qu'on veut. Les termes correspondant de (5) s'écrivent

$$\iint_{\Sigma_1} X(M, A_0, B)\, Df(A, M)(\xi - x_0)^{\alpha}(\eta - y_0)^{\beta}\, dS,$$

cette intégrale ayant bien un sens, puisque la fonction intégrée est infinie en A d'ordre ($h + i - \alpha - \beta = h + i_1 < 2$). Le lemme II nous donne alors de cette intégrale une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^{h+k+i+j-2+\varepsilon}}$. Nous avons donc finalement obtenu la limite supérieure cherchée pour tous les termes qui constituent l'expression (4'').

Troisième cas. $h + i < 2$, $k + j \geq 2$.

Ce cas se traite évidemment comme le précédent, en échangeant les rôles des points A et B.

Quatrième cas. $h + i \geq 2$, $k + j \geq 2$.

Ce cas se traite aisément par les mêmes procédés que le second. On décompose le champ S en trois champs Σ', Σ_1 et Σ_2. Pour l'intégrale relative au champ Σ', le lemme I nous donne sans difficulté la limitation cherchée. Les deux autres intégrales se déduisant l'une de l'autre par l'échange des points A et B, il suffit d'étudier l'une d'elles, par exemple celle qui est étendue au champ Σ_1. Le procédé employé pour l'étude du deuxième cas s'applique dans ce but sans modification, car il ne tenait aucun compte de l'hypothèse $k + j < 2$.

Ayant obtenu dans tous les cas la limite supérieure cherchée, nous avons démontré le théorème énoncé.

§ 15. Les resultats précédents se prêtent à quelques généralisations. On peut observer que, pour limiter supérieurement une dérivée de $F(A, B)$ d'ordre $n = i + j$ nous n'avons introduit à aucun moment dans les calculs des dérivées de $f(A, B)$ et de $\varphi(A, B)$ d'ordre supérieur à n. Donc:

Si les fonctions $f(A, B)$ et $\varphi(A, B)$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n admettent en module les limitations indiquées pour des fonctions singulières d'ordres respectifs

(h) et (k) inférieurs à 2 et leurs dérivées, si de plus ces fonctions vérifient la condition auxiliaire relative aux intégrales du type (1), *la fonction*

$$F(A,B)=\iint\limits_S f(A,M)\varphi(M,B)\,dS$$

et ses dérivées jusqu'à l'ordre n admettent en module les limitations indiquées pour une fonction singulière d'ordre $(h+k-2)$, et de plus cette fonction vérifie la condition auxiliaire relative aux intégrales du type (1).

Il n'est pas même nécessaire de supposer *l'existence* des dérivées d'ordre $n+1$ de $f(A,B)$ et $\varphi(A,B)$.

On peut observer encore, d'après les raisonnements du § 14, que si l'on veut une limitation des dérivées d'ordre n de $F(A,B)$ par rapport aux coordonnées de A seulement, il suffit de connaître les limitations des dérivées de $f(A,B)$ et $\varphi(A,B)$ jusqu'à l'ordre n et par rapport aux coordonnées de A seulement.

On peut aussi remplacer les hypothèses relatives aux intégrales (1) par des hypothèses moins restrictives, et cela de deux manières différentes.

D'une part, si on veut étudier les dérivées de $F(A,B)$ par rapport aux coordonnées de A seulement, il suffit de faire des hypothèses sur la première de ces intégrales,

$$\iint\limits_S f(A,M)\,\omega(M)\,dS,$$

qui dans ce cas intervient seule dans les raisonnements du § 14. D'autre part, l'hypothèse relative à ces intégrales peut, si l'on veut étudier seulement les dérivées de $F(A,B)$ jusqu'à l'ordre n, être remplacée par l'hypothèse moins restrictive que ces intégrales admettent des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre n. Il suffit même de supposer qu'il en est ainsi lorsque $\omega(A)$ est un polynôme de degré $n-1$.

Cela suffit pour qu'il en soit de même lorsque $\omega(A)$ est une fonction finie et continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n, et même lorsque c'est une fonction finie et continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, et que ses dérivées d'ordre $n-1$ sont *uniformément continues à la* Lipschitz, avec un exposant $\alpha>h-1$. [Nous disons qu'une fonction $\Omega(A)$ est uniformément continue à la Lipschitz avec un exposant α lorsqu'on a

$$|\Omega(B)-\Omega(A)|<Kr^{\alpha},\quad (0<\alpha\leq 1),$$

K étant indépendant de A et B.] Si, en effet, $\omega(A)$ vérifie ces conditions, $\omega(M)$ peut être regardée comme la somme d'un polynôme en ξ, η de degré $n-1$ et d'une fonction admettant une limite supérieure de la forme $K\varrho^{n-1+a}$. Chaque intégrale (1) est alors la somme de deux termes: pour le premier, les dérivées d'ordre n existent par hypothèse: pour le second on peut les former par la règle de LEIBNIZ. D'ailleurs ces dérivées sont bien des fonctions continues.

§ 16. Nous pouvons maintenant appliquer les résultats précédents aux équations intégrales. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Soit $\varphi(A)$ une fonction ayant des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre n. Soit $f(A,B)$ une fonction admettant, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n par rapport aux coordonnées de A les limitations indiquées pour une fonction singulière d'ordre (h) inférieur à 2 et ses dérivées. On suppose de plus que l'intégrale

$$\iint_S f(A,M)\,\omega(M)\,dS \tag{8}$$

soit finie et continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n lorsque la fonction $\omega(M)$ est holomorphe. On suppose enfin que l'équation intégrale

$$\psi(A)+\iint_S f(A,M)\,\psi(M)\,dS=\varphi(A) \tag{9}$$

admette une solution et une seule. Cette solution admet des dérivées jusqu'à l'ordre n finies et continues.

On sait, en effet, que l'équation (9) peut être remplacée pour la détermination de la fonction inconnue $\psi(A)$ par une quelconque des équations

$$\psi(A)+\iint_S f_i(A,M)\,\psi(M)\,dS=\varphi_i(A) \qquad i=1,2,\ldots), \tag{10}$$

où

$$f_0(A,B)=f(A,B), \quad f_i(A,B)=-\iint_S f_{i-1}(A,M)\,f(M,B)\,dS,$$

$$\varphi_0(A)=\varphi(A), \quad \varphi_i(A)=\varphi_{i-1}(A)-\iint_S f(A,M)\,\varphi_{i-1}(M)\,dS.$$

D'après le théorème du § 15, les fonctions $f_i(A,B)$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n admettent les limitations indiquées pour les fonctions singulières d'ordre

$(h + ih - 2i)$. Donc pour i assez grand (si par exemple $h = 1$ pour $i = n + 2$) toutes ces dérivées seront finies. Mais alors d'après les formules de M. FREDHOLM, le noyau résolvant $F_i(A, B)$ de l'equation (10) admet aussi des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre n.

D'autre part, d'après les hypothèses relatives à l'intégrale (8) et d'après les remarques finales du § 15, les fonctions $\varphi_i(A)$ sont finies et continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre n. Il en est alors de même de la fonction $\psi(A)$, définie par la formule

$$\psi(A) = \varphi_i(A) + \iint_S F_i(A, M) \varphi_i(M) dS,$$

C. Q. F. D.

On verrait de même, d'après les remarques finales du § 15, que si les dérivées de $\varphi(A)$ sont finies et continues jusqu'à l'ordre $n - 1$ seulement, et si les dérivées d'ordre $n - 1$ sont uniformément continues à la LIPSCHITZ avec un exposant $\alpha > h - 1$, il en est de même pour les fonctions $\varphi_i(A)$ et par suite pour $\psi(A)$; la différence $\psi(A) - \varphi(A)$ a même des dérivées d'ordre n.

Il est aisé de généraliser le théorème précédent en remplaçant les intégrales doubles par des intégrales de surface; c'est sous cette forme que nous aurons à l'appliquer.

On peut encore généraliser tous les résultats de ce chapitre en remplaçant les intégrales doubles par des intégrales multiples d'ordre p (ou par des intégrales simples). La condition $h < 2$, qui a joué un rôle essentiel doit être alors remplacée par la condition $h < p$ (ou $h < 1$ dans le cas des intégrales simples).

§ 17. Voici enfin une extension dans un autre ordre d'idées. Si $\varphi(A)$ est holomorphe et si $f(A, B)$ est une fonction singulière d'ordre (h), $(h < 2)$ au sens du § 13, il résulte de ce qui précède que la fonction $\psi(A)$ définie par l'équation (9) a toutes ses dérivées finies et continues. Mais est-elle holomorphe?

Pour résoudre cette question, nous allons montrer que tous les résultats qui précèdent restent exacts lorsque les coordonnées des points A et B peuvent prendre des valeurs imaginaires. Il en résultera bien que $\psi(A)$, fonction de deux variables complexes dont les dérivées sont finies et continues est holomorphe.

Nous définirons un point imaginaire A par les intersections A_1 et A_2 des droites isotropes passant par ce point avec la partie réelle du plan. Il faut que A puisse décrire l'aire S et une portion voisine du plan imaginaire. Cela revient à dire qu'on peut prendre pour A_1 et A_2 tous les systèmes de deux points intéri-

eurs à S, tels du moins que la distance $A_1 A_2$ ne soit pas trop grande. Le point B sera défini de même par deux points réels B_1 et B_2. M sera bien entendu réel.

En appelant toujours r, ϱ, ϱ' les distances AB, MA, MB, on a

$$|r^2| = A_1 B_1 \times A_2 B_2, |\varrho^2| = MA_1 \times MA_2, |\varrho'^2| = MB_1 \times MB_2.$$

Il faut d'abord généraliser les lemmes I et II. L'intégrale considérée dans ces lemmes,

$$\iint \frac{dS}{\varrho^\alpha \varrho'^\beta},$$

est inférieure en module, d'après l'inégalité de SCHWARZ, à

$$\sqrt{\iint \frac{dS}{MA_1^\alpha \times MB_1^\beta} \iint \frac{dS}{MA_2^\alpha \times MB_2^\beta}}.$$

Considérons par exemple le cas où $\alpha < 2, \beta < 2, \alpha + \beta > 2$. Dans ce cas, les lemmes I et II, tels que nous les avons établis au point de vue réel, nous donnent pour l'expression précédente, l'intégration étant étendue à toute l'aire S, la limite supérieure

$$K \sqrt{\frac{1}{A_1 B_1^{\alpha+\beta-2} \times A_1 B_2^{\alpha+\beta-2}}} = \frac{K}{r^{\alpha+\beta-2}}.$$

On étudierait de même les autres cas. La seule complication mais qui n'introduit aucune difficulté réelle, est que la division de S en trois aires, Σ', Σ_1 et Σ_2, ne suffit plus, et qu'il faut diviser S en un plus grand nombre d'aires partielles. Mais dans chaque cas on aura sans peine la limitation dont on aura besoin.

Les raisonnements des § 14 à 16, malgré cette complication, restent applicables au cas actuel. Le résultat que nous avons en vue est donc établi lorsque les dérivées d'ordre i du noyau $f(A,B)$ admettent des limites supérieures de la forme $\frac{K}{r^{h+i}}$, et lorsque ce noyau vérifie la condition auxiliaire relative à l'intégrale (8).

Une remarque doit être faite au point de vue de l'application de ce résultat. Supposons qu'on veuille l'appliquer au cas où on remplace l'aire S par une aire qui ne soit pas plane. Pour transformer les intégrales de surface que l'on aura à considérer en intégrales doubles, il faut représenter l'aire S sur une aire plane (S). Les points A et B, dont la distance est r, sont ainsi représentés par des points (A) et (B), dont la distance est (r). Pour les points réels, r et (r) s'annulent en même temps et sont du même ordre de grandeur. Il n'en est plus de même au point de vue imaginaire. Il ne peut même en être de même pour aucune

représentation plane de S, car il n'existe pas en général de courbe tracée sur S telle que la distance de deux points quelconques de cette courbe soit nulle. Donc l'existence d'une limite supérieure de la forme $\frac{K}{r^\alpha}$ n'entraîne pas l'existence d'une limite supérieure de la forme $\frac{K}{(r)^\alpha}$. Nous ne pouvons pas appliquer le résultat précédent.

Mais nous pouvons le généraliser. En effet, comme nous l'avons fait pour le plan, nous pouvons définir un point imaginaire A de S par deux points réels A_1 et A_2 dont la distance à A soit nulle. Nous pouvons de même définir B par deux points réels B_1 et B_2. La formule

$$|r^2| = A_1 B_1 \times A_2 B_2$$

relative au plan n'est plus exacte, mais les deux membres restent du même ordre de grandeur, ce qui suffit pour que tous nos raisonnements s'appliquent.

On peut de même remplacer r^2 par une fonction de A et B qui soit le produit de deux facteurs holomorphes imaginaires conjugués s'annulant sans que leurs dérivées premières s'annulent quand A et B sont confondus; en d'autres termes on peut remplacer r^2 par une fonction holomorphe de A et B qui s'annule, ainsi que ses dérivées premières, sans que ses dérivées secondes s'annulent, quand A et B sont confondus, et qui soit réelle et positive quand A et B sont réels.

CHAPITRE II.

Théorèmes généraux sur les fonctions harmoniques.

§ 18. Le théorème de Bruns demontré dans la première partie s'étend sans difficulté au cas de l'espace. Le mémoire de M. E. Schmidt (cité en note, § 2) est d'ailleurs relatif au cas de l'espace. Au contraire l'extension des résultats de M. Hadamard exposés § 5 ne peut se faire qu'en utilisant les résultats du § 17, et en observant que la condition auxiliaire relative à l'intégrale (8) se trouve bien vérifiée, en vertu du théorème de Bruns, dans l'application qu'on a à faire de ces résultats. Grâce à ces résultats, ceux de M. Hadamard peuvent aussi s'étendre au cas d'équations aux dérivées partielles du type elliptique les plus générales.

J'établirai dans ce chapitre des résultats d'une nature un peu différente. Il s'agira simplement de limiter supérieurement les modules des dérivées, jusqu'à

un ordre fini, de fonctions harmoniques définies par certaines conditions aux limites.

La suite des idées sera la même que dans le chapitre I de la première partie. Je commencerai par établir des propriétés du potentiel. J'en déduirai les propriétés cherchées par l'emploi des équations intégrales et des théorèmes du chapitre précédent.

Considérons une surface fermée S ayant en chaque point un plan tangent déterminé, et telle que les coordonnées d'un point M de cette surface soient des fonctions de deux paramètres u et v, ayant toutes leurs dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre $p + 1$, p étant > 0. Appelons μ (M) ou simplement μ une fonction de u et v finie et continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p. Appelons r la distance AM.[1] Nous allons établir le théorème suivant:

Le potentiel

$$U = \iint_S \frac{\mu}{r} dS$$

(dS désignant l'élément d'aire décrit par M sur la surface S) *et ses dérivées jusqu'à l'ordre p, ont en valeur absolue des limites supérieures finies.*

Il suffit évidemment de démontrer ce théorème pour les points voisins de S; car il est évident pour les autres.

Considérons donc un point A voisin de S sur une normale PA à cette surface en un point P. Considérons un cylindre de révolution d'axe PA et de rayon R assez petit pour que toute parallèle à PA intérieur à ce cylindre coupe S en un point voisin de P et un seul; ce rayon R, pourvu qu'il soit assez petit, peut être supposé indépendant du point P de la surface.

Appelons Σ la partie de S voisine de P et intérieure à ce cylindre. Posons

$$V = \iint_\Sigma \frac{\mu}{r} dS.$$

Il est évident que $U - V$ et toutes ses dérivées admettent des limites supérieures indépendantes des points P et A. Il suffit donc de limiter supérieurement V et ses dérivées.

Prenons le point P comme origine d'un système de coordonnées rectangulaires, l'axe des z étant PA. Appelons ξ, η, ζ les coordonnées de M, z l'ordonnée de A. D'après les hypothèses faites sur S, ζ admet des dérivées par rapport à ξ et η,

[1] Les notations ne sont pas identiques à celles du chapitre précédent. Il n'était pas facile d'employer dans tout ce travail un système unique de notations.

finies et continues, jusqu'à l'ordre $p+1$. On peut donc déterminer un polynôme ζ_1 en ξ et η, de degré p, tel que l'on ait

$$|\zeta-\zeta_1|<K\varrho^{p+1},$$

en posant $\varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, et K étant un nombre convenablement déterminé, qu'on peut supposer indépendant de P, pourvu qu'il soit assez grand. De même on peut déterminer un polynôme μ_1 en ξ et η, de degré $p-1$, et tel que

$$|\mu-\mu_1|<K\varrho^p.$$

Appelons Σ_1 l'aire décrite par le point M_1 de coordonnées ξ, η, ζ_1, quand M décrit l'aire Σ, dS_1 l'élément de cette aire, et r_1 la distance AM_1. Posons

$$V_1=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mu_1}{r_1}dS_1.$$

D'après le théorème de Bruns, V_1 est holomorphe, dans le voisinage de AP, de chaque côté de P, et par suite toutes ses dérivées par rapport aux coordonnées de A sont finies. On peut donc leur assigner des limites supérieures, qui sont des fonctions continues des coefficients des polynômes ζ_1 et μ_1, tant que ces coefficients sont finis. Or ils ont des limites supérieures indépendantes du point P. On peut donc limiter supérieurement toutes les dérivées de V_1, et nous n'avons plus qu'à étudier la différence $V-V_1$.

Or cette différence peut s'écrire

$$(11)\qquad V-V_1=\iint\frac{\mu}{r}(f-f_1)\,d\xi\,d\eta+\iint\frac{\mu-\mu_1}{r}f_1\,d\xi\,d\eta+\iint\mu_1 f_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)d\xi\,d\eta,$$

en posant

$$f=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2},\qquad f_1=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\eta}\right)^2},$$

et les intégrales doubles étant étendues dans le champ

$$\xi^2+\eta^2<R^2.$$

Nous voulons limiter supérieurement les dérivées d'ordre $\leq p$ de l'expression (11). On n'a pas évidemment, en calculant une telle dérivée, à tenir compte de ce que le point P dépend de A. Donc on peut l'écrire, D désignant une opération de dérivation,

$$(12) \qquad D(V-V_1) = \iint \mu(f-f_1)\, D\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta + \iint (\mu-\mu_1) f_1\, D\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta + \\ + \iint \mu_1 f_1 \left(D\frac{1}{r} - D\frac{1}{r_1}\right) d\xi\, d\eta.$$

Il est facile d'obtenir des limitations de toutes les quantités qui interviennent dans cette formule. On a d'abord aisément, en vertu des hypothèses faites, et pourvu que R soit assez petit et K assez grand

$$|\mu| < K, \quad |\mu_1| < K, \quad |\mu - \mu_1| < K\varrho^p,$$

$$|f| < K, \quad |f_1| < K, \quad |f - f_1| < K\varrho^p,$$

$$\left|D\frac{1}{r}\right| < \frac{K}{r^{p+1}} \leq \frac{K}{\varrho^{p+1}}.$$

Il reste à limiter $D\frac{1}{r} - D\frac{1}{r_1}$. Posons

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} D\frac{1}{r} = \varphi(A, M);$$

on a, par le théorème de la moyenne,

$$D\frac{1}{r} - D\frac{1}{r_1} = (\zeta - \zeta_1)\, \varphi(A, M'),$$

M' étant compris entre M et M_1. r' désignant la distance AM', $\varphi(A, M')$ est une dérivée de $\frac{1}{r'}$ d'ordre $p+1$, de sorte que

$$|\varphi(A, M')| < \frac{K}{r'^{p+2}} \leq \frac{K}{\varrho^{p+2}},$$

et par suite

$$\left|D\frac{1}{r} - D\frac{1}{r_1}\right| < \frac{K}{\varrho}.$$

Nous avons donc ainsi une limitation pour chacune des quantités qui interviennent dans la formule (12). De ces limitati ns résulte que

$$|D(V-V_1)| < K \iint \frac{d\xi\, d\eta}{\varrho} = 2\pi K R.$$

Cette formule achève de démontrer le théorème énoncé.

§ 19. On peut généraliser de diverses manières le résultat précédent.

On peut d'abord restreindre les hypothèses faites. On peut remplacer l'hypothèse de l'existence des dérivées d'ordre $p+1$ de ζ et des dérivées d'ordre p de de μ par l'hypothèse moins restrictive que les dérivées d'ordre p de ζ et les dérivées d'ordre $p-1$ de μ sont uniformément continues à la LIPSCHITZ, (au sens indiqué § 15), avec un exposant quelconque positif et ≤ 1.

§ 20. On peut aussi remplacer le potentiel de simple couche par un potentiel de double couche. Mais les dérivées de ce potentiel ne seront certainement finies que jusqu'à l'ordre $p-1$. Cela tient à ce que $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ est une fonction singulière d'ordre (2), au sens du § 13, tandis que $\frac{1}{r}$ était une fonction singulière d'ordre (1); en d'autres termes, au lieu de

$$\left| D\frac{1}{r} \right| < \frac{K}{r^{p+1}},$$

on a seulement

$$\left| D\frac{d}{dn}\frac{1}{r} \right| < \frac{K}{r^{p+2}}.$$

Si le point attiré A est en un point α de la surface S, le potentiel de double couche W a une valeur W_s, tandis que les limites de W quand A tend vers α d'un côté ou de l'autre de S sont des quantités W_e et W_i différentes de W_s, les différences étant $\pm 2\pi\mu(\alpha)$. W_s est une intégrale où la fonction intégrée est singulière d'ordre (1) seulement. Il en résulte que, les hypothèses du § 18 étant vérifiées, W_s admet des dérivées finies jusqu'à l'ordre p. C'est aussi une conséquence des théorèmes des §§ 14 et 15. Il en résulte qu'il en est de même de W_e et W_i, puisque μ (α) a des dérivées d'ordre n finies et que W_e et W_i ont les valeurs $W_s \pm 2\pi\mu(\alpha)$.

Si on remplace les hypothèses du § 18 par les hypothèses moins restrictives du § 19, W_s a bien encore des dérivées d'ordre n finies et continues, tandis que W_e et W_i n'en ont évidemment plus.

Des remarques analogues s'appliquent aux dérivées normales du potentiel de simple couche.

Il est évident que les résultats précédents peuvent s'étendre au cas où on remplace $\frac{1}{r}$ par la solution fondamentale d'une équation aux dérivées partielles quelconque du type elliptique. En effet, le théorème de BRUNS reste applicable, et la solution fondamentale considérée est bien encore singulière d'ordre (1).

Ces résultats sont également vrais dans le cas du plan, les solutions fondamentales considérées étant alors des fonctions singulières d'ordre (0).

Ils se généralisent aisément dans le cas où les hypothèses des §§ 18 et 19 sont vérifiées sur une partie seulement de la surface S.

Enfin, on peut supposer que μ dépende d'un paramètre λ. Les dérivées considérées peuvent alors être prises par rapport à λ, et les ordres qui figurent dans les différents énoncés indiquent dans ce cas le nombre total des dérivations effectuées par rapport à λ et les autres variables.

§ 21. Considérons maintenant une fonction harmonique $f(A)$, définie par les valeurs $f(M)$ qu'elle prend sur la surface S. Nous allons établir le théorème suivant:

Si on connaît une limite supérieure des valeurs absolues de $f(M)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre p, on peut en déduire à l'intérieur de S une limite supérieure des modules de $f(A)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $p - 1$.

Si nous formons $f(A)$ par la méthode de M. Fredholm, il suffit d'après le théorème du § 18, d'établir que la densité $\mu(M)$ du potentiel de double couche qui représente $f(A)$ a des dérivées finies jusqu'à l'ordre p.

Or, cette densité est définie par l'équation

$$2\pi\mu(\alpha) + \iint_S \mu(M) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS = f(\alpha),$$

r désignant la distance αM, et la dérivée $\frac{d}{dn}$ étant relative au point M.

Le résultat cherché nous sera alors donné par le théorème du § 16, pourvu que nous démontrions que la fonction $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ vérifie bien les conditions imposées à $f(A, B)$ dans l'énoncé de ce théorème.

Ces conditions sont de deux sortes. Il y a d'abord les conditions relatives à l'ordre de grandeur de $f(A, B)$ et de ses dérivées par rapport aux coordonnées de A. Si la surface S est analytique, les dérivées de tous les ordres de $\frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \frac{P}{r^3}$, P étant la distance de α au plan tangent en M, vérifient ces conditions. Si les coordonnées de α ont seulement des dérivées finies jusqu'à l'ordre p, les dérivées

de $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ jusqu'à l'ordre p vérifient bien encore ces conditions. Les hypothèses du § 19 sont donc suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Il faut enfin vérifier que la fonction $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ vérifie l'hypothèse auxiliaire relative à l'intégrale (8) c'est-à-dire que l'intégrale

$$\iint_S \frac{d\frac{1}{r}}{dn} u(M)\,dS$$

a des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre p, le point attiré étant sur S; il en est bien ainsi, cette intégrale n'étant autre que le potentiel W_s considéré § 20.

Le théorème énoncé est donc démontré.

§ 22. Terminons ce chapitre par la généralisation du résultat précédent.

On peut remplacer l'hypothèse faite sur $f(M)$ par l'hypothèse moins restrictive que cette fonction admette des dérivées d'ordre $p-1$, uniformément continues à la LIPSCHITZ avec un exposant ≤ 1.

On peut remplacer l'hypothèse relative à $f(M)$ par l'hypothèse analogue relative à $\frac{df(M)}{dn}$ (c'est-à-dire remplacer le problème de DIRICHLET par celui de NEUMANN). La méthode s'applique. Au lieu du potentiel de double couche, nous devons introduire un potentiel de simple couche. Donc $f(A)$ a ses dérivées finies jusqu'à l'ordre p.

Nos résultats s'étendent au cas d'une équation aux dérivées partielles quelconque du type elliptique, car le principe de la méthode de M. FREDHOLM reste le même, le caractère analytique du noyau reste le même également, enfin les résultats du § 20 subsistent.

Nos résultats s'étendent aussi au cas du plan.

Enfin on peut supposer que $f(A)$ dépend d'un paramètre λ. Si on connaît une limite supérieure des dérivées de $f(M)$ jusqu'à l'ordre total p par rapport à λ et aux variables dont dépend M, on peut en déduire une limite supérieure des dérivées de $f(A)$ jusqu'à l'ordre total $p-1$ par rapport à λ et aux coordonnées de A.

CHAPITRE III.

Sur une famille de fonctions harmoniques.

§ 22. Nous allons étudier dans ce chapitre une famille de fonctions harmoniques, à l'aide desquelles nous obtiendrons ensuite aisément la solution du problème B de l'introduction.

La fonction $\frac{1}{r}$, r désignant la distance du point x, y, z à l'origine, est harmonique. En l'intégrant par rapport à z, on obtient successivement les fonctions également harmoniques

$$u_0 = \log \frac{r+z}{a},$$

$$u_1 = z \log \frac{r+z}{a} - r,$$

$$u_2 = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{\varrho^2}{4}\right) \log \frac{r+z}{a} - \frac{3}{4} rz + \frac{1}{4}\varrho^2,$$

$$u_3 = \left(\frac{z^3}{6} - \frac{\varrho^2 z}{4}\right) \log \frac{r+z}{a} - \left(\frac{11}{36} z^2 - \frac{\varrho^2}{9}\right) r + \frac{1}{4}\varrho^2 z,$$

en posant

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = r^2 - z^2,$$

et a étant une constante arbitraire introduite pour rendre les formules homogènes, mais qu'on peut supposer égale à 1.

Nous allons montrer qu'en continuant ainsi, on obtient une infinité de fonctions harmoniques, dont la forme générale est

$$u_p = f_p(\varrho, z) \log \frac{r+z}{a} + r g_{p-1}(\varrho, z) + h_p(\varrho, z), \tag{13}$$

en désignant par f_p, g_{p-1}, h_p des polynômes homogènes en ϱ et z de degrés égaux à leurs indices respectifs, et où ne figurent que des puissances paires de ϱ.[1]

[1] On peut observer que la partie algébrique de u_p est un polynôme homogène en z et r. C'est sous cette forme que j'avais défini u_p dans ma note citée des Comptes Rendus. Il est préférable, pour une étude plus détaillée, de séparer les termes rationnels et les autres, et de mettre en évidence ρ^2 au lieu de r^2. Il nous arrivera, pour simplifier l'écriture, de ne pas écrire les arguments des fonctions f_p, g_p, h_p, lorsque ces arguments seront ρ et z.

Supposons obtenue la fonction u_{p-1}; nous allons former u_p. Deux cas sont à distinguer suivant la parité de p.

Premier cas: p pair. Posons

$$f_p(\varrho, z) = A_0 z^p + A_2 \varrho^2 z^{p-2} + \cdots + A_p \varrho^p,$$

$$g_{p-1}(\varrho, z) = B_0 z^{p-1} + B_2 \varrho^2 z^{p-3} + \cdots + B_{p-2} \varrho^{p-2} z,$$

$$h_p(\varrho, z) = C_0 z^p + C_2 \varrho^2 z^{p-2} + \cdots + C_p \varrho^p.$$

En identifiant $\frac{\partial u_p}{\partial z}$ et

(14) $$u_{p-1} = f_{p-1}(\varrho, z) \log \frac{r+z}{a} + r g_{p-2}(\varrho, z) + h_{p-1}(\varrho, z),$$

on voit d'abord, en égalant les termes non algébriques, que

(15) $$f_{p-1}(\varrho, z) = \frac{\partial f_p(\varrho, z)}{\partial z},$$

ce qui détermine A_0, $A_2, \ldots,$ A_{p-2} mais pas A_p. Il vient alors

$$\frac{\partial u_p}{\partial z} = f_{p-1} \log \frac{r+z}{a} + \frac{1}{r}\left[f_p + z g_{p-1} + (\varrho^2 + z^2) \frac{\partial g_{p-1}}{\partial z}\right] + \frac{\partial h_p}{\partial z}.$$

Il reste à identifier les termes algébriques de cette expression et ceux de l'expression (14). Identifions d'abord les termes qui ne sont pas rationnels en z, qui sont le produit de $\frac{1}{r}$ par un polynôme, il vient

(16) $$(\varrho^2 + z^2) g_{p-2} = f_p + z g_{p-1} + (\varrho^2 + z^2) \frac{\partial g_{p-1}}{\partial z},$$

et en égalant les coefficients des termes correspondants des deux membres, en commençant par ceux du plus haut degré en z, on obtient successivement B_0, $B_2, \ldots, B_{p-2}$ et A_p. Pour achever l'identification, il reste à écrire que

(17) $$h_{p-1} = \frac{\partial h_p}{\partial z}.$$

ce qui détermine C_0, $C_2, \ldots, C_{p-2}$. Le coefficient C_p reste indéterminé.

Il reste à écrire que u_p est une fonction harmonique. Or nous pouvons déjà affirmer que

$$\frac{\partial \Delta u_p}{\partial z} = \Delta u_{p-1} = 0,$$

c'est-à-dire que Δu_p est indépendant de z. Or on a

$$\Delta u_p = \log \frac{r+z}{a} \Delta f_p + \varphi_{p-2}, \tag{18}$$

Δf_p et φ_{p-2} étant algébriques, homogènes, de degré $p-2$. Il en résulte que

$$\Delta f_p = 0$$

et que φ_{p-2} ne dépend pas de z. Pour le calculer nous pouvons faire $z = 0$, donc $r = \varrho$, et φ_{p-2} étant homogène et ne contenant pas a est de la forme

$$\Delta u_p = \varphi_{p-2} = K \varrho^{p-2},$$

K étant une constante.

Or K contient le coefficient indéterminé C_p. Il en résulte que la formule précédente est de la forme

$$\Delta u_p = (K' + p^2 C_p) \varrho^{p-2},$$

K' étant bien déterminé. Nous pouvons donc, p étant > 0, déterminer C_p de manière à annuler Δu_p.

Deuxième cas: p impair. Posons

$$f_p(\varrho, z) = A_0 z^p + A_2 \varrho^2 z^{p-2} + \cdots + A_{p-1} \varrho^{p-1} z,$$

$$g_{p-1}(\varrho, z) = B_0 z^{p-1} + B_2 \varrho^2 z^{p-3} + \cdots + B_{p-1} \varrho^{p-1},$$

$$h_p(\varrho, z) = C_0 z^p + C_2 \varrho^2 z^{p-2} + \cdots + C_{p-1} \varrho^{p-1} z.$$

Le calcul est analogue au précédent. Toutes les formules où les coefficients A, B, C n'interviennent pas *explicitement* restent exactes. La formule (15) détermine cette fois tous les coefficients A. La formule (16) détermine tous les coefficients B. La formule (17) détermine tous les coefficients C. Il n'y a donc cette fois aucun coefficient indéterminé lorsqu'on a écrit que u_p a pour dérivée u_{p-1}.

Il faut établir que u_p est harmonique. Comme dans le cas précédent, Δu_p ne dépend pas de z. La formule (18) montre alors que f_p est harmonique, et que φ_{p-2} est de la forme $K \varrho^{p-2}$; cette fois K est bien déterminé. Nous avons donc, quel qui soit z,

$$\Delta u_p = K \varrho^{p-2}.$$

Mais u_p ne contenant pas d'autre radical que r, il est impossible que Δu_p contienne le radical ϱ à une puissance impaire. (Pour préciser ce raisonnement, nous n'avons qu'à remarquer que u_p est holomorphe pour $r = 0$, $z > 0$, et que ϱ^{p-2} n'est pas holomorphe dans ces conditions.) La formule précédente montre donc que $K = 0$, et par suite u_p est harmonique.

Nous avons donc établi pour toutes les valeurs entières ≥ 0 *de* p *l'existence de fonctions harmoniques de la forme* (13). *Ces fonctions sont telles que*

$$(19) \qquad \frac{\partial u_p}{\partial z} = u_{p-1}.$$

Les polynômes f_p *sont aussi des fonctions harmoniques.*

Il faut observer que u_p n'est bien déterminé que si l'on tient compte de la formule (19). La condition $\Delta u_p = 0$ ne détermine en effet une fonction hormonique de la forme (13) qu'à un facteur constant près et à un multiple près de f_p.

§ 24. Il est nécessaire pour la suite d'étudier particulièrement l'allure de ces fonctions pour $z = 0$. Elles se réduisent, si p est pair, à

$$(20) \qquad u_p(x, y, 0) = A\varrho^p \log\frac{\varrho}{a} + C\varrho^p,$$

et si p est impair, à

$$(21) \qquad u_p(x, y, 0) = B\varrho^p$$

(en supprimant les indices des symboles A_p, B_{p-1} et C_p).

Je dis que *si* p *est pair*, A *n'est pas nul, et si* p *est impair*, B *n'est pas nul.*

Cette propriété étant vérifiée pour u_0 et u_1 dont les valeurs ont été écrites plus haut, nous pouvons la supposer vraie pour u_{p-2}, de sorte que, si p est pair,

$$u_{p-2}(x, y, 0) = \alpha\varrho^{p-2}\log\frac{\varrho}{a} + \gamma\varrho^{p-2}, \qquad (\alpha \neq 0),$$

et si p est impair,

$$u_{p-2}(x, y, 0) = \beta\varrho^{p-2}, \qquad (\beta \neq 0)$$

La formule

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u_p}{\partial z^2} = -u_{p-2}$$

donne, quand on annule z,

$$p^2 A = -\alpha,$$

si p est pair et

$$p^2 B = -\beta$$

si p est impair. Ces formules établissent le résultat énoncé.

§ 25. Pour les fonctions u_p, l'origine n'est pas un point singulier isolé, puisque, pour $r+z=0$, c'est-à-dire pour la partie négative de l'axe des z, ces fonctions sont singulières. Mais si nous considérons une surface fermée Σ, passant à l'origine et n'ayant aucun point commun avec la partie négative de l'axe des z, l'origine est le seul point singulier à l'intérieur de Σ ou sur cette surface.

De plus, si l'axe des z n'est pas tangent à l'origine à la surface Σ, ce que nous supposerons, on a, à l'intérieur de Σ,

$$r + z > kr, \tag{22}$$

k étant un nombre positif suffisamment petit, mais bien déterminé. Il en résulte qu'à l'intérieur de Σ, la fonction u_p et ses dérivées admettent en valeur absolue les limitations suivantes, analogues à celles des fonctions régulières d'ordre (p) au sens strict considérées § 13:

1° La fonction u_p admet en valeur absolue une limite supérieure de la forme $Kr^p \log\frac{1}{r}$, K étant un nombre convenablement déterminé.

2° Quel que soit l'entier positif i, les dérivées d'ordre i de u_p admettent en valeur absolue une limite supérieure de la forme $Kr^{p-i}\log\frac{1}{r}$, si $i \leq p$, et de la forme $\frac{K}{r^{i-p}}$ si $i > p$.

On s'en assure en observant que le coefficient de $\log\frac{r+z}{a}$ dans u_p étant un polynôme d'ordre p, la partie non algébrique ne subsiste que dans les dérivées d'ordre $\leq p$. Cette partie non algébrique étant le produit de $\log\frac{r+z}{a}$ par un polynôme *homogène* de degré $p-i$ en x, y et z, admet, à cause de l'inégalité (22), la limitation indiquée. La partie algébrique qui est rationnelle et homogène de degré $p-i$ en x, y et r et qui n'admet au dénominateur que les facteurs r et $r+z$ admet aussi, quel que soit i, la limitation indiquée.

Modifiant un peu les définitions du § 13 nous dirons qu'une fonction qui

admet à l'intérieur de Σ, ainsi que ses dérivées, les limites supérieures indiquées pour u_p, est régulière d'ordre p, au sens strict (ou singulière d'ordre $-p$).[1]

Si ces limitations sont valables, dans le cas où les limites supérieures indiquées sont infinies, et si celles des limites supérieures indiquées qui sont infiniment petites peuvent être remplacées par des quantités finies, la fonction considérée sera dite régulière d'ordre p, au sens large.

Nous appliquerons aussi ces définitions à des fonctions d'un point de la surface Σ, c'est-à-dire de deux variables seulement.

Une dérivée d'ordre i d'une fonction régulière d'ordre p est une fonction régulière d'ordre $p-i$.

Toutes les dérivées des fonctions u_p sont des fonctions régulières, au sens strict, d'un ordre (positif, nul ou négatif) égal à leur degré d'homogénéité.

§ 26. *Théorème. Etant donnés deux entiers positifs ou nuls α et α' et un entier β positif, nul ou négatif, et tel que le nombre $n=\alpha+\alpha'+\beta$ soit ≥ -1, on peut, par une combinaison de fonctions u_p en nombre fini et de leurs dérivées, former une fonction harmonique, régulière d'ordre n au sens strict, et se réduisant à $x^\alpha y^{\alpha'} \varrho^\beta$ pour $z=0$.*

En posant $x+iy=\xi$, $x-iy=\eta$, on est ramené à démontrer le même théorème pour $\xi^\alpha \eta^{\alpha'} \varrho^\beta$, les conditions imposées aux exposants α, α' et β restant les mêmes. En remplaçant $\xi\eta$ par ϱ^2 un nombre suffisant de fois, on peut annuler un des coefficients α ou α'. Supposons que ce soit α'. On est donc ramené à $\xi^\alpha \varrho^\beta$ avec $\alpha \geq 0$, $\alpha+\beta \geq -1$.

Distinguons maintenant plusieurs cas.

Premier cas. β impair. Alors le nombre $p=\beta+2\alpha$ ne peut avoir la valeur -1 que pour $\alpha=0$, $\beta=-1$, et dans ce cas la solution est donnée par la fonction $\frac{1}{r}$. En dehors de ce cas p est un nombre positif impair, et il résulte de la formule (21) que la solution est donnée, à un facteur constant près, par la fonction $\frac{\partial^\alpha u_p}{\partial \eta^\alpha}$.

Deuxième cas. β pair ≥ 0. Alors $p=\beta+2\alpha$ est un nombre pair ≥ 0. La fonction f_p se réduisant dans ce cas pour $z=0$ à $A\varrho^p$, la solution est donnée, à un facteur constant près, par la fonction $\frac{\partial^\alpha f_p}{\partial \eta^\alpha}$.

[1] Ces définitions diffèrent de celles du chapitre I, d'une part parce que nous avons remplacé la notion de fonction singulière d'ordre (h) par la notion plus précise de fonction singulière d'ordre h, d'autre part parce que la condition auxiliaire relative aux intégrales (1) ne joue plus aucun rôle, enfin parce que le point singulier est sur la frontière de la région dans laquelle les fonctions sont régulières, sauf en ce point.

Troisième cas. β *pair* < 0. Alors $p = \beta + 2\alpha$ est un nombre pair positif. En posant $p = 2p'$ la formule (20) donne

$$u_p(x, y, 0) = \frac{A}{2} \xi^{p'} \eta^{p'} \left(\log \frac{\xi}{a} + \log \frac{\eta}{a}\right) + C \xi^{p'} \eta^{p'}.$$

Observant que $\alpha > p'$, on voit que la solution est donnée, à un facteur constant près, par $\frac{\partial^\alpha u_p}{\partial \eta^\alpha}$.

Le théorème énoncé est donc établi dans tous les cas.

Théorème. Etant donnés trois entiers positifs ou nuls α, α' *et* β *dont le dernier est pair, on peut, par une combinaison de fonctions* u_p *en nombre fini et de leurs dérivées, former une fonction qui soit harmonique, régulière d'ordre* $n = \alpha + \alpha' + \beta$ *au sens strict, et se réduise à* $x^\alpha y^{\alpha'} \varrho^\beta \log \varrho$ *pour* $z = 0$.

Par le même changement de variables que précédemment, on est ramené à démontrer le même théorème pour $\xi^\alpha \varrho^\beta \log \varrho$. En posant toujours $p = \beta + 2\alpha$, la solution est donnée par une combinaison linéaire convenable des fonctions $\frac{\partial^\alpha u_p}{\partial \eta^\alpha}$ et $\frac{\partial^\alpha f_p}{\partial \eta^\alpha}$.

§ 27. Nous allons appliquer les résultats précédents à un problème de développement en série.

Considérons une surface S, passant à l'origine des coordonnées et qui soit tangente au plan $z = 0$. Nous la supposerons d'abord pour simplifier analytique au voisinage de l'origine, et ne coupant pas la partie négative de l'axe des z, et nous prendrons comme axes des x et des y les directions principales de cette surface. On a alors sur S au voisinage de l'origine

$$z = \frac{1}{2}(a_1 x^2 + a_2 y^2) + \frac{1}{6}(b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 y + 3 b_2 x y^2 + b_3 y^3) + \cdots \tag{23}$$

On sait le rôle que joue dans la théorie des fonctions harmoniques la fonction, déjà considérée dans le chapitre précédent,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{z}{r^3},$$

la dérivée $\frac{d}{dn}$ étant relative à l'origine et comptée positivement vers l'intérieur de S. Quand le point A, de coordonnées x, y, z vient sur S, cette fonction se

réduit à une fonction de x et y singulière d'ordre 1 seulement. *On peut donc penser qu'il existe une fonction singulière d'ordre* 1 *seulement, harmonique, et égale sur* S *à* $\frac{z}{r^3}$. *Nous allons montrer qu'elle existe en effet, et la représenter par un développement en série de fonctions régulières d'ordres croissants.*

La fonction $\frac{z}{r^3}$ a pour valeur principale sur S au voisinage de l'origine

$$\frac{1}{2}\frac{a_1 x^2 + a_2 y^2}{\varrho^3}.$$

D'après le § 26, on peut former une fonction harmonique, régulière d'ordre -1 à l'intérieur de S, égale à la précédente pour $z = 0$. Cette fonction est

$$U_{-1} = \frac{a_1 + a_2}{4}\frac{1}{r} + \frac{a_1 - a_2}{4}\frac{x^2 - y^2}{r(r+z)^2}.$$

Posons

$$R_{-1} = \frac{z}{r^3} - U_{-1}.$$

Cetta fonction se réduit sur S à une fonction de x et y régulière d'ordre 0. Elle diffère infiniment peu sur S et à l'origine, de la fonction

$$\frac{a_1^2 - a_2^2}{8}\frac{x^2 - y^2}{\varrho^2} + \frac{(a_1 - a_2)^2}{8}\frac{(x^2 - y^2)^2}{\varrho^4} + \frac{1}{6}\frac{b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 y + 3 b_2 x y^2 + b_3}{\varrho^3}.$$

D'après le § 26, on peut former une fonction harmonique, élémentaire, régulière d'ordre 0 à l'intérieur de S, égale à la précédente pour $z = 0$. Soit U_0 cette fonction.[1] Posons

$$R_0 = R_{-1} - U_0 = \frac{z}{r^3} U_{-1} - U_0.$$

Cette fois R_0 sera infiniment petit sur S au voisinage de l'origine. On formera sa valeur principale,[2] et on cherchera à former une fonction U_1 qui n'en diffère que par des infiniment petits d'ordre supérieur au premier. On continuera de même indéfiniment.

---

[1] Cette fonction est algébrique, car la partie non algébrique, si elle existait, serait nécessairement, étant donnée la forme des fonctions u_p, de la forme $a \log (r+z)$, a étant une constante, et deviendrait infinie. Or elle doit prendre sur S der valeurs finies.

[2] Nous devons entendre ici par valeur principale d'une expression infiniment petite une expression plus simple qui n'en diffère que par des infiniment petits d'un ordre supérieur au moins d'une unité. Ainsi nous ne pouvons pas négliger x devant $x \log \varrho$.

Je dis que toutes les fonctions U_p ainsi définies sont des fonctions régulières d'ordre p, au sens strict, formées par des combinaisons linéaires des fonctions u_p étudiées § 28 et de leurs dérivées en nombre fini. Je dis de plus que la différence

$$R_p = \frac{z}{r^2} - (U_{-1} + U_0 + \cdots + U_p)$$

se réduit sur la surface S à une fonction de x et y régulière d'ordre $p+1$ au sens strict.

Comme il en est bien ainsi pour $p=-1$, nous pouvons supposer que ce soit vrai pour $p-1$. La fonction R_{p-1} se réduit donc au voisinage de l'origine sur la surface S à une fonction de x et y très petite comme $r^p \log \frac{1}{r}$. De plus elle est la somme de $\frac{z}{r^3}$ et d'un nombre fini de fonctions u_p et de leurs dérivées. Elle est alors de la forme

$$P(x, y, z) \log \frac{r+z}{a} + \frac{P_1(x, y, z, r)}{r^\alpha (r+z)^\beta},$$

P et P_1 étant des polynômes, car dans toutes les fonctions u_p et dans leurs dérivées, le coefficient de $\log \frac{r+z}{a}$ est un polynôme en x, y et z et la partie algébrique est rationnelle en x, y et r, et ne peut contenir au dénominateur d'autres facteurs que r et $r+z$. Remplaçons maintenant z par sa valeur (23). Etant donné que l'expression précédente est de l'ordre de grandeur de $r^p \log \frac{1}{r}$, sa valeur principale (au sens indiqué ci-dessus, en note) est

$$P_2(x, y) \log \frac{r+z}{a} + \frac{P_3(x, y, r)}{r^\alpha (r+z)^\beta},$$

P_2 et P_3 étant des polynômes homogènes de degrés respectifs p et $p+\alpha+\beta$. On peut encore l'écrire,

(24) $$P_2(x, y) \log \frac{\varrho}{a} + \frac{P_3(x, y, \varrho)}{\varrho^{\alpha+\beta}},$$

en négligeant des termes de l'ordre de grandeur de ϱ^{p+1}.

Il reste alors, d'après le § 26, une fonction harmonique, régulière d'ordre p au sens strict, égale à l'expression précédente pour $z=0$, formée avec les fonctions u_p et f_p et leurs dérivées en nombre fini. Soit U_p cette fonction.

Considérons la différence

$$R_p = R_{p-1} - U_p = \frac{z}{r^3}(U_{-1} + U_0 + \cdots + U_p),$$

et étudions ses valeurs sur la surface S; elle peut s'écrire

$$R_{p-1} - U_p(x, y, 0) - z\frac{\partial}{\partial \zeta} U_p(x, y, \zeta),$$

où ζ est compris entre 0 et z. Or $R_{p-1} - U_p(x, y, 0)$, par la manière même dont la fonction U_p a été formée, est au plus de l'ordre de grandeur de $\varrho^{p+1} \log \frac{1}{\varrho}$. Il en est de même de l'autre terme, puisque z est de l'ordre de ϱ^2 et que $\frac{\partial U_p}{\partial z}$ est de l'ordre de $\varrho^{p-1} \log \frac{1}{\varrho}$ au plus. Donc R_p est de l'ordre de grandeur de $\varrho^{p+1} \log \frac{1}{\varrho}$ ou très petit par rapport à cette expression.

D'autre part, en remplaçant z par son développement (23) dans

$$R_p = \frac{z}{r^3} - (U_{-1} + U_0 + \cdots + U_p),$$

cette fonction se présente sous la forme d'une série d'expressions de la forme (24), homogènes et de degrés croissants. La première de ces expressions doit être de degré $p + 1$, d'après ce que nous savons sur l'ordre de grandeur de R_p. En dérivant R_p sous cette forme, on obtient aisément des limites supérieures de ses dérivées, et on constate que R_p se réduit sur la surface S à une fonction de x et y régulière d'ordre $p + 1$ au sens strict. En particulier les dérivées de cette fonction jusqu'à l'ordre p sont infiniment petites à l'origine.

Ces valeurs de R_p sur la surface S étant finies, il existe une fonction harmonique R_p égale à R_p sur S. La fonction

$$\varphi(A) = U_{-1} + U_0 + \cdots + U_p + R_p$$

est, par la manière même dont R_p est défini, harmonique, égale sur S à $\frac{z}{r^3}$, et indépendante de p.

Il reste à montrer qu'elle est bien singulière d'ordre 1, c'est-à-dire que ses dérivées d'ordre i sont infinies au plus comme $\frac{1}{r^{i+1}}$. Cela résulte de la formule (25) écrite pour $p = i + 1$, où les fonctions U sont singulières d'ordre ≤ 1, tandis que R_p, fonction harmonique égale sur S à R_p, c'est-à-dire à une fonction de

x et y ayant ses dérivées finies jusqu'à l'ordre p, a, d'après le § 21, des dérivées finies jusqu'à l'ordre $p - 1 = i$.

Comme U_p a aussi ses dérivées jusqu'à l'ordre i finies et continues, on voit que, pour avoir une expression asymptotique de $\varphi(A)$ telle que l'erreur ait ses dérivées jusqu'à l'ordre i finies et continues, il suffit de former la somme

$$U_{-1} + U_0 + U_1 + \cdots + U_i. \tag{26}$$

Cette somme, d'après la forme des fonctions u_p, comprend une partie non algébrique qui est le produit de $\log \frac{r+z}{a}$ par un polynôme en x, y et z, et une partie algébrique, qui se compose uniquement de termes rationnels en x, y, z et r, les dénominateurs ne pouvant pas contenir d'autres facteurs que r et $r+z$. On peut évidemment, en la calculant négliger tous les termes holomorphes qui figurent dans les fonctions U, et par suite négliger les polynômes h_p qui figurent dans la définition des fonctions u_p et négliger aussi les polynômes f_p introduits dans la démonstration des théorèmes du § 26.

Nous avons jusqu'ici supposé la surface S analytique au voisinage de l'origine, en d'autres termes que z est une fonction holomorphe de x et y. Mais, pour que le résultat précédent subsiste, il suffit que z admette les dérivées jusqu'à l'ordre $i+3$ finies et continues, et que les dérivées d'ordre $i+3$ soient continues à la Lipschitz à l'origine, c'est-à-dire telles que, en désignant par Dz une quelconque de ces dérivées, on ait

$$|Dz| < K\varrho^{\alpha}, \qquad (0 < \alpha < 1).$$

§ 28. Nous allons appliquer les mêmes principes au problème suivant: *former, par un développement en série analogue à celui qui vient d'être obtenu, une fonction* $\psi(A)$, *harmonique, singulière d'ordre* 0, *ayant sur la surface* S *la même dérivée normale que* $\frac{1}{r}$, *à une constante près.*

Si on représente le développement de z par

$$z = z_2 + z_3 + \cdots + z_p + \cdots$$

z_p étant un polynôme homogène de degré p en x et y, la fonction considérée § 27 était

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{r} = \frac{z}{r^3} = \frac{z_2 + z_3 + \cdots + z_p + \cdots}{r^3}$$

La dérivée normale que nous considérons maintenant est

$$(27)\qquad \frac{d}{dn_A}\frac{\mathrm{I}}{r} = \frac{\frac{x}{r^3}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y}{r^3}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{r^3}}{\sqrt{\mathrm{I}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}$$

$$= \frac{z_2+2z_3+\cdots+(p-\mathrm{I})z_p+\cdots}{r^3\sqrt{\mathrm{I}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}.$$

Le principe du développement en série étant le même que celui du § 27, nous n'avons qu'à insister sur la différence essentielle qui consiste dans le remplacement du problème traité § 26 par le suivant:

étant donnée une fonction $w(x,y)$, somme de termes de la forme

$$b\,x^\alpha y^{\alpha'}\varrho^\beta\log\frac{r+z}{a}+c\,x^\gamma y^{\gamma'}\varrho^\delta,$$

où $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'$ sont des entiers positifs ou nuls, β un entier pair positif ou nul, δ un entier quelconque, et où

$$\alpha+\alpha'+\beta=\gamma+\gamma'+\delta=n,$$

former une fonction harmonique, régulière d'ordre $n+\mathrm{I}$, et dont la dérivée normale sur S diffère de $w(x,y)$ par des termes qui sont au plus de l'ordre de grandeur de $\varrho^{n+1}\log\frac{\mathrm{I}}{\varrho}$.

Nous savons, par le § 26, trouver un fonction harmonique, régulière d'ordre n, égale à $w(x,y)$ pour $z=0$. Soit $v(x,y,z)$ cette fonction. Comme elle est fonction linéaire des fonctions u_p et f_p et de leurs dérivées en nombre fini, nous pouvons remplacer dans son expression chaque fonction u_p ou f_p par la fonction ayant un indice plus élevé d'une unité, et nous obtenons une fonction $V(x,y,z)$ harmonique, régulière d'ordre $n+\mathrm{I}$, et telle que

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}=v(x,y,z),$$

de sorte que

$$\left[\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\right]_{z=0}=w(x,y).$$

La dérivée normale de V sur S peut alors s'écrire

$$\frac{dV}{dn_A}=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial z}\left[\frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\mathrm{I}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}-\mathrm{I}\right]-\frac{\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\mathrm{I}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Comme $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ et $\frac{\partial V}{\partial z}$ sont au plus de l'ordre de grandeur de $r^n \log \frac{1}{r}$, on voit qu'elle diffère de $\frac{\partial V}{\partial z} = v$ par des termes qui sont au plus de l'ordre de grandeur de $r^{n+1} \log \frac{1}{r}$, c'est-à-dire de $\varrho^{n+1} \log \frac{1}{\varrho}$. D'autre part la fonction $v(x,y,z)$ diffère elle même de $w(x,y)$ par l'expression

$$z \frac{\partial v(x,y,\zeta)}{\partial \zeta}$$

(ζ étant compris entre o et z), qui est aussi du même ordre de grandeur. Donc la fonction V répond à la question.

Nous pouvons alors former $\psi(A)$ par son développement en série. La partie principale de l'expression (27) étant

$$\frac{1}{2} \frac{a_1 x^2 + a_2 y^2}{r^3},$$

si nous la prenons pour fonction w, nous obtenons, par la méthode qui vient d'être indiquée, la fonction

$$V_0 = \frac{a_1 + a_2}{4} \log \frac{r+z}{a} - \frac{a_1 - a_2}{8} \frac{x^2 - y^2}{(r+z)^2},$$

qui est harmonique, singulière d'ordre o, et telle que

$$\frac{d}{dn_A}\left(\frac{1}{r} - V_0\right)$$

se réduise sur S à une fonction de x et y singulière d'ordre o. Prenant la valeur principale de cette fonction comme fonction w on formera V_1, et ainsi de suite.

Posons

$$\frac{d}{dn_A}\left(\frac{1}{r} - V_0 - V_1 - \cdots - V_p\right) = R_p.$$

La fonction R_p, qui est bien définie sur la surface S, est, par la formation même des fonctions V une fonction de x et y régulière d'ordre p. Il existe donc une fonction R_p harmonique à l'intérieur de S et telle que sur la surface on ait

$$\frac{dR_p}{dn_A} = R_p + \text{const.}$$

Cette fonction est définie à une constante près. R_p ayant ses dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre $p-1$, il en est de même de R_p, d'après le § 22. La formule

$$R_p = V_{p+1} + R_{p+1} + \text{const.}$$

montre alors que R_p a même des dérivées d'ordre p finies et continues.

Il est alors évident que la fonction

$$\psi(A) = V_0 + V_1 + \cdots + V_p + R_p$$

vérifie bien les conditions imposées à $\psi(A)$, et que, pour en avoir une expression asymptotique telle que l'erreur reste finie ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p, il suffit de former la somme

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_p.$$

Les remarques faites sur l'expression (26) s'appliquent à cette somme.

CHAPITRE IV.

La fonction de Green pour l'espace.

§ 29. La fonction de Green g_B^A relative à une surface fermée S et aux points A et B est définie par les conditions qu'elle s'annule quand A est sur S et que la différence $g_B^A - \frac{1}{r}$ (r désignant la distance des points A et B), soit à l'intérieur de S une fonction harmonique de A. On sait que c'est une fonction symétrique des points A et B et que son introduction permet de résoudre le problème de Dirichlet par la formule

(28) $$f(A) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{dg_M^A}{dn} f(M)\, dS,$$

dS étant l'élément de S décrit par le point M et la normale étant comptée positivement vers l'intérieur.

Nous allons exprimer $\frac{dg_M^A}{dn}$ à l'aide de la fonction $\varphi(A)$ étudiée dans le chapitre précédent (§ 27). Cette fonction dépendait non seulement de (A), mais du point M de la surface pris comme origine de coordonnées. Nous devons donc maintenant la répresenter par $\varphi(A, M)$. Elle n'a été définie que si la normale extérieure à S en M peut être prolongée jusqu'à l'infini sans rencontrer à nouveau

la surface S. Mais cela ne diminue en rien la généralité des résultats que nous obtiendrons dans ce chapitre, car on sait, d'après M. Hadamard, que la singularité de g_B^A dans le voisinage d'un point M ne dépend que de la partie S voisine de M. Il suffit donc, si la condition indiquée n'est pas vérifiée, de remplacer S par une autre surface, vérifiant cette condition, et coïncidant avec S dans le vosinage du point M.

Considérons l'intégrale

$$\iint_S \varphi(A, M) f(M) dS.$$

La fonction $\varphi(A, M)$ étant singulière d'ordre 1 seulement, cette intégrale est absolument et uniformément convergente, et par suite continue quand A vient sur la surface, comme il arrive pour un potentiel de simple couche.

Il en résulte que l'intégrale

$$\iint_S \left[\frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho} - \varphi(A, M)\right] dS,$$

où ϱ désigne la distance AM, représente une fonction hormonique de A, égale quand A vient en un point α de S à

$$2\pi f(\alpha) + \iint_S \left[\frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho} - \varphi(\alpha, M)\right] dS = 2\pi f(\alpha).$$

En comparant la solution du problème de Dirichlet qui résulte de cette remarque à celle qui est donnée par la formule (28), il vient

$$\frac{dg_M^A}{dn} = 2\frac{d\frac{1}{\varrho}}{dn} - 2\varphi(A, M). \tag{29}$$

Cette formule ramène l'étude asymptotique de $\frac{dg_M^A}{dn}$ à celle de $\varphi(A, M)$, qui a fait l'objet du § 27. Nous voyons en particulier que, avec une erreur finie, $\frac{dg_M^A}{dn}$ peut être représenté par

$$2\frac{d\frac{1}{\varrho}}{dn} - 2U_{-1} = \frac{2z}{\varrho^3} - \frac{a_1 + a_2}{2}\frac{1}{\varrho} - \frac{a_1 - a_2}{2}\frac{x^2 - y^2}{\varrho(\varrho + z)^2}.$$

l'axe des z étant normal à S en M, les axes des x et y étant tangents aux lignes de courbure, a_1 et a_2 désignant les courbures principales de la surface S en M. (ϱ remplace la lettre r des formules du § 27, car nous appelons maintenant ϱ la distance AM.)

§ 30. La fonction $\frac{dg_M^A}{dn}$ étant connue, g_B^A est donné par la formule

$$g_B^A = \frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{dg_M^A}{dn}\frac{1}{\varrho'}\,dS,$$

ϱ' désignant la distance BM. Elle s'écrit d'après (29)

$$g_B^A = \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \frac{d\frac{1}{\varrho}}{dn}\frac{1}{\varrho'}\,dS + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \varphi(A,M)\frac{1}{\varrho'}\,dS,$$

ou encore

$$g_B^A = \frac{1}{r} - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho\varrho'}\,dS + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \varphi(A,M)\frac{1}{\varrho'}\,dS, \tag{30}$$

puisque, d'après la formule de GREEN,

$$\iint\limits_S \left(\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho'}\frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho}\right)dS = 0.$$

On est donc ramené à l'étude d'un potentiel de simple couche de densité $\varphi(A,M)$. Si on remplace $\varphi(A,M)$ par sa valeur asymptotique U_{-1}, l'erreur faite sur $\varphi(A,M)$ est finie, et il en est de même, d'après le § 18, de l'erreur faite sur g_B^A.

Que pouvons-nous dire maintenant de l'erreur faite quand on remplace $\varphi(A,M)$ par la valeur asymptotique plus précise

$$\varphi(A,M) - R_p = U_{-1} + U_0 + \cdots + U_p,$$

obtenue § 27? On voit aisément que ce qui a été dit § 27 sur l'ordre de grandeur des dérivées des fonctions U_p et R_p par rapport aux coordonnées de A s'applique aux dérivées par rapport aux paramètres dont dépend M sur la surface S. En effet une dérivation par rapport à ces paramètres introduit deux sortes de termes; d'une part ceux qui proviennent de ce que les coefficients du développement (23) de z en série de TAYLOR dépendent du point M; ces termes, moyennant des hypothèses convenables sur la régularité de la surface S, ne peuvent avoir un ordre de

singularité plus élevé que ceux dont ils proviennent. D'autre part nous avons des termes provenant de ce que les axes de coordonnées, et par conséquent les quantités x, y, z et r qui interviennent dans l'expression des fonctions u_p et par suite des fonctions U_p, dépendent du point M et du plan tangent en M; ces termes peuvent être d'un ordre de singularité supérieur d'une unité à l'ordre des termes donc ils proviennent. Donc, chaque dérivation augmentant au plus l'ordre de singularité d'une unité, U_{p+1} et R_p ont leurs dérivées d'ordre p finies, et leurs dérivées d'ordre $p+1$ inférieures en module à $K \log \frac{1}{\varrho}$, K étant indépendant des points A et M.

Considérons une dérivée d'ordre p de R_p; désignons la par $D R_p(A, M)$. Du fait que ses dérivées premières soient inférieures en module à $\log \frac{1}{\varrho}$ résulte aisément que

$$|D R_p(A, M) - D R_p(A, M_1)| < K d \log \frac{1}{d} < K d^{\alpha},$$

d désignant la distance $M M_1$, α un exposant arbitraire entre 0 et 1, et K un nombre indépendant des points A, M et M_1. Les dérivées d'ordre p de R_p, tant par rapport aux coordonnées de A que par rapport aux paramètres dont dépend M sont donc uniformément continues à la Lipschitz au sens du § 15.

Il résulte alors des § 18, 19, et de la remarque finale du § 20, que l'erreur

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S R_p \frac{1}{\varrho} dS$$

faite sur g_B^A, a ses dérivées d'ordres $p+1$ tant par rapport aux coordonnées de A que par rapport à celles de B, finies et continues.

Nous avons ainsi complètement résolu le problème B de l'introduction pour la fonction de Green.

§ 31. On peut se demander s'il est possible de trouver des expressions asymptotiques en termes finis des intégrales qui figurent dans les expressions obtenues.

Cette question peut d'ailleurs être envisagée de deux manières différentes.

1° Nous pouvons considérer un point P de S et chercher l'expression asymptotique de g_B^A au voisinage de P. Une pareille expression ne peut être obtenue en *termes finis* que pour des surfaces particulières. En effet une expression en

termes finis ne peut contenir qu'un nombre fini de paramètres caractérisant la forme de la surface S au voisinage de P. Il y aura donc nécessairement une surface S_1 distincte de S pour laquelle elle ait la même valeur. Prenons B voisin de P, situé sur une des surfaces S et S_1 et intérieure à l'autre, et faisons tendre A vers B. La valeur de g_B^A relative à une de ces surfaces est nulle tandis que la valeur relative à l'autre surface devient infinie. La même expression asymptotique ne peut donc convenir à ces deux fonctions.

Une expression asymptotique de la nature indiquée peut seulement être obtenue si les distances des points A et B entre eux et à la surface S ne sont pas simultanément très petites par rapport à leur distance au point P.

2° On peut supposer que le point P dépende d'au moins un des points A et B; l'expression asymptotique peut alors être obtenue en termes finis. Mais il faut observer que le fait que P dépende d'un des points A et B rend une telle expression très peu apte à être utilisés dans les calculs, et que ce ne sera une fonction harmonique que d'un des points A et B au plus.

Il semble donc préférable de s'en tenir à l'expression asymptotique obtenue sous forme d'intégrale définie, qui est une fonction harmonique des points A et B et semble bien être dans la nature des choses.

§ 32. A défaut d'une expression asymptotique de g_B^A en termes finis, on peut donner une limite supérieure des dérivées de cette fonction. Il est facile d'en obtenir contenant à la fois r et les distances des points A et B à la surface S. Ce qui est surtout intéressant est d'en avoir une qui ne dépende que de r. Dans le plan, la représentation conforme donne aisément ce résultat. Dans l'espace il faut avoir recours à des considérations différentes.

Nous allons démontrer que, $D g_B^A$ *étant une dérivée d'ordre p de la fonction de* Green, *on a*

$$\left| D g_B^A \right| < \frac{K}{r^{p+1}}. \tag{31}$$

K étant un nombre indépendant des points A et B.

Bien entendu, si A et B sont voisins d'un même point de la surface, il faut que la surface soit *suffisamment régulière* au voisinage de ce point. Il suffit certainement que l'une des coordonnées d'un point de la surface ait par rapport aux autres des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre $p+2$.

Démontrons d'abord le résultat énoncé lorsque B est en un point M de la surface. g_B^A étant fonction harmonique de B et s'annulant quand B est sur la

surface, la valeur de Dg_B^A en M est fonction linéaire de $\frac{d g_M^A}{dn}$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$ au plus. D'après la formule (29) et ce que nous savons sur $\varphi(A, M)$, la limitation indiquée est exacte en M, et l'on a

$$\left|D g_M^A\right| < \frac{K}{\varrho^{p+1}},$$

ou encore

$$\left|D h_M^A\right| < \frac{K}{\varrho^{p+1}}, \tag{32}$$

en posant $h_B^A = g_B^A - \frac{1}{r}$.

Considérons maintenant $D h_B^A$ comme une fonction harmonique de B. Son module maximum est atteint sur la surface, et la formule (32) donne

$$\left|D h_B^A\right| < \frac{K}{d^{p+1}},$$

d étant la distance de A à la surface. Si alors d n'est pas petit par rapport à r, si par exemple $r < 10d$, on a bien

$$\left|D g_B^A\right| < \left|D h_B^A\right| + \left|D \frac{1}{r}\right| < \frac{K}{r^{p+1}}.$$

La formule (31) s'établit de même si la distance d_1 de B à la surface S n'est pas très petite par rapport à r.

Il reste à traiter le cas ou d et d_1 sont très petits par rapport à r. La limitation cherchée étant exacte pour les dérivées de $\frac{1}{r}$ il suffit de l'établir pour les dérivées de

$$h_B^A = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{d g_M^A}{dn}\frac{1}{\varrho'}\, dS.$$

Si A et B étaient sur la surface cette intégrale serait analogue aux intégrales singulières étudiées § 14 et 15. Or dans le cas général les mêmes procédés s'appliquent sans modification essentielle. On se rappelle en effet que ces procédés consistaient dans une transformation de l'intégrale étudiée en une somme de plusieurs termes. Pour les uns, la dérivée que l'on voulait former était finie, car ces termes étaient des intégrales du type (1). Pour les autres on pouvait former

la dérivée en question par la règle de LEIBNIZ et l'intégrale obtenue étant absolument et uniformément convergente, les lemmes du § 12 fournissaient la limitation cherchée.

Or ici, le même procédé de décomposition de l'intégrale en plusieurs termes s'applique, les rôles des points singuliers dans le champ d'intégration étant joués par les pieds a et b des perpendiculaires abaissées de A et B sur S.

Pour les termes de la première catégorie, le même procédé s'applique encore. En effet l'hypothèse relative aux intégrales (1) est bien vérifiée. Elle revient à dire que le potentiel

$$\iint_S \frac{f(M)}{\varrho'} dS$$

et l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{dg_M^A}{dn} f(M)\,dS$$

qui n'est autre que la fonction harmonique égale à $f(A)$ sur le contour, ont des dérivées finies jusqu'à l'ordre p à l'intérieur de S si $f(M)$ a des dérivées finies jusqu'à l'ordre $p+1$. Il en est bien ainsi d'après le chapitre II.

Quant aux dérivées calculées par la règle de LEIBNIZ, si elles sont absolument convergentes quand A et B sont en a et b, elles le sont *a fortiori* dans le cas général. On ne peut en effet que les augmenter en remplaçant respectivement les quantités ϱ et ϱ' qui figurent aux dénominateurs des fonctions intégrées par les distances de M aux droites Aa et Bb, ou, ce qui revient au même au point de vue de l'ordre de grandeur, par les distances de M à a et b. La limite supérieure fournie par les lemmes du § 12 est alors de la forme

$$\frac{K}{r_1^{p+1}},$$

r_1 désignant la distance ab. Mais d et d_1 étant très petits par rapport à r, $\frac{r_1}{r}$ est très voisin de 1, et on obtient une limite de la forme

$$\frac{K}{r^{p+1}}.$$

La formule (31) est donc établie dans tous les cas. Observons que de cette formule, si on l'avait établie par un procédé différent de celui employé ici, il

serait aisé de déduire une nouvelle démonstration très simple du théorème du § 21. Mais ici cela constituerait un cercle vicieux.

CHAPITRE V.

La fonction de Neumann pour l'espace.

§ 33. La fonction de Neumann Y_B^A relative à la surface S et aux points A et B est définie par les conditions que, si on la considère comme fonction de A, la différence $Y_B^A - \frac{1}{r}$ soit harmonique à l'intérieur de S, que sa dérivée normale sur la surface ait une valeur constante (nécessairement égale à $\frac{4\pi}{S}$, la quantité désignée par S étant l'aire de S), enfin que sa valeur moyenne sur la surface soit nulle. On sait que c'est une fonction symétrique des points A et B et que son introduction permet de résoudre le problème de Neumann par la formule

$$f(A) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S Y_M^A \frac{d f(M)}{d n} d S, \tag{33}$$

lorsque les valeurs de $\frac{d f(M)}{d n}$ données sur la surface vérifient la condition nécessaire

$$\iint_S \frac{d f(M)}{d n} d S \quad . \tag{34}$$

Nous allons exprimer Y_M^A à l'aide de la fonction $\psi(A)$ définie et étudiée dans le chapitre précédent (§ 28). D'après une remarque déjà faite pour la fonction de Green, cela ne restreint en rien la généralité des résultats que nous obtiendrons de supposer que la surface S vérifie les hypothèses faites dans le chapitre précédent pour les définitions des fonctions $\varphi(A)$ et $\psi(A)$. Nous n'avons défini $\psi(A)$ qu'à une constante près, nous définirons cette constante par la condition que la fonction $\psi(A) - \frac{1}{\varrho}$, ϱ étant la distance de A au point M de la surface pris comme origine pour la définition de $\psi(A)$, ait une valeur moyenne nulle quand A décrit la surface S, M restant fixe. Enfin comme $\psi(A)$ dépend du choix du point M, nous représenterons cette fonction par $\psi(A, M)$.

Considérons l'intégrale

(35) $$\iint\limits_S \psi(A,M)\frac{df(M)}{dn}dS.$$

La fonction $\psi(A,M)$ étant singulière d'ordre 0, ses dérivées par rapport aux coordonnées de A sont singulières d'ordre 1, et par suite infinies au plus comme $\frac{1}{\varrho}$. Donc la fonction répresentée par l'intégrale (35) et ses dérivées premières sont continues quand A traverse la surface S, comme il arrive pour un potentiel de simple couche (mais non pas pour ses dérivées).

Considérons alors l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\left[\frac{1}{\varrho}-\psi(A,M)\right]\frac{df(M)}{dn}dS.$$

Elle représente une fonction harmonique du point A. Sa dérivée normale, quand A vient sur le contour, prend la valeur $\frac{df(M)}{dn}$. Enfin sa valeur moyenne sur la surface S est nulle. Cette fonction est donc égale à $f(A)$.

En comparant cette expression à celle de $f(A)$ qui résulte de la formule (33), il vient:

$$Y_M^A=\frac{2}{\varrho}-2\psi(A,M)+\psi_1(A).$$

La fonction $\psi_1(A)$ est une fonction harmonique; elle ne peut devenir infinie qu'en M, et comme elle ne dépend pas de M, elle est finie à l'intérieur S et sur S; il en est de même de ses dérivées premières. Sa dérivée normale sur la surface est nulle et enfin sa valeur moyenne sur la surface est également nulle. Elle est donc nulle, et on a

(36) $$Y_M^A=\frac{2}{\varrho}-2\psi(A,M).$$

Cette formule ramène l'étude asymptotique de Y_M^A à celle de $\psi(A,M)$, qui a fait l'objet du § 28. Ainsi nous voyons qu'avec une erreur finie, Y_M^A peut être représenté par

(37) $$\frac{2}{\varrho} - 2V_0 = \frac{2}{\varrho} - \frac{a_1 + a_2}{2} \log(\varrho + z) + \frac{a_1 - a_2}{4} \frac{x^2 - y^2}{(\varrho + z)^2}.$$

Si on veut obtenir une expression asymptotique telle que l'erreur ait ses dérivées du premier ordre finies, il faut d'après les résultats du § 28, former

$$\frac{2}{\varrho} - V_0 - 2V,$$

et par suite calculer v_1. Mais nous pouvons, dans ce calcul, négliger les termes algébriques. En effet la partie algébrique de V_1 est une fraction rationnelle homogène du premier degré en x, y, z et ϱ dont le dénominateur est de la forme $\varrho^\alpha (\varrho + z)^\beta$, α et β étant des exposants convenables. Ses dérivées sont alors de la même forme, mais homogènes et de degré 0; elles sont donc finies. Nous n'avons donc à calculer dans V_1 que le coefficient de $\log(\varrho + z)$, qui est nécessairement, d'après ce que nous savons sur les fonctions V, un polynôme homogène du premier degré en x, y, z.

D'après le § 28, il faut donc calculer la valeur principale de

$$\frac{d}{dn_A}\left(\frac{1}{\varrho} - V_0\right)$$

quand A est voisin de M. En faisant le calcul, on trouve

(38) $$\frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \frac{(x^2 - y^2)(a_1 x^2 + a_2 y^2)}{\varrho^4} + 2\frac{z_3}{\varrho^3},$$

z_3 désignant l'ensemble des termes du troisième degré dans le développement de z en série de Taylor.

Il faut maintenant, à chacun des termes de cette expression, faire correspondre une fonction harmonique régulière d'ordre 1, formée à l'aide des fonctions u_p et f_p et dont la dérivée normale ait pour valeur principale le terme considéré. A 1 correspond ainsi la fonction harmonique z. A $\frac{x^4}{\varrho^4}$ correspond la fonction

$$-4\frac{\partial^4 u_5}{\partial x^4} - 6\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \frac{3}{2} u_1 + \frac{9}{8} f_1,$$

dans laquelle la partie non algébrique

$$\left(-4\frac{\partial^4 f_5}{\partial x^4} - 6\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} - \frac{3}{2} f_1\right) \log(\varrho + z)$$

est nulle, comme on le vérifie aisément, les valeurs de f_1, f_3, f_5 étant

$$f_1 = z,$$

$$f_3 = \frac{z^3}{6} - \frac{z}{4}(x^2 + y^2),$$

$$f_5 = \frac{z^5}{120} - \frac{z^3}{24}(x^2 + y^2) + \frac{z}{64}(x^2 + y^2)^2.$$

De même à $\frac{y^4}{\varrho^4}$ correspond une fonction harmonique algébrique, et il est de même pour $\frac{x^2 y^2}{\varrho^4}$ qui a une même valeur principale que $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^4}{\varrho^4} - \frac{y^4}{\varrho^4}\right)$. Nous pouvons donc négliger tous ces termes, puisque nous ne cherchons que la partie non algébrique de V_1 et l'expression (38) se réduit à

$$2\frac{z_3}{\varrho^3} = \frac{1}{3}\frac{b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 y + 3 b_2 x y^2 + b_3 y^3}{\varrho^3}.$$

La fonction harmonique, dont la dérivée normale est équivalente à cette expression est

$$(3 b_2 - b_0)\frac{\partial^3 u_4}{\partial x^3} + (2 b_2 - b_0)\frac{\partial u_2}{\partial x} + (3 b_1 - b_3)\frac{\partial^3 u_4}{\partial y^3} + (2 b_1 - b_3)\frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

Il nous faut former la partie non algébrique de cette expression, qui est la même que celle de V_1. Les valeurs de f_2 et f_4 étant

$$f_2 = \frac{z^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{64},$$

$$f_4 = \frac{z^4}{24} - \frac{z^2(x^2 + y^2)}{8} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{64}$$

on trouve que cette partie non algébrique est

$$\frac{(b_0 + b_2)x + (b_1 + b_3)y}{8}\log(\varrho + z).$$

Donc finalement, avec une erreur dont les dérivées premières sont finies, on peut représenter Y_M^A par l'expression

$$\frac{2}{\varrho} - \frac{a_1 + a_2}{2}\log(\varrho + z) + \frac{a_1 - a_2}{4}\frac{x^2 - y^2}{(\varrho + z)^2} - \left(\frac{b_0 + b_2}{4}x + \frac{b_1 + b_3}{4}y\right)\log(\varrho + z).$$

On peut transformer un peu cette expression en observant que, si on appelle C la somme des courbures principales de la surface S, on a en M

$$C = a_1 + a_2, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = b_0 + b_2, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = b_1 + b_3.$$

En posant aussi $a_1 - a_2 = E$, l'expression asymptotique de Y_M^A devient[1]

$$\frac{2}{\varrho} - \frac{C}{2}\log(\varrho + z) + \frac{E}{4}\frac{x^2 - y^2}{(\varrho + z)^2} - \frac{1}{4}\left(x\frac{\partial C}{\partial x} + y\frac{\partial C}{\partial y}\right)\log(\varrho + z).$$

§ 34. Ayant étudié Y_M^A, on peut définir Y_B^A par la formule

$$Y_B^A = \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S Y_M^A \frac{d\frac{1}{\varrho'}}{dn} dS - \frac{1}{S}\iint\limits_S \frac{1}{\varrho'} dS,$$

qui permet d'étudier la singularité de la fonction de Neumann. Cette formule peut encore s'écrire, d'après la formule (36)

$$(39) \qquad Y_B^A = \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho\varrho'} dS - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \psi(A, M)\frac{d}{dn}\frac{1}{\varrho'} dS - \frac{1}{S}\iint\limits_S \frac{1}{\varrho'} dS.$$

On peut, pour l'étude asymptotique de Y_B^A, négliger la dernière intégrale, qui est holomorphe.

Par des raisonnements analogues à ceux qui ont été exposés pour la fonction de Green, on verrait que, si dans la formule (39) on remplace $\psi(A, M)$ par son expression asymptotique

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_p,$$

l'erreur qui en résulte a ses dérivées jusqu'à l'ordre p finies et continues.

Enfin le procédé par lequel nous avons limité supérieurement les dérivées de la fonction de Green s'applique au cas actuel, et on trouve que la formule (31) est exacte sans modification pour la fonction de Neumann.

[1] C'est cette formule qui doit remplacer celle du travail cité de M.r Cisotti, qui contenait, en outre, des termes qui, avec nos notations, s'écriraient

$$-\frac{EC}{24}\frac{x^2 - y^2}{(r + z)^2}(2r + z)\log r - \frac{E^2}{16} z \log r.$$

D'après cette formule, la dérivée normale de Y_M^A ne resterait pas finie. Nous savons d'ailleurs que, quel que soit le nombre de fonctions V que l'on calcule, la partie non algébrique de l'expression obtenue est le produit de log $(r + z)$ par un polynôme en x, y, z. L'expression de M. Cisotti n'est pas réductible à une pareille forme.

Table des matières.

GASTON DARBOUX.

(1842—1917).[1]

Par

DAVID HILBERT

à Goettingue.

S'il est vrai qu'au nombre de ceux qui ont donné au développement des mathématiques en France pendant le dernier tiers du 19e siècle son cachet particulier Henri Poincaré a brillé du plus vif éclat, Gaston Darboux n'a pourtant pas occupé une position moins dominante. Le rôle qu'il a joué ne dépendait pas seulement de la richesse de sa production scientifique; sa brillante carrière, ses talents d'organisateur, son enseignement ainsi que toute sa personnalité y ont eu également une part importante.

Dans les années 1860 à 1870, une spécialisation extrême règnait en France tout comme en Allemagne, dans le domaine des mathématiques. À côté de Serret, Bouquet, Bonnet et d'autres, Chasles et Hermite étaient les représentants les plus marquants des sciences mathématiques: Chasles comme pur géomètre, Hermite comme pur analyste. Ce furent alors Darboux et Camille Jordan, son aîné de quelques années, qui par leurs idées rattachèrent l'une à l'autre les deux disciplines, et aplanirent ainsi les voies qui allaient mener la nouvelle génération à une façon plus libre d'envisager les sciences mathématiques. Les résultats produits par cette nouvelle orientation, qui finit par provoquer pour ainsi dire une transformation de la science, furent décrits par Darboux lui-même, en 1908, au Congrès international des Mathématiciens à Rome, où il fit une comparaison entre le caractère des mathématiques du 19e et celui du 20e siècle. Tandis que le 19e siècle, dans sa première moitié tout au moins, s'était contenté d'achever les tâches que les deux siècles précédents lui avaient léguées, le 20e siècle, au contraire, offrait aux recherches mathématiques des perspectives

[1] Traduction du discours prononcé le 12 mai 1917 à la séance publique annuelle de l'Académie des Sciences de Goettingue (Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1917, p. 71).

absolument nouvelles et leur présentait des domaines entièrement inexplorés. »Rien n'arrête«, poursuit DARBOUX dans sa conférence, »les esprits ardents et curieux du 20e siècle; ils ne craignent nullement de s'attaquer aux bases même de l'édifice que tant de travaux, si longuement poursuivis, avaient paru é sur des fondements inébranlables. Et non contents d'imprimer ainsi à notre science les directions qu'ils estiment les meilleures, ils ont la prétention d'apporter les contributions les plus originales et les plus précises à cette branche essentielle de la Philosophie qui a pour objet propre l'origine, la nature et la portée de nos connaissances.« DARBOUX assure de plus, d'une manière explicite, qu'il approuve ces tendances de la jeune génération.

Pendant l'automne de l'année 1861, DARBOUX passa les examens d'admission à l'École Polytechnique et à l'École Normale, et obtint chaque fois la première place; il se décida pour l'École Normale. Le fait qu'un jeune homme si richement doué renonçait à l'épée et au manteau brodé des officiers ou des ingénieurs de l'État pour préférer l'humble titre de Professeur et les fonctions plus modestes qui s'y rattachent, ne s'était pas encore présenté et provoqua un étonnement général; J. J. WEISS, célèbre à cette époque comme critique de GOETHE, consacra un article à cet événement dans le *Journals des Débats* (20 novembre 1861) — cet écrivain jugeait manifestement que quand une chose pareille se passe au moins une fois sur notre planète, il y a lieu de la relever pour la postérité de tous les temps. Dès le début, DARBOUX, qui était d'origine modeste et avait perdu son père de bonne heure, a joui de la protection des savants les plus influents du monde scientifique parisien. En 1864, année où parut sa première publication mathématique (*Sur les sections du tore*), et peu après qu'il eut quitté l'École Normale, PASTEUR fit en sorte qu'il y obtint une place de répétiteur, grâce à laquelle il lui fut possible de rédiger sa thèse sur les surfaces orthogonales. Lorsqu'il eut ensuite passé son doctorat, en juillet 1866, devant CHASLES, SERRET et BOUQUET, deux années seulement s'écoulèrent jusqu'au moment où JOSEPH BERTRAND lui procura la nomination de professeur suppléant de Physique mathématique au Collège de France; en même temps BOUQUET le fit nommer professeur de mathématiques supérieures au Lycée Louis-le-Grand. Et depuis lors, charges et honneurs lui échurent en croissant; il fut pendant la dernière partie de sa vie secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Paris, et mourut dans la demeure réservée au titulaire de cette charge dans le Palais Mazarin. Il était Membre correspondant de notre Société de Goettingue depuis 1879 et Membre étranger depuis 1901.

DARBOUX était avant tout et de nature géomètre mais en même temps il avait la tendance d'emprunter les objets de ses recherches autant que possible à tous les domaines des mathématiques, imprégnait ceux-ci de doctrines géomé-

triques et les fécondait par elles. C'est à cause de cela que déjà parmi les travaux de sa jeunesse il s'en trouve trois qui ne sont pas purement géométriques: le premier est le mémoire *Sur les équations aux dérivées partielles* (Ann. Éc. Norm. VII, 1870), dont SOPHUS LIE reconnut tout de suite l'importance; ce mémoire établit la méthode d'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre qui porte aujourd'hui le nom de DARBOUX; la méthode en question constitue le développement conséquent de la théorie de MONGE—AMPÈRE, dans laquelle on déduit de l'équation aux dérivées partielles considérée une suite d'équations du même type telle que l'intégration d'une seule de ces équations entraîne celle de toutes les autres. Les deux autres travaux doivent leur origine à l'étude que fit DARBOUX des recherches de RIEMANN sur les séries trigonométriques; l'un est le mémoire *Sur la théorie des fonctions discontinues* (Ann. Éc. Norm. IV, 1875), où figurent pour la première fois les valeurs limites connues sous le nom d'intégrales par excès et par défaut de DARBOUX, et qui contient en outre un nombre considérable de résultats sur la théorie des fonctions d'une variable réelle, que WEIERSTRASS exposait à cette époque dans ses leçons, mais n'avait pas encore publiés. Ce mémoire eut une influence décisive sur l'introduction de la rigueur moderne en France. Finalement, le travail intitulé: *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres* (Journ. Liouv., 3e sér., t. 4, 1878) remonte à certains recherches de LAPLACE et les rattache à la théorie des séries de FOURIER: l'auteur y évalue les coefficients de la série de FOURIER qui répond à une fonction analytique d'une variable réelle ayant des singularités réelles données, et applique ensuite les résultats obtenus aux fonctions particulières les plus diverses ayant de l'importance pour les applications. POINCARÉ a fait un usage fréquent de ce dernier travail de DARBOUX, par exemple à l'occasion de l'évaluation des termes d'ordre supérieur de la fonction perturbatrice. Le vrai géomètre apparaît chez DARBOUX dans l'écrit *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires* (Paris 1873). Cet écrit, où DARBOUX introduit les coordonnées pentasphériques, se meut dans le même ordre d'idées que les recherches de même date de M. FÉLIX KLEIN et de SOPHUS LIE, avec lesquels DARBOUX fut aussi, pendant les années 1869—70, personnellement lié.

DARBOUX a enseigné la Mécanique à la Sorbonne durant les années 1873—1878, époque d'où datent une série de contributions nouvelles à cette partie de la science. Pour la plupart elles ont été réimprimées comme notes dans la *Mécanique* de DESPEYROUS; mentionnons ici les recherches sur les axiomes du parallélogramme des forces, qui ont été prises comme point de départ entre autres par M. SCHIMMACK, dans sa thèse présentée à Goettingue; ensuite, les

études sur certains mécanismes articulés, où Darboux fait connaître par exemple sa réalisation extrêmement élégante d'une description mécanique du plan; et enfin, la découverte d'un mode de mouvement d'un corps solide où tous les points décrivent des ellipses, et qui est en même temps le seul mouvement qui jouisse de la propriété que les différents points du corps décrivent des courbes planes situées dans des plans non parallèles et ne pouvant être engendrées par le glissement du corps sur un plan. Une autre découverte de Darboux importante pour la Mécanique est sa solution profonde du problème de construire les surfaces dont toutes les lignes géodésiques sont des courbes fermées. L'étude que Darboux a faite de cette question forme le point de départ des deux thèses présentées à Goettingue par M. Otto Zoll (1901) et par M. Paul Funk (1911).

La partie principale de l'oeuvre de Darboux appartient au domaine de la théorie des surfaces. Dans ce domaine comme dans les autres recherches où il s'occupe de géométrie, il ne manque pas de faire aussi un usage courant de formules analytiques et, en particulier, de l'instrument analytique fourni par l'emploi des axes coordonnés, en s'imposant toutefois, comme il le dit lui-même, la règle que, »la recherche doit être vivifiée et inspirée sans cesse par l'esprit géométrique, qui ne doit jamais cesser d'être présent«. Darboux a donné une vue d'ensemble des résultats relatifs à la théorie des surfaces qui furent le fruit de ses investigations dans ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux* et dans son grand ouvrage en quatre volumes sur la *Théorie des surfaces.* Ce dernier ouvrage n'a pas seulement conquis une place centrale dans la littérature sur le sujet auquel il est spécialement consacré, mais il est devenu en même temps un instrument pour l'étude de toutes les doctrines qui se trouvent actuellement au premier plan dans les mathématiques, telles que la Mécanique, le calcul des variations, la théorie des équations aux dérivées partielles, la théorie des invariants, doctrines dont personne avant Darboux n'a conçu et fait ressortir l'enchaînement organique avec plus de pénétration et de clarté que lui. Cette circonstance, dont seule l'époque la plus récente — celle qui vit la découverte de la théorie de la gravitation par M. Einstein — nous apprend à apprécier pleinement la portée, a pour conséquence que la *Théorie des surfaces* de Darboux est maintenant une pièce d'inventaire aussi indispensable dans la bibliothèque de tout mathématicien que, pour donner d'autres exemples, le *Cours d'Analyse* de M. Camille Jordan, ou le *Traité d'Analyse* de M. Picard et la *Mécanique céleste* de Poincaré.

Le géomètre allemand Weingarten, connu par ses travaux pleins de mérite sur la théorie des surfaces, a donné, dans les *Fortschritten der Mathematik* (Bd. 19, 25, 29), une analyse détaillée et pénétrante des deux ouvrages de Darboux

cités ci-dessus. Nous devons nous contenter ici de nommer quelques sujets isolés choisis parmi les vastes et riches matières exposées dans la *Théorie des surfaces:*

Livre I. Théorie cinématique des courbes et des surfaces, avec emploi du trièdre mobile. Réduction de l'étude des déplacements à un et à deux paramètres d'un corps solide à l'intégration d'équations de Riccati.

Livre II. Théorie des coordonnées pentasphériques et leur application à la théorie générale des cyclides.

Livre III. Ici l'auteur développe, d'une façon qui n'a pas été surpassée jusqu'à ce jour, la théorie des surfaces minima; c'est dans cet exposé que pour la première fois les résultats de Monge d'une part, et ceux de Weierstrass et de M. Schwarz de l'autre sont réunis avec les doctrines de Lie en un tout organique.

Livre IV. Théorie des congruences de droites. Relation des surfaces focales de ces congruences avec la méthode de transformation des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre qui est due à Laplace, et généralisation de la méthode imaginée par Riemann, à propos du problème de la propagation des ondes sonores.

Livre V. Étude du calcul des variations.

Livre VI. Ici figure le chapitre classique qui traite du plus court chemin entre deux points d'une surface, ainsi qu'une étude des notions de représentation géodésique et de courbure géodésique.

Livre VII. Paramètre différentiel de Beltrami et théorèmes de M. Weingarten. Géométrie sur les surfaces à courbure constante négative.

Livre VIII. Déformation infiniment petite et représentation sphérique. Surfaces dont les lignes de courbure sont planes.

En terminant, nous voulons encore dire quelques mots pour rappeler les hautes capacités administratives et organisatrices de Darboux. Darboux a été pendant dix ans Doyen de la Faculté des Sciences; en remplissant ces fonctions, il a dirigé, au milieu des plus grandes difficultés, la construction de la nouvelle Sorbonne, et s'est acquis la reconnaissance de la Faculté comme aucun autre doyen avant lui. En outre, il a réorganisé, en qualité de membre du *Conseil supérieur de l'Instruction Publique,* l'enseignement des mathématiques sur des bases nouvelles, et parmi les idées et les efforts de M. Félix Klein il y en a beaucoup qui tirent leur origine de l'influence inspiratrice de Darboux. Il a aussi avec beaucoup d'ardeur consacré son énergie à l'Association internationale des Académies scientifiques.

DARBOUX'S ANTEIL AN DER GEOMETRIE[1]

VON

L. P. EISENHART

in PRINCETON.

GASTON DARBOUX wurde 1842 in Nîmes geboren, einer den Mathematikern interessanten Stadt, weil hier von 1819 bis 1831 GERGONNE seine »Annales« herausgab und überdies einen grossen Einfluss auf die Entwicklung der Geometrie ausübte. Mit achtzehn Jahren ging DARBOUX nach Paris, an dessen geistigem Leben er 57 Jahre lang einen hervorragenden Anteil nehmen sollte. Als Student an der Ecole polytechnique und später an der Ecole normale fiel er durch seine ungewöhnliche mathematische Befähigung auf. Sein seltenes Geschick in der Darstellung sichterten ihm bald einen Ruf als Lehrer, und so bekam er frühzeitig erstrebenswerte Ämter. Im Jahre 1880 wurde er CHASLE's Nachfolger auf dem Lehrstuhl für höhere Geometrie an der Sorbonne, vier Jahre später wurde er Membre de l'Institut, und 1889 übernahm er die Pflichten eines Doyen de la Faculté des sciences. Nach BERTRAND's Tode im Jahre 1900 wählte man ihn zum ständigen Sekretär der Académie des Sciences, ein Amt, das er mit grosser Gewissenhaftigkeit bis zu seinem Tode verwaltete. Wir können auf die zahllosen Ehrungen, die man ihm erwies, und auf die Ämter, die er im Laufe der Jahre übernahm, nicht näher eingehen, wir wollen uns vielmehr seiner Lebensarbeit auf dem Gebiete der Geometrie zuwenden.

Bereits während seiner Studienzeit an der Ecole normale, im Jahre 1864, veröffentliche er in den »Nouvelles Annales«[2] seine ersten Abhandlungen. Es ist interessant, dass wir bei genauerer Betrachtung dieser beiden Abhandlungen in ihnen bereits Keime seines späteren Lebenswerkes finden. Die erste behandelt die ebenen Schnitte des Wulstes. Es wird gezeigt, dass die Kurve von der vier-

[1] Übersetzung der am 6. September 1917 vor der vereinigten Sitzung der »American Mathematical Society« und der »Mathematical Association of America« in Cleveland gehaltenen Vorlesung (Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 24, 1918, p. 227).

[2] Sér. 2, t. 3, 1864, p. 156, 199.

ten Ordnung ist mit den unendlich fernen, imaginären Kreispunkten als Doppelpunkten, dass 16 Brennpunkte im Sinne PLÜCKER's vorhanden sind, von denen vier reell sind und auf einem Kreise liegen, dass eine homogene, lineare Relation besteht zwischen den Abständen jedes Kurvenpunktes von dreien dieser Brennpunkte, und dass eine Inversion in bezug auf jeden dieser Brennpunkte als Pol die Kurve in ein Cartesisches Oval transformiert.

In der zweiten Abhandlung betrachtet DARBOUX den Schnitt einer Kugel mit einer Fläche zweiter Ordnung. Durch die Schnittkurve gehen vier Kegel zweiter Ordnung. Die Tangentialebenen des Kegels schneiden die Kugel in Kreisen, die die Kurve doppelt berühren. Diejenigen vier dieser Ebenen, die auch die Kugel berühren, bestimmen vier Kreise vom Radius Null, die die Kurve doppelt berühren und auf einem Kreise liegen. Die Entfernungen je dreier von ihnen von jedem Kurvenpunkte stehen in homogener linearer Relation zueinander. Die Kurve hat daher 16 Brennpunkte, die zu je vieren auf vier Kreisen liegen, von denen sich je zwei orthogonal schneiden. DARBOUX hat diesen Kurven und ihren durch Transformation entstehenden Kurven den Namen zirkulare Kurven gegeben. Sie sind sphärisch oder eben und von der vierten Ordnung. Speziell sind die ebenen Schnitte des Wulstes und das Cartesische Oval zirkulare Kurven, ebenso die Cissoide, die Lemniskate, die Kreiskubik und andere bekannte Kurven.

Im Jahre 1872 veröffentliche DARBOUX seine erste grössere Arbeit »Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires». Sie besteht aus fünf Teilen, deren einer sich mit der Diskussion der zirkularen Kurven beschäftigt.

Als DARBOUX auf der Ecole Normale war, wurde er mit den Schriften LAMÉ's, DUPIN's und BONNET's über dreifach orthogonale Systeme von Flächen bekannt, einem Gebiete, mit dem sein Name für immer verknüpft bleiben wird. Das beste Beispiel eines orthogonalen Flächensystems waren damals die konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Schon viele Jahre früher hatte KUMMER sich mit Scharen von ebenen Kurven beschäftigt, die durch eine Gleichung $f(x, y, a) = 0$ definiert sind, wobei a der Parameter der Schar ist, und durch jeden Punkt der Ebene zwei Kurven der Schar gehen, die sich orthogonal schneiden. Er fand, dass die Kurven dieser Scharen die Eigenschaft haben, konfokal zu sein. Um dieses Ergebnis zu verallgemeinern, suchte DARBOUX die dreifach orthogonalen Flächensysteme, bei denen jede Fläche durch eine einzige Gleichung definiert wird, die den Parameter λ enthält. Er fand, dass die Schar durch die Gleichung

$$(1)\qquad (x^2 + y^2 + z^2)^2 + \frac{\alpha\lambda - 4h}{\alpha - \lambda} x^2 + \frac{\beta\lambda - 4h}{\beta - \lambda} y^2 + \frac{\gamma\lambda - 4h}{\gamma - \lambda} z^2 - h = 0$$

definiert ist, worin α, β, γ und h Konstante und λ der Parameter des Systems sind. Jede Fläche eines so definierten Systems, die von DARBOUX später Zykliden genannt wurden, hat die folgenden Eigenschaften: sie ist von der vierten Ordnung und hat den unendlich fernen Kreis als Doppelkurve; sie wird von jeder Kugel in einer zirkularen Kurve geschnitten; auf fünf verschiedene Arten ist sie die Einhüllende einer zweifachen Schar von Kugeln, deren Mittelpunkte eine fixe Fläche zweiter Ordnung beschreiben, und die eine fixe Kugel orthogonal schneiden; endlich schneidet jede der doppelt berührenden Kugeln die Fläche in zwei Kreisen. Diese Ergebnisse wurden der französischen Akademie der Wissenschaften am 1. August 1864[1] vorgelegt. Am gleichen Tage verkündete MOUTARD der Akademie die Entdeckung desselben Systems. Er war mit dem Studium von Flächen beschäftigt, die durch Inversion in sich selbst transformiert werden, und fand, dass die Flächen vierter Ordnung mit dem unendlich fernen Kreise als Doppelkurve auf fünf verschiedene Arten in sich selbst transformierbar sind. Während er die Krümmungslinien dieser Flächen suchte, fand er das dreifache System der Zykliden.

Nach der Entdeckung dieses orthogonalen Systems stellte DARBOUX das lineare Element des Raumes durch die Parameter eines solchen Flächensystems dar und fand, wie im Falle der konfokalen Flächen zweiter Ordnung, dass die Schnittkurven auf jeder Fläche ein isometrisches System von Kurven bilden. Das berühmte Theorem von DUPIN, dass drei Systeme orthogonaler Flächen einander in Krümmungslinien schneiden, hat DARBOUX durch die folgende Ergänzung erweitert:

Wenn zwei orthogonale Flächenscharen sich in Krümmungslinien schneiden, existiert eine dritte Schar, die zu den beiden ersten orthogonal ist.

Mit Hilfe dieses Theorems konnte DARBOUX die Bedingung dafür aufstellen, dass eine Flächenschar, die durch die Gleichung $\varphi(x, y, z) = \alpha$ definiert ist, einem dreifachen System angehört. Es muss φ eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln sein, doch wurde diese Gleichung wegen ihrer komplizierten Form nicht ausgerechnet. DARBOUX veröffentlichte diese Ergebnisse 1866 in seiner klassischen Abhandlung »Sur les surfaces orthogonales«,[2] die er später als Dissertation vorlegte. Diese Abhandlung enthält auch die Bestimmung eines orthogonalen Systems, dessen Krümmungslinien eben sind, und den unrichtigen Satz, dass die dreifache Zyklidenschar (1), die das System konfokaler Flächen zweiter Ordnung als speziellen Fall enthält,

[1] Comptes Rendus, t. 59, 1864, p. 240. Die Einzelheiten wurden in den Annales de l'Ecole Normale, t. 2, 1865, p. 55—69 veröffentlicht.

[2] Annales de l'Ecole Normale, t. 3, 1866, p. 97—141.

das einzige Beispiel eines dreifachen Systems isometrischer Flächen ist. DARBOUX hat in einer späteren Abhandlung diesen Irrtum richtig gestellt.

Im Jahre 1872 nahm CAYLEY das Problem der orthognalen Systeme in Angriff und gab der Differentialgleichung des dreifachen Systems die Form, die jetzt mit seinem Namen verknüpft ist, und die deshalb besonders wertvoll ist, weil sie in einfacher Weise die Bestimmung spezieller orthogonaler Systeme gestattet. DARBOUX gewahrte schnell den Wert der CAYLEY'schen Arbeit. Einerseits untersuchte er die CAYLEY'sche Gleichung analytisch und dehnte sie auf n Variable aus, andererseits wandte er diese Gleichung auf die Bestimmung orthogonaler Systeme an, bei denen die Flächen einer Schar zweiter Ordnung sind, oder bei denen die Flächen einer Schar eine Symmetrieebene haben, sowie auf orthogonale Systeme, die eine gegebene Fläche enthalten, und in ihrer Gleichung vier willkürliche Funktionen einer einzigen Variabeln führen. Diese Systeme wurden im ersten und zweiten Teile seiner zweiten grossen Abhandlung über orthogonale Systeme veröffentlicht.[1] Im dritten Teile verallgemeinerte er die LAMÉ'schen Gleichungen auf den n-dimensionalen Raum und untersuchte gewisse hierauf bezügliche spezielle Aufgaben. Die letzten fünfzig Seiten dieser Abhandlung beschäftigen sich mit der Bestimmung orthogonaler Systeme isometrischer Flächen, einer Aufgabe, die er gelöst zu haben glaubte. Er fand andere Systeme als die Zykliden, doch können wir uns auf weitere Einzelheiten nicht einlassen. Wir haben uns mit diesen beiden Abhandlungen eingehender beschäftigt, weil sie für die Entwicklung der Theorie der orthogonalen Systeme so wichtig sind und unter den Arbeiten DARBOUX's einen hervorragenden Platz einnehmen. Zwanzig Jahre später veröffentlichte er seine »Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes»,[2] die vieles aus der oben erwähnten Theorie enthalten. In der zweiten Abhandlung finden sich auch Bemerkungen über dreifach konjugierte Flächensysteme, die später von GUICHARD und TZITZEICA untersucht und ausführlich von DARBOUX in der zweiten, 1910[3] herausgegebenen Auflage des oben erwähnten Werkes diskutiert worden sind. Hier und in späteren Abhandlungen lieferte DARBOUX weitere Beiträge zur Theorie der orthogonalen Systeme.

Seit der Zeit, da GAUSS die krummlinigen Koordinaten einer Fläche einführte, und die absolute Invariante des linearen Elements entdeckte, das die Krümmung der Fläche misst, haben sich die Geometer mit der jetzt noch unge-

[1] Annales de l'Ecole Normale, sér. 2, t. 7, 1878, p. 97—151, 227—261, 275—349.

[2] Eine ausfürliche Inhaltsangabe dieses Werkes wurde von E. O. LOVETT im Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 5, 1899, p. 185—202 veröffentlicht.

[3] Eine Übersicht dieser Ausgabe von WILCZYNSKI ist im Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 20, 1914, p. 247—253 veröffentlicht.

lösten Aufgabe beschäftigt, alle Flächen mit einem gegebenen Linienelement zu finden, d. h. mit dem Problem der abwickelbaren Flächen. DARBOUX zeigte 1872,[1] dass die rechtwinkligen Punktkoordinaten einer Fläche mit gegebenem Linienelement die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung AMPÈRE'schen Typs sind, sowie dass, wenn eine Lösung dieser Gleichung bekannt ist, zwei andere durch Quadratur gefunden werden können, und dass diese drei Lösungen die Koordinaten einer Fläche mit dem gegebenen Linienelement sind. MOUTARD und RIBAUCOUR, die die abwickelbaren Flächen Ende der sechsziger Jahre untersuchten, zeigten, dass, wenn zwei abwickelbare Flächen gegeben sind, sofort zwei andere Flächen S und S_1 gefunden werden können, deren rechtwinklige Koordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Bedingung

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0 \tag{2}$$

erfüllen. 1873 teilte DARBOUX der Société mathématique de France mit,[2] dass die Aufgabe der infinitesimalen Deformation einer Fläche S gleichbedeutend ist mit der Bestimmung der Flächen S_1, deren Koordinaten die Gleichung (2) erfüllen. In seinem bekannten Werk »Leçons sur la théorie générale des surfaces«[3] zeigte er, dass, wenn die Gleichung (2) für eine Fläche S integriert worden ist, die infinitesimale Deformation von S für Glieder jeder Ordnung ein Problem der Quadratur allein ist. WEINGARTEN[4] führte die Lösung der Gleichung (2) auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurück, deren Gleichung der Charakteristiken die asymptotischen Linien der gegebenen Fläche bestimmt. Sind die letzteren parametrisch, so hat die Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\,\partial v} = \mu(u, v)\,\Theta. \tag{3}$$

Stehen zwei Flächen S und S_0 in einer solchen Beziehung zueinander, dass ihre Tangentialebenen in entsprechenden Punkten parallel sind, und die asymptotischen Linien einer jeden Fläche einem konjugierten System auf der andern entsprechen, so nennt man die Flächen assoziiert. Dieser Gedanke rührt von BIANCHI her,[5] der nachwies, dass die Bestimmung einer zu einer gegebenen assoziierten Fläche gleichbedeutend mit der Integration der Gleichung (2) ist. Nach Feststellung

[1] Sur une classe remarquable etc., p. 14, 181.
[2] Diese Mitteilung wurde nicht veröffentlicht.
[3] T. 4, p. 5. Wir werden diese Schrift künftig immer als »Leçons« zitieren.
[4] Crelle, Bd. 100, 1886, p. 296—310.
[5] Lezioni di geometria differenziale, Pisa, 1894, p. 279.

des reziproken Charakters der Beziehungen zwischen S und S_1 und zwischen S und S_0 fand Darboux neun andere Flächen, die sich aus jeder Lösung der Gleichung (2) ergaben; alle zwölf Flächen bilden ein geschlossenes System.

Wir würden uns eine grosse Nachlässigkeit zu schulden kommen lassen, wenn wir nicht auf die reizvollen Kapitel im vierten Bande der »Leçons» hinwiesen, in denen Darboux das Abrollen einer abwickelbaren Fläche auf einer andern behandelt und dabei auf die geometrischen Gebilde eingeht, die von Punkten, Linien usw. erzeugt werden, die mit der rollenden Fläche fest verbunden sind. Auch Ribaucour hat an der Entwicklung dieses Gebietes Anteil und ebenso in der letzten Zeit Bianchi. Als besonders schönes Beispiel aus dieser Theorie zitieren wir den folgenden Satz: S und S_1 seien zwei abwickelbare Flächen; rollt S auf S_1, so schneidet eine Kugel mit dem Radius Null, deren Mittelpunkt fest mit S verbunden ist, die gemeinsame Tangentialebene der beiden Flächen in einem Kreise; diese Kreise bilden ein zirkulares System.

Die Idee der sphärischen Darstellung einer Fläche stammt von Gauss. Die Krümmungslinien einer Fläche werden auf der Kugel durch ein orthogonales Kurvensystem dargestellt. Darboux beschäftigte sich gelegentlich mit der Aufgabe, die Flächen zu bestimmen, deren Krümmungslinien auf der Kugel durch ein gegebenes orthogonales System dargestellt werden. Er nannte dieses Problem die Aufgabe der sphärischen Darstellung. Durch die Benutzung der einfachen Ausdrücke für die rechtwinkligen Koordinaten eines Kugelpunktes in Parametern in bezug auf die imaginären Erzeugenden zeigte er, dass die Aufgabe auf die Lösung einer Differentialgleichung von der Form (3) zurückführbar ist. Er schrieb mehrere Abhandlungen über spezielle Formen dieser Gleichung, über die geometrische Bedeutung dieser Untersuchungen und über Moutard's Untersuchungen der Gleichung (3).

Moutard hatte bekanntlich gezeigt, dass eine Zyklide vierter Ordnung auf fünf verschiedene Arten die Enveloppe einer zweifachen Schar von Kugeln ist, die zu einer fixen Kugel S orthogonal sind, und deren Mittelpunkte eine Fläche zweiter Ordnung beschreiben. Er hat ferner gezeigt, dass die fünf Flächen zweiter Ordnung, die auf diese Weise mit der Zyklide assoziiert sind, konfokal sind, und dass je zwei der fünf Kugeln S einander rechtwinklig schneiden. Bei der Mitteilung seiner Entdeckung des orthogonalen Systems von Zykliden wies Moutard darauf hin, dass für alle Zykliden dieses Systems diese fünf Kugeln und diese fünf Flächen zweiter Ordnung dieselben sind. Unter Benutzung dieser Ergebnisse zeigte Darboux,[1] dass die Gleichung des Systems in der Form

[1] Sur une classe remarquable etc., p. 134. Der vierte und fünfte Teil geben eine Darstellung der Geometrie der Zykliden.

(4) $$\sum_{i=1}^{5} \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i} = 0$$

geschrieben werden kann, worin S_i die Potenz des Punktes in bezug auf die Kugel S_i ist, R_i ihr Radius, a_i eine Konstante und λ der Parameter des Systems. Da diese Gleichung notwendig dritten Grades ist, ist der Koeffizient von λ^4 identisch Null. Wir haben daher die Identität

(5) $$\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0$$

für jeden Punkt des Raumes. DARBOUX sah in dem Ausdruck $\frac{S_i}{R_i}$, der den obigen Bedingungen unterworfen ist, einen neuen Koordinatentyp, der für gewisse Aufgaben recht praktisch ist. So wurden die pentasphärischen Koordinaten entdeckt. Ein sie enthaltender wichtiger Satz ist der folgende: Wenn fünf partielle Lösungen $x_1, \ldots x_5$ einer Gleichung von der Form $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \Theta}{\partial u} + B \frac{\partial \Theta}{\partial v} + C\Theta$ die Bedingung $\Sigma x_i^2 = 0$ erfüllen, so sind die x_i die pentasphärischen Koordinaten einer Fläche, auf der die parametrischen Kurven die Krümmungslinien sind. Wenn speziell die obige Gleichung auf die Form (3) reduzierbar ist, ist die Fläche isometrisch. Hieraus haben DARBOUX und GUICHARD wichtige Folgerungen gezogen.

Aus den GAUSS'schen Gleichungen folgt, dass die nichthomogenen Koordinaten einer Fläche x, y, z in bezug auf ein konjugiertes System $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ eine Gleichung der LAPLACE'schen Form erfüllen,

(6) $$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = a \frac{\partial \Theta}{\partial u} + b \frac{\partial \Theta}{\partial v}$$

die man die Punktgleichung des Systems nennt. DARBOUX lenkte die Aufmerksamkeit auf die Tatsache, dass jede Funktion $\varphi(x, y, z)$ im allgemeinen ein konjugiertes System bestimmt, das man durch die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades findet. Die entsprechende Gleichung (6) lässt dann sowohl die Lösung φ als auch die Lösungen x, y und z zu. Besonders sind die Krümmungslinien jeder Fläche durch die Eigenschaft charakterisiert, dass sie das konjugierte System bilden, für das $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$ ist. GUICHARD hat diese Betrachtung verallgemeinert und die bemerkenswerte Klasse von konjugierten Systemen n, O betrachtet, die durch die Eigenschaft definiert sind, dass die Punkt-

gleichung eines solchen Systems $n - 1$ Lösungen $t_1, \ldots t_{n-1}$ zulässt, und dass $x^2 + y^2 + z^2 - t_1^2 - \cdots - t_{n-1}^2$ auch eine Lösung ist.

Darboux ist ein so erfolgreicher Forscher in der Differentialgeometrie gewesen, dass man vielleicht auf den Gedanken kommen kann, seine geometrische Arbeit beschränke sich auf dieses Gebiet. Diese Vermutung wird sofort durch den Hinweis widerlegt, dass der grösste Teil seiner Behandlung der zirkularen Kurven und der Zykliden sich nicht der differentialen Methode bedient. Wir erwähnen auch seine Untersuchungen der Poncelet'schen Polygone und ihre Verallgemeinerung auf Polygone, die Ellipsoiden ein- und umbeschrieben sind, sowie einige Untersuchungen über die Wellenfläche. Es ist eine interessante Tatsache, dass seine bereits erwähnte erste Abhandlung und seine letzte, »Principes de géométrie analytiques», die gerade erschienen ist,[1] sich nur mit finiter Geometrie befassen.

Im Jahre 1868 veröffentlichte Beltrami[2] seine fundamentalen Untersuchungen über die Geometrie Lobatschewsky's, Bolyai's und Gauss' in geodätischen Kurven auf einer pseudosphärischen Fläche. Was Cayley in seinem »6. Memoir on Quantics» für die unendlich fernen Gebilde in der euklidischen Geometrie getan hatte, zeigte Klein drei Jahre später[3] für die nichteuklidische Geometrie. Diese neuen Gedanken machten auf Darboux einen entscheidenden Eindruck. Er benutzte Cayley's Messungen in der Theorie der Zykliden, wie sie in seiner ersten Abhandlung dargeboten werden, und in einer angehängten Note behandelt er die geodätischen Kurven und Krümmungslinien in Cayley'scher Geometrie. Diese Gedanken sind vollständiger im letzten Kapitel des dritten Bandes seiner Leçons entwickelt und werden dort auf die Bestimmung von Flächen angewendet, auf denen ein konjugiertes System von Kurven existiert, deren Tangenten zugleich Tangenten einer Fläche zweiter Ordnung sind. Einer der fünf Teile der Principes de géométrie analytique bietet eine sehr klare Darstellung der Cayley'schen Geometrie, in der auch die Verschiebungen und die Trigonometrie behandelt werden. Aber aus unbekannten Gründen beschränkte Darboux seine Untersuchungen auf den euklidischen Raum, und er hat daher keinen Anteil an der Entwicklung der nichteuklidischen Differentialgeometrie.

Darboux war ein lebhafter Verfechter des Gebrauchs imaginärer Elemente in der Geometrie. Er glaubte, dass ihr Gebrauch in der Geometrie ebenso notwendig sei wie in der Analysis. Er dachte dabei an den Erfolg, mit dem sie

[1] Diese Abhandlung ist in der Tat eine erweiterte Ausgabe der ersten. Der Verfasser dieser Zeilen will demnächst eine ausfürliche Inhaltsangabe veröffentlichen.

[2] Giornale di Mathematiche, t. 6, 1868, p. 284—312.

[3] Über die sog. nichteuklidische Geometrie, Math. Annalen, Bd. 4, 1871, p. 573—625.

in der Lösung des Problems der Minimalflächen verwendet worden sind. Von Anfang an benutzte er in seinen Abhandlungen die isotropische Linie, die Kugel mit dem Radius Null (den isotropischen Kegel) und die allgemeine isotropische abwickelbare Fläche. In seiner ersten Abhandlung über orthogonale Flächensysteme zeigte er, dass die Einhüllende der Flächen eines solchen Systems, wenn sie durch eine einzige Gleichung definiert ist, eine isotropische Abwickelbare ist. Wir haben Beispiele des Gebrauches dieser Elemente in der Theorie der abrollenden Flächen und in der Lösung des Problems der sphärischen Darstellung gegeben. Ein anderes treffendes Beispiel liefert das folgende Theorem, das eine allgemeine Methode zur Gewinnung von Flächen mit ebenen Krümmungslinien in dem einen System darstellt: Wenn eine abwickelbare Fläche D über eine abwickelbare Fläche D_1 so rollt, dass alle Punkte einer Erzeugenden gleichzeitig zur Berührung kommen, so wird eine isotropische abwickelbare Fläche, die fest mit D verbunden ist, durch sukzessive Berührungsebenen längs Krümmungslinien der Fläche geschnitten, die sie enthält.

In der Darstellung der Lebensarbeit eins so fruchtbaren Mathematikers, wie es Darboux war, kann man nur die *Ergebnisse* seiner Untersuchungen, nicht aber ihre *Einzelheiten* darstellen. Es wäre jedoch nicht zu verantworten, wenn wir nicht auch noch auf seine *Methoden* eingehen wollten. Darboux rühmt an Combescures, dass er der erste gewesen ist, der die Betrachtungen der Kinematik auf die Untersuchungen in der Flächentheorie angewendet hat, woraus dann die Verwendung beweglicher Koordinatensysteme von selbst folgt. Darboux hat uns jedoch die Tragweite dieser Methoden erst eindringlich vor Augen geführt, hat sie systematisch dargestellt und entwickelt. Diese Darstellung findet sich in den ersten beiden Bänden seiner Leçons mit Anwendungen auf die Erörterung spezieller Flächentypen und orthogonaler Systeme. Die Methode ist ausgibig von seinen Schülern benutzt worden, und sie wird sicher von jedem Bearbeiter der Differentialgeometrie herangezogen werden, der mit den Methoden dieser Disziplin vertraut ist.

Darboux's Genie beruhte auf einer seltenen Vereinigung von geometrischer Vorstellungskraft und analytischem Geschick. Ihm waren alle, die nur geometrisches Raisonnement bei der Behandlung geometrischer Probleme verwendeten, ebenso unsympatisch, wie alle, die glaubten, dass diese Fragen rein analytisch gelöst werden müssten. Seine geometrischen Beweise für die Sätze über die rollenden Flächen sind ebenso rein, wie sie einfach und schön sind. Nicht weniger glänzend sind seine verschiedenen Zurückführungen geometrischer Probleme auf eine gemeinsame analytische Basis und ihre Entwicklung und Lösung von einem gemeinsamen Gesichtspunkt aus. Manchmal finden wir in seinen Untersuchungen

eine Vereinigung beider Methoden. Diese Erscheinung tritt in verschiedenen Teilen seiner Abhandlungen zu Tage, besonders in einer von ihnen, in der er das Problem löst, die zweifache Schar von Sphären zu finden, für die die Korrespondenz zwischen den beiden Teilen der einhüllenden Fläche konform ist.[1] Er zeigt durch geometrische Betrachtungen, dass die Krümmungslinien auf den beiden Teilen korrespondieren, und dann mit Hilfe der Analysis, dass sie isometrische Flächen sind. Hier wird die Transformation isometrischer Flächen gezeigt, die Bianchi die Transformation D_m genannt hat, sowie die assoziierte Deformation der Flächen zweiter Ordnung. Wir glauben jedoch trotzdem, dass Darboux's Interesse mehr in der infinitesimalen Geometrie lag. Für jemanden, der ein so ausgesprochenes analytisches Geschick hat, ist das nur natürlich. Die Entdeckungen, mit denen Darboux die Analysis bereicherte, während er geometrische Probleme zu lösen versuchte, können wir hier weder erörtern, noch auch nur aufzählen. Zweifellos findet sich in seinem Lebenswerk sein Glaube verwirklicht, »dass die Verbindung zwischen Geometrie und Analysis nützlich und fruchtbar ist, und dass diese Vereinigung vielleicht eine Bedingung für das Gedeihen beider ist».

Wir haben versucht, einen Überblick über die Lebensarbeit Darboux's auf dem Gebiete der Geometrie zu geben. Seine Arbeiten sind nicht nur inhaltlich, sondern auch in der Darstellung abgerundet und vortrefflich. Diese Eigenschaften Darboux's im Verein mit seiner ganzen Persönlichkeit machten ihn zu einem hervorragenden Lehrer, so dass stets eine grosse Anzahl von fähigen Schülern um ihn versammelt war. Wie Monge war er nicht mit Entdeckungen zufrieden, es war auch ihm ein Bedürfnis, *Schule* zu machen. Wie sein berühmter Vorgänger, bildete er eine ganze Reihe von Geometern aus, wie Guichard, Koenigs, Cosserat, Demoulin, Tzitzeica und Demartres. Ihre glänzenden Untersuchungen sind der beste Beweis seiner Unterrichtstätigkeit. Sein Geist wird in diesen Männern weiterleben sowie in allen denen, die zu seinen Werken greifen werden, um sich dort Anregung und Leitgedanken zu holen. An Darboux wird sich wahrscheinlich auch die Prophezeihung bewahrheiten, die Lagrange von Monge aussprach: »Mit seiner Geometrie wird sich dieser Teufelskerl noch unsterblich machen».

[1] Sur les surfaces isothermiques, Annales de l'Ecole Normale, ser. 3, t. 16, 1899, p. 491—508.

SUR LA RÉPRESENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME D'UNE FONCTION MONOGÈNE.

(Sixième note.)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

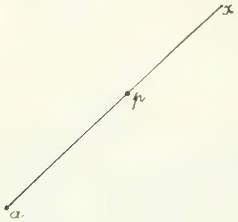
Ma cinquième note publiée sous ce titre a paru en 1904. A peu près à la même époque j'avais déjà en portefeuille une rédaction préliminaire de la suite de mes recherches en vue de nouvelles »notes». Toutefois la publication que je me proposais de faire de ces dernières a été retardée par la maladie ainsi que par la pensée que ce travail prendrait la place d'autres études envoyées par d'éminents auteurs pour être publiées dans mes »Acta».

Des années ayant passé depuis, mes articles ont perdu une grande partie de leur actualité et de leur intérêt. Il me semble pourtant qu'ils peuvent encore avoir une certaine valeur comme appartenant tout à fait à la sphère de pensées qui distingue la théorie des fonctions analytiques telle qu'elle a été formulée et exposée par CARL WEIERSTRASS. Au moment où je reprends la publication de mes »notes», je prie ceux qui m'ont prêté leur précieux concours et sans lesquels je n'aurais pu mettre sur pied ma rédaction finale, et tout particulièrement M. E. PHRAGMÉN, M. T. CARLEMAN, maître de Conférences à l'Université d'Upsal, M. J. MALMQUIST et M. M. RIESZ de recevoir mes plus chaleureux remerciements. Comme je n'ai assurément aucun droit à la priorité en ce qui concerne les publications faites par d'autres après la rédaction déjà ancienne de mes notes, je ne me considère pas comme tenu d'entreprendre une comparaison critique avec ces travaux, et je me borne par conséquent, dans la mesure où ces derniers me sont connus, à y renvoyer purement et simplement le lecteur.

Sur la convergence de l'expression d'une fonction analytique en dehors de l'étoile principale de la fonction.

INTRODUCTION.

J'ai introduit dans le temps la nouvelle conception d'*étoile* de la manière suivante. En partant d'un point a, nous menons une demi-droite quelconque ax, sur laquelle nous choisissons suivant une loi déterminée un point p, distinct de a (le point p peut d'ailleurs être à l'infini sur ax). Faisons tourner ax d'un angle égal à 2π autour du centre a, le segment ap engendre alors une aire qui embrasse a, et qui sera appelée une *étoile de centre a;* le point p sera dit un *sommet* de l'étoile et l'ensemble des sommets sera dit la *frontière* de l'étoile.



Si entre une fonction monogène $F(x)$, régulière au point a, et une étoile ayant a pour centre existe une relation telle que le sommet correspondant à chacune des demi-droites qui engendrent l'étoile soit le premier point singulier de $F(x)$ auquel on arrive en partant du point a et en faisant glisser x le long de la demi-droite, cette étoile est appelée l'*étoile principale* de $F(x)$. Elle est désignée par la lettre A et la branche fonctionnelle qui y correspond est désignée par $FA(x)$.

Soit

(1) $$k_0, k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$$

une suite infinie de constantes soumises à la condition de Cauchy

(2) $$\lim \sqrt[\nu]{|k_\nu|} = \frac{1}{r},$$

r étant une quantité positive.

La théorie des fonctions analytiques telle qu'elle fut conçue par Weierstrass est basée sur la considération de la série

(3) $$\mathfrak{P}(x-a) = \sum_0^\infty k_\nu (x-a)^\nu,$$

où x est la variable et a une constante. Cette série définit une fonction analytique $F(x)$ dans une étoile constituée par un cercle de centre C et de rayon r. La branche fonctionnelle de $F(x)$ représentée par la série $\mathfrak{P}(x-a)$ est désignée par $FC(x)$. On sait que par prolongement analytique de la branche $FC(x)$ on obtient la fonction $F(x)$ tout entière partout où elle reste régulière. Dans une suite de mémoires, j'ai montré qu'on peut obtenir de différentes manières des expressions qui sont formées des constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$, tout comme la série $\mathfrak{P}(x-a)$, et de certains coefficients numériques indépendants de la fonction, et qui représentent d'une manière univoque non seulement la branche $FC(x)$, mais encore la branche entière $FA(x)$.

Les plus élégantes de ces expressions, au point de vue formel, me paraissent être

$$(4)\qquad FA(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}} \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$ [1]

$$(5)\qquad FA(x) = \lim_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega(x-a))\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\omega} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha.\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}.\omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.(x-a)^\nu;\quad F_\alpha(\omega x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{(\omega x)^\nu}{\underline{|\alpha.\nu}}$$ [2]

$$(6)\qquad FA(x) = \lim_{\alpha=0} \left(k_0 + \frac{k_1}{\underline{|\alpha.1}}(x-a) + \frac{k_2}{\underline{|\alpha.2}}(x-a)^2 + \cdots\right);\ \underline{|\alpha.\nu} = \Gamma(\alpha\nu+1).$$ [3]

Les deux expressions (4) et (6) sont de la forme $\lim\limits_{\omega=\infty} G(x;\omega)$, $G(x;\omega)$ étant une fonction entière (rationnelle dans la première expression, transcendante dans la seconde) dont les coefficients sont des fonctions linéaires de $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n$ avec des coefficients numériques qui dépendent de ω comme paramètre, mais sont indépendants aussi bien des constantes $k_0, k_1, \ldots k_n$ que de la variable x.

[1] »Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Note 1. Acta Math., t. 23. 1899.

[2] Formule (109), page 161, Note 5 de ce travail. Acta Math., t. 29. 1904.

[3] »Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe.» Atti del IV Congreso Mat. Roma 1908. Page 82.

MM. Borel et Phragmén ont montré[1] que c'est impossible de former une telle expression qui, pour tout choix des constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ $(\lim_n |\sqrt[n]{k_n}| = \text{fini})$, cesse d'être convergente en dehors de l'étoile A.

M. H. von Koch a repris ce problème d'un point de vue différent.[2] Il s'est demandé: est-il possible de former avec les seules constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ et avec des coefficients numériques indépendants de ces constantes et de la variable une expression $\lim_{n=\infty} G(x; n)$ qui représente la fonction définie par les k_ν chaque fois qu'on se trouve en dehors des sommets de l'étoile A, sur le prolongement d'une demi-droite génératrice où la fonction reste régulière?

La solution qu'il a donnée de ce problème est en rapport étroit avec la conception de Weierstrass d'une fonction analytique.

Weierstrass a compté non seulement les points réguliers, mais encore les pôles comme appartenant à la fonction (il les nomme »ausserwesentliche singuläre Stellen»),[3] tandis que tous les autres points, qui ne sont ni des points réguliers ni des pôles, sont singuliers. J'ai proposé de remplacer la conception de Weierstrass par celle que voici:[4] les seuls points devant être comptés comme points singuliers de $F(x)$ sont les points x' tels que, d'une part, il existe dans tout voisinage de x' des points pour lesquels $F(x)$ se comporte d'une façon régulière, et que, d'autre part, il n'existe aucun entourage de x' où une égalité de la forme $F(x) = \mathfrak{P}(x - x')$ ait lieu. Il paraît que cette définition des points singuliers d'une fonction est maintenant généralement admise.

En adoptant la manière de voir de Weierstrass, M. von Koch a généralisé de la manière suivante ma conception d'étoile principale. Il définit une étoile K, dont A fait partie, en prolongeant les différentes demi-droites issues de a

[1] E. Borel, »Addition au mémoire sur les séries divergentes». Annales de l'Ecole Norm. Sup., T. 16, 1889, p. 134.

E. Borel, »Leçons sur les séries divergentes». Paris 1901, p. 172—175.

G. Mittag-Leffler, »Ueber die analytische Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion». Münchener Berichte, 6. März 1915, p. 154—159.

Dans cette dernière note, qui fut publiée pendant que j'étais en convalescence après une grave maladie, il s'est malheureusement glissé une erreur sérieuse sur laquelle M. Oseen a fixé mon attention (cf. »Sur la représentation analytique de la vitesse dans certains problèmes d'hydrodynamique», page 6, note, Nova Acta Soc. Sci. Upsal., Ser. IV, vol. 4, No. 9). La formule (51), page 149, dans la dite note représente seulement $FC(x)$ mais non $FA(x)$.

[2] Helge von Koch, »Applications nouvelles de la fonction exponentielle». Bihang Kgl. Svenska Vet. Akad. Förhandl. 12 février 1902.

Helge von Koch, »Sur le prolongement analytique d'une série de Taylor». Voir ce journal, T. 27, 1903, p. 79—104.

[3] »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.» 1876. Werke, Bd 2, p. 78.

[4] Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes.» Voir ce journal, T. 4, 1884, p. 4.

jusqu'au premier point qui n'est ni un point régulier ni un pôle, au lieu de s'arrêter, comme c'était le cas pour l'étoile A, aussi bien à un pôle qu'à un autre point singulier. Il cherche après, sans connaissance préalable des pôles, à former une expression qui ne contienne pas d'autres éléments empruntés de la fonction que les constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ (propriété appartenant aussi à toutes mes expressions), mais qui soit valable non seulement pour l'étoile A, mais encore pour tous les points réguliers à l'intérieur de l'étoile K. Pour bien saisir son idée, il faut se rappeler qu'on savait bien former, avant M. VON KOCH, une expression qui représentait une fonction uniforme d'une manière univoque non seulement dans tout son domaine de régularité,[1] mais encore dans chaque domaine qui embrassait un nombre dénombrable de singularités;[2] mais alors il était nécessaire de connaître non seulement la position de ces singularités, mais encore l'allure de la fonction autour des singularités.

M. VON KOCH parvient à résoudre son problème en se servant de l'expression

$$\lim_{s=\infty} x^s e^{-x^s} = \begin{matrix} 0; & x \gtrless 1 \\ e^{-1}; & x = 1, \end{matrix}$$

ainsi que d'une espèce de représentation conforme, dont je me suis servi dans plusieurs de mes travaux.[3] M. PAINLEVÉ a énoncé à propos de la publication de M. VON KOCH une autre solution du problème. Il l'obtient en utilisant une fonction auxiliaire toute autre que celle de M. VON KOCH. Sa formule finale paraît aussi plus élémentaire et plus générale que celle de M. VON KOCH.[4]

Je me suis servi moi-même d'une nouvelle fonction auxiliaire, remarquable sous différents rapports. J'exposerai dans le § 1 les propriétés essentielles de cette fonction. Dans le § 2, je donne une nouvelle solution du problème de M. VON KOCH.

Dans le § 3, je m'élève à un point de vue plus général.

[1] Voir mon mémoire de 1884, l. c., ainsi que celui de 1899, Acta Math., T. 23.

[2] Voir mon mémoire de 1884, l. c.

[3] Voir p. ex. Note 3 de ce travail, Acta Math. t. 24. 1900.

[4] PAUL PAINLEVÉ, »Sur le développement des fonctions analytiques en séries de polynomes». Comptes Rendus etc., le 7 juillet 1902. T. 135.

Il semble que M. VON KOCH s'élève dans ses derniers travaux au même degré de généralité que M. PAINLEVÉ. Voir H. VON KOCH, »Sur le prolongement d'une série de Taylor». Arkiv för Matematik, Astr. o. Fys., Bd 12, No. 11, Stockholm 1917. — »Contributions à la théorie du prolongement d'une fonction analytique.» Arkiv f. Mat., Astr. o. Fys., Bd 12, No. 23. Stockholm 1917.

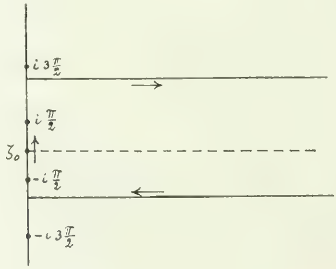
§ 1.

Une nouvelle fonction entière.

On sait que toute fonction entière transcendante peut être rendue aussi voisine qu'on veut d'un nombre quelconque fixe en dehors d'un cercle de rayon arbitrairement grand.[1] Ce fait n'exclut pas qu'il existe des fonctions entières dont le module tend vers une limite bien déterminée égale à zéro quand la variable tend vers l'infini le long d'une demi-droite quelconque issue de l'origine. J'ai donné plusieurs exemples de telles fonctions.[2] Une des plus simples est définie par l'intégrale

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S} e^{e^{\zeta}} \cdot e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{d\zeta}{\zeta - x},$$

l'intégration se faisant le long d'un contour S défini de la manière suivante: S se compose en partie de deux droites parallèles à l'axe réel des ζ, infinies dans le sens positif de celui-ci et situées de l'un ou de l'autre côté de l'axe à une distance comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$, en partie d'une perpendiculaire à l'axe réel réunissant ces parallèles et coupant l'axe en un point arbitraire. L'intégration doit se faire dans le sens direct de droite à gauche.



[1] Karl Weierstrass, »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen». Werke, Bd 2, p. 124.

[2] »Une nouvelle fonction entière.» Comptes Rendus etc. 18 avril 1904. »Sur une classe de fonctions entières.» Verhandl. d. 3. Internat. Math. Kongress. Heidelberg 1904.

L'intégrale converge évidemment quelle que soit la position donnée à x de l'un ou de l'autre côté de la ligne d'intégration. La valeur de l'intégrale ne varie pas si l'on déplace la perpendiculaire à droite ou à gauche du point ζ_0 où elle coupait au commencement l'axe réel, ou si l'on fait varier les distances des deux parallèles à l'axe entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$ pourvu que x reste du même côté du chemin d'intégration.

L'intégrale définit deux fonctions analytiques différentes $E(x)$ et $E(x)$ selon que x est situé du même côté du chemin d'intégration que les points réels négatifs infiniment distants, le *côté négatif* comme nous dirons, ou de l'autre côté, le *côté positif*.

Envisageons d'abord la fonction $E(x)$. On voit qu'elle est régulière pour tout point x qui est à distance finie de la ligne d'intégration, et qu'elle est par conséquent une fonction entière de x. Elle s'approche indéfiniment de zéro quand x tend vers l'infini du côté négatif d'un contour S.

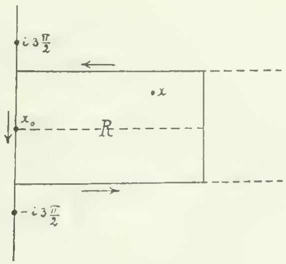
La fonction $\overline{E}(x)$, d'un autre côté, est régulière pour tout point x qui est à distance finie et se trouve entre deux parallèles à l'axe réel menées par les points $i3\frac{\pi}{2}$ et $-i3\frac{\pi}{2}$. Elle s'approche indéfiniment de zéro quand x tend vers l'infini du côté positif d'un contour S.

Soit maintenant x un point à distance finie situé du côté positif d'un contour S donné.

On a

$$(8) \qquad E(x) = E(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{R} e^{e^{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta - x},$$

R étant le chemin d'intégration indiqué dans la figure ci-après, chemin qui entoure le point x.



On voit que les deux fonctions $E(x)$ et $E(x)$ sont liées par la relation

$$(9) \qquad E(x) = e^{e^x} \cdot e^{-e^{e^x}} + \overline{E}(x).$$

La fonction $E(x)$ est par conséquent, tout comme $E(x)$, une fonction entière de x.[1]

Relativement à la fonction $E(x)$ nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 1. »Soit $x_0 (-\infty < x_0 < +\infty)$ un point quelconque sur l'axe réel. La fonction $E(x)$ tend indéfiniment vers zéro quand la variable x tend vers l'infini le long d'une demi-droite quelconque issue de x_0. Soit ω une quantité réelle positive. Si la variable x appartient à un domaine fini quelconque X situé entièrement en dehors de l'axe réel positif, $E(x_0 + \omega x)$ tendra uniformément vers zéro lorsque ω tend vers l'infini.

Il en est de même si le domaine X $(0 < X)$ est une partie quelconque de l'axe réel positif.»

[1] On peut voir de la manière suivante que $E(x)$ n'est pas identiquement nul.

La supposition

$$E(x) = 0$$

amènerait

$$(A) \qquad E(x) = -e^{e^x} \cdot e^{-e^{e^x}}.$$

En posant $x = \xi + i\eta$, on obtient

$$e^{e^x} = e^{e^\xi \cos\eta}(\cos(e^\xi \sin\eta) + i \sin(e^\xi \sin\eta)).$$

Pour un η fixe et incongru à zéro (mod. π), il existe une infinité de valeurs de ξ croissant au dessus de toute limite telles que

$$\cos(e^\xi \sin\eta) = -1.$$

En ces points, on a

$$e^{e^x} = -e^{e^\xi \cos\eta}.$$

On en conclut que

$$\overline{\lim_{\substack{\xi=\infty \\ 0<|\eta|<\frac{\pi}{2}}}} \left| e^{e^x} e^{-e^{e^x}} \right| = \infty.$$

Comme d'autre part

$$\lim_{\substack{\xi=\infty \\ |\eta|<\frac{\pi}{2}}} E(x) = 0,$$

on voit que l'égalité (A) est impossible.

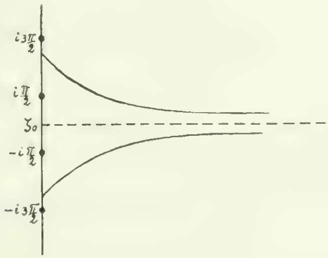
Au lieu de se donner d'abord l'intégrale (7), on aurait pu partir de l'intégrale plus générale

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S_\varkappa} e^{e^{\zeta^\varkappa}}\cdot e^{-e^{e^{\zeta^\varkappa}}}\,\frac{d\zeta}{\zeta-x},$$

où $\varkappa$ est une constante positive plus grande que *un*. Le contour $S_\varkappa$ est alors composé en partie de deux lignes infinies dans le sens positif de l'axe réel:

$$\varrho^\varkappa \sin\varkappa\varphi = a,\ \varrho^\varkappa \sin\varkappa\varphi = -a;\ \frac{\pi}{2} < a < 3\frac{\pi}{2},$$

en partie d'une perpendiculaire à l'axe réel réunissant ces deux lignes. On voit que ces lignes s'approchent d'une manière asymptotique de l'axe réel positif.



Nous désignerons par $E_\varkappa(x)$ et $\bar{E}_\varkappa(x)$ les deux fonctions définies par l'intégrale (10). Elles sont liées par l'égalité

$$(11)\qquad E_\varkappa(x) = e^{e^{x^\varkappa}}\cdot e^{-e^{e^{x^\varkappa}}} + \bar{E}_\varkappa(x).$$

$\varkappa$ étant un nombre entier elles sont toutes les deux des fonctions entières de x. Si $\varkappa \neq$ nombre entier et $\zeta_0 > 0$, $E_\varkappa(x)$ est une fonction entière tandis que $\bar{E}_\varkappa(x)$ est singulier pour $x = 0$. On a le théorème suivant.

Théorème 2. »La fonction $E_\varkappa(x)$ a des propriétés identiques à celles qui sont indiquées pour $E(x)$ dans le théorème 1. Elle a encore les propriétés suivantes. Elle tend indéfiniment vers zéro quand x tend vers l'infini positif ou négatif le long de l'axe réel ou d'une parallèle à cet axe.

Soit ω une quantité réelle positive, et désignons par ξ la partie réelle et par $i\eta$ la partie imaginaire de la variable x. Si cette variable appartient à un domaine

X fini et situé entièrement en dehors de l'axe imaginaire et de l'axe réel positif, $E_\alpha(\omega\xi + i\eta)$ tend uniformément vers zéro quand ω tend vers l'infini.

La même chose arrive si X $(0 < X)$ est une partie de l'axe réel positif.»

Dans le temps[1] j'ai introduit une autre fonction $\varepsilon_\alpha(x)$; $1 \leq \alpha$, définie par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_\alpha} e^{e^{z^\alpha}} \frac{dz}{z - x}, \tag{12}$$

où le contour S_α est le même que pour l'intégrale (10) (S_1 est identique au contour S relatif à l'intégrale (7)). Cette fonction a la propriété suivante:

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha(\omega x) \to 0 \text{ pour } \omega \to +\infty\,;\ 1 \leq \alpha, \\ \varepsilon_\alpha(\omega\xi + i\eta) \to 0 \text{ pour } \omega \to +\infty\,;\ 1 < \alpha;\ \xi \neq 0 \end{cases} \tag{13}$$

quand x appartient à un domaine X qui tombe en dehors de l'axe réel positif, tandis que

$$\left|\varepsilon_\alpha(\omega x) - e^{e^{\omega^\alpha \cdot x^\alpha}}\right| \to 0 \text{ pour } \omega \to +\infty \tag{14}$$

quand X $(0 < X)$ fait partie de cet axe.

On voit que l'intégrale (12) définit encore une seconde fonction $\bar{\varepsilon}_\alpha(x)$, liée à $\varepsilon_\alpha(x)$ par la relation

$$\bar{\varepsilon}_\alpha(x) = e^{e^{x^\alpha}} + \varepsilon_\alpha(x). \tag{15}$$

On voit encore que la fonction

$$\bar{\varepsilon}_\alpha(x)\, e^{\cdots} \tag{16}$$ [illegible]

a des propriétés identiques à celles que j'ai indiquées pour $E_\alpha(x)$ dans le théorème 2.

§ 2.

Soit b un point sur l'axe réel où $E(x)$ et ses dérivées ne s'annulent pas. Un tel point existe certainement parce que l'ensemble des zéros de $E(x), E'(x), \ldots E^{(n)}(x), \ldots$, étant dénombrable, ne peut pas contenir un intervalle entier de l'axe réel.

[1] »Sur une classe de fonctions entières», p. 262, 263. Verhandlungen d. dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg. Leipzig 1904.

Posons $\zeta_0 > b$, ζ_0 étant toujours le point où le contour S coupe l'axe réel. On aura

(17) $$E(b) = \frac{1}{2\pi i}\int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{d\zeta}{\zeta - b}.$$

J'introduis maintenant la fonction

(18) $$G(x) = \frac{E(x+b)}{E(b)},$$

et je mets

(19) $$G(x) = 1 + H_1 x + H_2 x^2 + \cdots + H_\nu x^\nu + \cdots,$$

où

(20) $$H_\nu = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{d\zeta}{(\zeta - b)^{\nu+1}};\; H_0 = 1.$$

Par conséquent,

(21) $$G(\omega(x-1)) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{d\zeta}{\zeta - b - \omega(x-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu (\omega(x-1))^\nu.$$

On obtient la formule (19) en supposant

$$\left|\frac{x}{\zeta_0 - b}\right| < 1,$$

mais, $G(x)$ étant une fonction entière de x, le second membre de (19) est une série toujours convergente par rapport à la variable x, dont les coefficients H_ν sont des constantes indépendantes de x. Le même cas se présente pour la série du second membre de (21). Elle est toujours convergente par rapport à $\omega(x-1)$ regardé comme variable.

Une autre représentation de la fonction $G(\omega(x-1))$ est la suivante. Nous choisissons comme auparavant $\zeta_0 > b$, et posons

$$|x| < 1 + \frac{\zeta_0 - b}{\omega}.$$

On obtient alors

(22) $$G(\omega(x-1)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega)\cdot x^\nu.$$

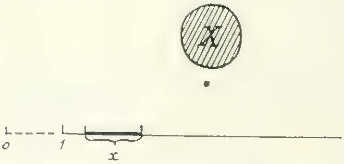
où

$$K_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\cdot\int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{\omega^\nu d\zeta}{(\zeta - b + \omega)^{\nu+1}} \tag{23}$$

et

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega) = 1. \tag{24}$$

La fonction $G(\omega(x-1))$ étant une fonction entière, le second membre de (22) est une série toujours convergente.



Si la variable x appartient à un domaine fini X situé entièrement en dehors de la partie de l'axe réel positif qui s'étend depuis 1 jusqu'à $+\infty$, on constate que $G(\omega(x-1))$ et par conséquent aussi les deux séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu(\omega(x-1))^\nu$ et $\sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega)\, x^\nu$ tendent uniformément vers zéro lorsque ω tend vers l'infini.

Si, d'un autre côté, le domaine X fait partie de la portion de l'axe réel positif comprise entre 1 et $+\infty$,

$$1 < X < \infty,$$

la fonction $G(\omega(x-1))$ ainsi que les deux séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu(\omega(x-1))^\nu$ et $\sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega)\, x^\nu$ tendent encore uniformément vers zéro lorsque ω tend vers l'infini.

Les formules (19) et (21) nous donnent

$$\frac{G(\omega(x-1)) - 1}{x-1} = \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu(\omega(x-1))^\nu}{x-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu \omega^\nu (x-1)^{\nu-1}. \tag{25}$$

Au moyen des formules (22), (24) on obtient encore

$$\frac{1 - G(\omega(x-1))}{1-x} = \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} K_\nu(\omega)(1-x^\nu)}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu)\, K_{\nu+1}(\omega). \tag{26}$$

On aura par conséquent, pour $x \neq 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\prime} H_\nu (\omega (x-1))^{\nu-1}, \tag{27}$$

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\omega} (1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu) K_{\nu+1}(\omega), \tag{28}$$

égalités qui ont lieu aussi bien si x appartient à un domaine situé en dehors de la ligne $1 \leq x \leq \infty$ que si x fait partie de cette ligne $(1 < x \leq \infty)$.

Pour le point $x=1$, on obtient au moyen de la formule (25)

$$\lim_{x=1} \frac{G(\omega(x-1)) - 1}{x-1} = \omega H_1 \tag{29}$$

et au moyen de la formule (26)

$$\lim_{x=1} \frac{1 - G(\omega(x-1))}{1-x} = \sum_{\nu=1}^{\prime} (\nu+1) K_{\nu+1}(\omega) = \omega H_1. \tag{30}$$

Les deux expressions (27) et (28) sont par conséquent égales à l'infini pour $x=1$.

Nous introduisons maintenant, à l'exemple de M. von Koch, une nouvelle étoile K de centre zéro, qui, en général, embrassera l'étoile A. Nous obtiendrons cette étoile de la manière suivante.

On fait tourner autour d'un centre $x=0$ une demi-droite ayant ce centre comme origine et limitée d'autre part par le point le plus rapproché de centre qui n'est ni un point régulier ni un pôle de la fonction définie par les constantes

$$k_0, k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots,$$

assujetties à la condition de Cauchy

$$\overline{\lim} \left| \sqrt[\nu]{k_\nu} \right| = \frac{1}{r};\ r = \text{nombre positif},$$

c'est à dire la fonction définie par la série

$$\mathfrak{P}(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_\nu x^\nu + \cdot$$

L'ensemble de toutes les demi-droites limitées de cette manière sera l'étoile K.

On voit que cette étoile embrasse l'étoile A, que j'ai appelée l'étoile principale, et que d'autres ont désignée par l'expression »étoile d'holomorphie». En analogie avec l'expression »étoile d'holomorphie» on pourrait appeler l'étoile K »étoile de méromorphie».

Introduisons maintenant l'intégrale de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{B} \frac{F(z)\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{z-x}\,dz, \tag{31}$$

où B sera le contour d'un domaine simplement connexe qui est situé à l'intérieur de l'étoile K, embrasse l'origine et ne passe par aucun des pôles de $F(z)$.

Lorsque x est situé à l'intérieur de B et diffère des pôles a, on a l'égalité suivante:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int^{B} \frac{F(z)\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{z-x}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int^{(x)} \frac{F(z)\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{z-x}\,dz - \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(z)\cdot\left(1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}\,\frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i}\sum\int^{(a)} \frac{F(z)}{z-x}\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)dz \\
&= F(x) - \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(z)\cdot\left(1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}\,\frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i}\sum\int^{(a)} \frac{F(z)}{z-x}\,G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)dz.
\end{aligned}\right. \tag{32}$$

la somme figurant au second membre étant étendue à tous les pôles de $F(z)$ à l'intérieur de B et les intégrations étant faites dans le sens direct le long des périphéries des petits cercles ayant x, 0, a comme centres. Il résulte de la définition de l'étoile K que la somme n'a qu'un nombre fini de termes.

Les formules (25) et (26) nous donnent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z}\cdot\frac{1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{1-\frac{x}{z}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu}\,\omega^{\nu}(-1)^{\nu-1}\,\frac{1}{z}\Big(1 &- \frac{\nu-1}{\lfloor 1}\,\frac{x}{z} + \\
&+ \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{z}\right)^{2} + \cdots + \left(-\frac{x}{z}\right)^{\nu-1}\Big).
\end{aligned} \tag{33}$$

$$(34)\qquad \frac{1}{z}\cdot\frac{1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(1+\frac{x}{z}+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{z}\right)^{\nu}\right)K_{\nu+1}(\omega).$$

D'un autre côté, nous avons mis

$$(3)\qquad FC(z)=k_0+k_1z+k_2z^2+\cdots,$$

$FC(z)$ étant la branche fonctionnelle de $F(z)$ intérieure au cercle de convergence C de centre zéro et de rayon $r=\left(\overline{\lim_{\nu}}\,|\sqrt[\nu]{k_\nu}|\right)^{-1}$.

On obtiendra par conséquent

$$(35)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(z)\cdot\left(1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}\frac{dz}{z}=\sum_{\nu=0}^{\infty}H_{\nu+1}\,\omega^{\nu+1}(-1)^{\nu}\left(k_0-\frac{\nu}{\lfloor 1}k_1x+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu(\nu-1)}{\lfloor 2}k_2x^2+\cdots+(-1)^{\nu}k_\nu x^\nu\right)$$

ainsi que

$$(36)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(z)\cdot\left(1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}\frac{dz}{z}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots+k_\nu x^\nu)K_{\nu+1}(\omega).$$

Supposons d'abord que le contour B tombe à l'intérieur de mon étoile principale A, qui n'embrasse aucun pôle ou autre point singulier de $F(z)$.

L'égalité (32) devient dans ce cas

$$(37)\qquad F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(z)\cdot\left(1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}\frac{dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\int^{B}\frac{F(z)\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{z-x}dz.$$

Nous avons vu que

$$\lim_{\omega=\infty}G(\omega(y-1))=0$$

tant que y appartient à un domaine fini quelconque situé entièrement en dehors de la ligne $1\leq y\leq\infty$. C'est le cas pour le domaine limité par le contour que décrit $\frac{x}{z}$ quand z parcourt la ligne B. On aura par conséquent

$$(38)\qquad \lim_{\omega=\infty}\int^{B}\frac{F(z)\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{z-x}dz=0,$$

et ainsi nous obtenons pour $FA(x)$ deux nouvelles expressions, savoir

$$(39)\qquad S_1=\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\omega}H_{\nu+1}\omega^{\nu+1}(-1)^\nu\left(k_0-\frac{\nu}{\underline{|1}}k_1x+\frac{\nu(\nu-1)}{\underline{|2}}k_2x^2+\cdots+(-1)^\nu k_\nu x^\nu\right)$$

$$(40)\qquad S_2=\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\omega}(k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots+k_\nu x^\nu)K_{\nu+1}(\omega),$$

où

$$(20)\qquad H_\nu=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\int^{S}e^{e^{\zeta}}e^{-e^{e^{\zeta}}}\frac{d\zeta}{(\zeta-b)^{\nu+1}};\ \zeta_0>b;\ H_0=1,$$

$$(23)\qquad K_\nu(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\int^{S}e^{e^{\zeta}}e^{-e^{e^{\zeta}}}\frac{\omega^\nu d\zeta}{(\zeta-b+\omega)^{\nu+1}}.$$

On aura donc la double égalité

$$(41)\qquad FA(x)=\frac{S_1}{S_2}.$$

Nous montrerons dans la suite que S_1 aussi bien que S_2 représentent encore d'autres parties de la fonction $F(x)$ que la branche $FA(x)$. Nous verrons que ces expressions représentent $FK(x)$ en tous les points réguliers intérieurs à K.

Retournons, pour établir le premier point, à la formule (32) et étudions l'intégrale

$$(42)\qquad \int^{(a)}\frac{F(z)}{z-x}\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)dz.$$

On a dans l'entourage de $z=a$

$$(43)\qquad F(z)=g\left(\frac{1}{z-a}\right)+\mathfrak{P}(z-a),$$

où

$$g\left(\frac{1}{z-a}\right)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}. \tag{44}$$

Par conséquent,

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{F(z)}{z-x} &= -\frac{1}{x-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{x-a}}\left(g\left(\frac{1}{z-a}\right)+\mathfrak{P}(z-a)\right) \\
&= -\frac{1}{x-a}\left(1+\frac{z-a}{x-a}+\left(\frac{z-a}{x-a}\right)^2+\cdots\right)\left(\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\mathfrak{P}(z-a)\right) \\
&= -\frac{1}{z-a}\left(\frac{c_{-1}}{x-a}+\frac{c_{-2}}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(x-a)^m}\right) \\
&\quad -\frac{1}{(z-a)^2}\left(\frac{c_{-2}}{x-a}+\frac{c_{-3}}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(x-a)^{m-1}}\right) \\
&\quad -\frac{1}{(z-a)^3}\left(\frac{c_{-3}}{x-a}+\frac{c_{-4}}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(x-a)^{m-2}}\right) \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad -\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{c_{-m}}{x-a}+\cdots
\end{aligned}\right. \tag{45}$$

Quant à $G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)$, on a

$$\left\{\begin{aligned}
G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right) &= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\int^{S} e^{e^{\zeta}}e^{-e^{e^{\zeta}}}\frac{d\zeta}{\zeta-b+\omega-\omega\dfrac{x}{z}}= \\
&= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\int^{S} e^{e^{\zeta}}e^{-e^{e^{\zeta}}}\frac{d\zeta}{\zeta-b+\omega-\omega\dfrac{x}{a}} \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\sum_{\nu=0}^{\infty}(a-z)^{\nu+1}\int^{S} e^{e^{\zeta}}e^{-e^{e^{\zeta}}}\frac{\omega x}{a^{\nu+2}}\cdot\frac{(\zeta-b+\omega)^{\nu}d\zeta}{\left(\zeta-b+\omega-\omega\dfrac{x}{a}\right)^{\nu+2}}.
\end{aligned}\right. \tag{46}$$

On voit que chacun des coefficients

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \cdot \frac{\omega x}{a^{\nu+2}} \cdot \frac{(\zeta - b + \omega)^{\nu}}{\left(\zeta - b - \omega\left(\frac{x}{a} - 1\right)\right)^{\nu+2}} d\zeta$$

dans la série au second membre de (46) a la même propriété que le premier terme

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{E(b)}\int\limits^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{d\zeta}{\zeta - b - \omega\left(\frac{x}{a} - 1\right)},$$

celle notamment de tendre uniformément vers zéro dans tout domaine où $\frac{x}{a}$ est réel et plus grand que *un*.

Tant que $\frac{x}{a}$ est réel et plus grand que *un*, le résidu (42) tendra par conséquent uniformément vers zéro lorsque ω tend vers l'infini.

Dans le cas où $x = a$, le résidu sera (cf. (19))

$$(47) \qquad c_0 + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{E(b)}\sum_{\nu=1}^{m}(-1)^{\nu} c_{-\nu}\int\limits^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \cdot \frac{\omega}{a^{\nu}} \frac{(\zeta - b + \omega)^{\nu-1}}{(\zeta - b)^{\nu+1}} d\zeta.$$

Le coefficient de ω^m dans cette expression, étant égal à

$$(-1)^m c_{-m} \frac{E^{(m)}(b)}{E(b)a^m}\frac{1}{\underline{|m}},$$

ne peut pas s'annuler. Par conséquent, on voit que le module de la quantité (47) tendra vers l'infini lorsque ω augmente au dessus de toute limite.

On voit que les deux expressions S_1 et S_2 ainsi que $FK(x)$ tendent alors vers l'infini.

Vu qu'il n'y a qu'un nombre fini de pôles à l'intérieur du domaine limité par la courbe B, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3. »La fonction $F(x)$ définie par la branche fonctionnelle

$$(3) \qquad FC(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots$$

est représentée à l'intérieur de l'étoile principale A par chacune des deux expressions

$$(39) \quad S_1 = \lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu+1}\,\omega^{\nu+1}\,(-1)^{\nu}\left(k_0 - \frac{\nu}{\underline{|1}}k_1 x + \frac{\nu(\nu-1)}{\underline{|2}}k_2 x^2 + \cdots + (-1)^{\nu} k_{\nu} x^{\nu}\right)$$

et

(40) $$S_2 = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\prime} (k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_\nu x^\nu) K_{\nu+1}(\omega),$$

ou

(20) $$H_\nu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{E(b)} \int^S e^{e^\zeta} e^{-e^{e^\zeta}} \frac{d\zeta}{(\zeta - b)^{\nu+1}},$$

(23) $$K_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{E(b)} \int^S e^{e^\zeta} e^{-e^{e^\zeta}} \frac{\omega^\nu d\zeta}{(\zeta - b + \omega)^{\nu+1}},$$

(17) $$E(b) = \frac{1}{2\pi i} \int^S e^{e^\zeta} e^{-e^{e^\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - b},$$

et dans lesquelles le point ζ_0 où la ligne S coupe l'axe réel est supposé $> b$.

Ces expressions convergent toutes les deux uniformément dans tout domaine intérieur à A. Elles convergent encore en dehors de A sur toute demi-droite passant par un sommet qui est un pôle de $F(x)$ situé à l'intérieur de l'étoile K. La convergence est uniforme sur toute partie d'une telle demi-droite située à une distance fini entre deux pôles consécutifs ainsi que sur toute partie située à une distance finie entre le sommet et le pôle le plus rapproché du sommet. Les égalités

(48) $$FK(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu+1} \omega^{\nu+1} (-1)^\nu \left(k_0 - \frac{\nu}{\lfloor 1} k_1 x + \frac{\nu(\nu-1)}{\lfloor 2} k_2 x^2 + \cdots + (-1)^\nu k_\nu x^\nu\right)$$

(49) $$FK(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\prime} (k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_\nu x^\nu) K_{\nu+1}(\omega)$$

ont lieu pour tout point régulier à l'intérieur de K.»

En chaque pôle $x = a$, au contraire, on a

(50) $$\lim_{\omega=\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu+1} \omega^{\nu+1} (-1)^\nu \left(k_0 - \frac{\nu}{\lfloor 1} k_1 x + \cdots + (-1)^\nu k_\nu x^\nu\right) \right| = \infty,$$

(51) $$\lim_{\omega=\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \cdots + k_\nu x^\nu) K_{\nu+1}(\omega) \right| = \infty.$$

La fonction $FK(x)$ devient méromorphe si elle n'a pas $(|x| < \infty)$ d'autres singularités que des pôles (ausserw. singuläre Stellen). La fonction étant définie, comme nous avons supposé, par les constantes

$$k_\nu;\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

remplissant la condition de CAUCHY

$$\overline{\lim_\nu} \sqrt[\nu]{|k_\nu|} = \frac{1}{r};\ r > 0,$$

M. HADAMARD a trouvé un critère de méromorphie de la fonction exprimée par les k_ν, savoir

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\overline{\lim_n} D_n^{(p)}} = 0$$

$$D_n^{(p)} = \begin{vmatrix} k_{n+1} & k_{n+2} & \dots & k_{n+p} \\ k_{n+2} & k_{n+3} & \dots & k_{n+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n+p} & k_{n+p+1} & \dots & k_{n+2p-1} \end{vmatrix}.$$

M. TORSTEN CARLEMAN[1], de son côté, vient de montrer qu'en partant du théorème de M. HADAMARD, on peut obtenir le théorème de M. FREDHOLM[2] suivant lequel la fonction $u(x)$, définie par l'égalité

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x; y)\, u(y)\, dy$$

$$|K(x; y)| < 1 \qquad |f(x)| < 1,$$

est une fonction méromorphe de λ.

M. FREDHOLM a donné différentes expressions de cette fonction valables pour tous les points λ.

On obtient au moyen de chacune de mes formules (39), (40) des nouvelles expressions valables pour tous les λ. La fonction $u(x)$ considérée comme fonction de λ s'exprime en réalité dans l'entourage de $\lambda = 0$ par la série de puissances

$$u(x) = U_x(\lambda) = \mathfrak{P}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, \lambda^n$$

où

[1] voir T. CARLEMANN. »Sur les équations intégrales». Comptes Rendus etc., t. 169, 1919, p. 773.
[2] I. FREDHOLM. »Sur une classe d'équations fonctionnelles». Ce journal, t. 27, p. 365—390.

$$f_0(x) = f(x);\ f_n(x) = \int_0^{x} K(x;y) f_{n-1}(y)\, dy \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et on a par conséquent

$$(39) \begin{cases} U_x(\lambda) = \\ \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu+1}\, \omega^{\nu+1} (-1)^{\nu} \left(f(x) - \frac{\nu}{\underline{|1}} f_1(x)\cdot\lambda + \frac{\nu(\nu-1)}{\underline{|2}} f_2(x)\cdot\lambda^2 + \cdots + (-1)^{\nu} f_{\nu}(x)\, \lambda^{\nu} \right) \end{cases}$$

$$(40) \begin{cases} U_x(\lambda) = \\ \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(f(x) + f_1(x)\,\lambda + f_2(x)\,\lambda^2 + \cdots + f_{\nu}(x)\,\lambda^{\nu} \right) K_{\nu+1}(\omega) \end{cases}$$

§ 3.

Dans le paragraphe précédent, je me suis placé au point de vue de WEIERSTRASS, en comptant les pôles aussi bien que les points réguliers comme appartenant à la fonction analytique. Il est pourtant quelquefois utile d'élargir cette conception en annexant à la fonction comme partie intégrante non seulement les pôles, mais encore les points singuliers isolés.

Je donnerai dans ce qui suit à ces points le nom de *poloïdes*. *Un poloïde est un point tel que la fonction soit régulière partout dans l'entourage du point sauf au point même.* Par conséquent, la fonction peut toujours dans l'entourage d'un poloïde P être représentée par la somme de deux séries

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x-P}\right) + \mathfrak{P}(x-P)$$

dont la première est toujours convergente et dont la seconde converge dans l'entourage de $x=P$.

Si le nombre des termes de la série $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x-P}\right)$ est fini, le *poloïde* se réduit à un *pôle*. Les points singuliers d'une branche fonctionnelle uniforme dans un domaine donné qui ne sont pas des poloïdes seront appelés *points singuliers essentiels*.

Une fonction entière a donc un poloïde au point $x=\infty$, mais reste régulière partout ailleurs. Si la fonction est entière et rationnelle, le poloïde devient un pôle.

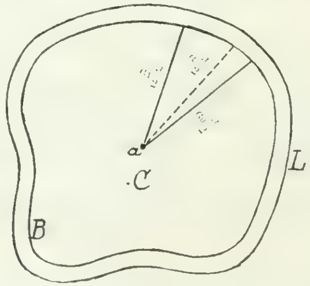
J'introduis maintenant une nouvelle étoile appartenant à la fonction $F(x)$ définie par les constantes a; $k_0, k_1, \ldots, k_\nu, \ldots$; $\overline{\lim_\nu} |\sqrt[\nu]{k_\nu}| = \frac{1}{r}$; $r > 0$, c'est à dire par la série convergente $\mathfrak{P}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu (x-a)^\nu$; je définis cette étoile de la maniere suivante.

Je prolonge les différentes demi-droites issues du centre a jusqu'au premier point qui n'est ni un point régulier ni un poloïde, au lieu de m'arrêter, comme c'était le cas pour l'étoile K, au premier point qui n'est ni un point régulier ni un *pôle*. L'étoile que j'obtiens de cette manière sera désignée par L. Soit maintenant B une autre étoile, concentrique à L, située à l'intérieur de L et dont la frontière ne contient aucun poloïde. A l'intérieur de B ne se trouve alors qu'un nombre fini de poloïdes.

Je suis la frontière de B dans le sens direct. Si $\alpha\frac{\pi}{2}$ est l'angle compris entre deux demi-droites consécutives $a + (x-a)e^{i\alpha_0\frac{\pi}{2}}$ et $a + (x-a)e^{i\alpha_1\frac{\pi}{2}}$; $\alpha_0 < \alpha_1$ issues du centre qui passent par des *poloïdes* et si $x-a$ parcourt l'axe réel positif, la fonction $F\left(a + (x-a)e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)$ restera régulière tant que $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ tandis que ses valeurs régulières sur les demi-droites $\alpha = \alpha_0$ et $\alpha = \alpha_1$ deviendront

$$\lim_{\alpha=\alpha_0} F\left(a + (x-a)e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right) \text{ et } \lim_{\alpha=\alpha_1} F\left(a + (x-a)e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right).$$

C'est une conséquence immédiate de la propriété de $F(x)$ d'être uniforme à l'intérieur de l'étoile L et régulière dans l'entourage de $x = a$.



Il s'ensuit alors de mon théorème (formule 5) que l'égalité

$$(52)\qquad FL(x)=\lim_{\alpha=0}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot F_\alpha\left(\omega(x-a)\,e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$F_\alpha(\omega x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\cdot\nu}}(\omega x)^\nu$$

$$=\lim_{\alpha=0}\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\cdot\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu\cdot d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left((x-a)\,e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)^\nu$$

a lieu partout à l'intérieur de l'étoile L.[1]

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant.

Théorème 4. »La fonction $F(x)$ définie par la branche fonctionnelle

$$FC(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots\cdot$$

est représentée à l'intérieur de l'étoile L par chacune des deux expressions

$$(53)\qquad \begin{gathered}\lim_{\alpha=0}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}F_\alpha\left(\omega(x-a)\,e^{+i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}};\ F_\alpha(\omega x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\cdot\nu}}(\omega x)^\nu,\\ \lim_{\alpha=0}\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\cdot\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\omega^\nu\cdot d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left((x-a)\,e^{+i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)^\nu.\end{gathered}$$

Ces expressions convergent uniformément dans tout domaine intérieur à A. Elles convergent encore en dehors de A sur toute demi-droite passant par un sommet de A qui est un poloïde de $F(x)$ intérieur à l'étoile L. La convergence est uniforme sur toute partie d'une telle demi-droite située à une distance finie entre deux poloïdes consécutifs ainsi que sur toute partie située à une distance finie entre le sommet et le poloïde le plus rapproché du sommet. Les égalités

$$(52)\qquad FL(x)=\lim_{\alpha=0}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}F_\alpha\left(\omega(x-a)\,e^{+i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

[1] Cf. surtout la note de M. Oseen: »Zwei Bemerkungen über das Problem eine Taylorsche Reihe analytisch fortzusetzen», pag. 5, Arkiv för Matematik, Astr. o. Fysik, Bd 13, No. 10, Stockholm 1918, ainsi que l. c. deux notes antérieures de M. H. v. Koch.

$$= \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{|\underline{\alpha \cdot \nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \omega^\nu \cdot d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \left((x-a)\, e^{+i\alpha\frac{\pi}{2}} \right)^\nu$$

ont lieu pour tout point régulier à l'intérieur de L.»

Si la fonction $F(x)$ est analytique, uniforme et régulière en tous les points finis, excepté les poloïdes, ses valeurs régulières s'obtiennent par conséquent toutes au moyen de la formule (52).

L'expression est valable, on le voit facilement, dans une étoile plus étendue que l'étoile L. Il suffit en réalité qu'il n'existe à l'intérieur de chaque étoile B située à l'intérieur de L qu'un *nombre fini* de demi-droites sur lesquelles il se trouve des singularités de $F(x)$ entrecoupées par des parties régulières.

L'uniformité à l'entour de ces singularités n'est pas même nécessaire. Mais dans ce cas mon expression représente des deux côtés de la demi-droite des branches différentes de la fonction.[1]

D'un autre côté, il n'est pas exclu que l'étoile L peut être prolongée linéairement et uniformément en dehors de la frontière de L. Cette question demande une étude approfondie, à laquelle je reviendrai dans une autre note déjà rédigée. Dans la note actuelle comme dans mes notes antérieures je n'ai traité d'autre cas que celui où la fonction est définie dans l'entourage d'un point régulier. Il arrive pourtant en Analyse qu'une fonction soit définie non plus dans l'entourage d'un point régulier, mais dans un certain entourage d'un point singulier. Les représentations obtenues dans le premier cas peuvent souvent être modifiées ou généralisées de manière à rester valable dans le second cas. J'espère y revenir dans d'autres notes qui se trouvent rédigées depuis longtemps.

[1] Cf. Painlevé, Oseen et v. Koch l. c.

La formule (52) implique un triple passage à la limite, tandis que les expressions (48), (49) n'impliquent qu'un passage double.

J'ai énoncé un autre théorème très général dans les Comptes Rendus de l'Acad. d. Sci. de Paris, le 11 avril, 18 avril 1904. Cet énoncé doit être modifié pour devenir entièrement exact. J'espère y revenir.

M. Oseen a publié (l. c. page 7) un autre théorème très général, où il s'occupe du problème de trouver une représentation d'une fonction $F(x)$ quelconque dans tout son domaine d'existence. Pour y parvenir, il se voit forcé d'introduire, outre les constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots k_\nu, \ldots$, encore d'autres éléments de la fonction.

Toutes mes formules, au contraire, jouissent de la propriété essentielle qu'il n'y entre pas d'autres éléments de la fonction que les seules constantes $k_0, k_1, \ldots k_\nu, \ldots$, tout comme dans la représentation originale par la série de Taylor.

ZUR UNTERSUCHUNG DER GRÖSSENORDNUNG GANZER FUNKTIONEN, DIE EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG GENÜGEN.

Von

GEORG PÓLYA

in Zürich.

Diese Arbeit zerfällt in zwei Teile. Der erste behandelt eine spezielle Frage, der zweite stellt ein allgemeineres Problem.

Im ersten Teil betrachte ich algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung, d. h. Gleichungen von der Form

$$R\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

wo R eine rationale ganze Funktion ihrer drei Argumente ist. Ich beweise, dass jede ganze transzendente Funktion, die einer Gleichung (1) genügt, von *positiver* Ordnung sein muss.[1]

Am Ende meiner Arbeit will ich eine Frage über algebraische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung aufwerfen. Ich werde dabei die Gelegenheit wahrnehmen, ein schon früher von mir gefundenes Resultat in mehr geeigneter Form auszusprechen.

1. Ich will zuerst auf eine einfache Eigenschaft hinweisen, die die Differentialgleichungen erster Ordnung von den algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung unterscheidet.

Offenbar kann eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung höchstens n Integrale besitzen, die alle Polynome und zu je zweien von verschiedenem

[1] Nach Einsendung meiner Arbeit an die Redaktion teilte mir Herr J. Malmquist, deren Mitglied, ein viel genaueres und weitergehendes Resultat mit, zu dem er durch eine völlig verschiedene, viel schwierigere und tiefere Analyse gelangte. Vgl. seine zugleich erscheinende Arbeit: Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre, Dieser Band. S. 317.

Grade sind. Ähnlicherweise kann eine inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung nicht $n+2$ rationale ganze Integrale besitzen, die alle von verschiedenem Grade wären. Beliebige algebraische Differentialgleichungen zeigen aber ein ganz verschiedenes Verhalten. So hat z. B. schon die Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$y^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{xy'}{y}\right) = xyy'' + yy' - xy'^2 = 0$$

Polynome von beliebig hohem Grade zu Integralen, da ihr allgemeines Integral ax^m heisst. — Nach diesen Bemerkungen wird vollständig klar der Sinn von folgendem Satze sein:

Unter den Polynomen, die eine Differentialgleichung erster Ordnung befriedigen, gibt es nur endlich viele von verschiedenem Grade.

Die in Rede stehende Gleichung soll

$$\Sigma A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta y'^\gamma = 0 \tag{2}$$

heissen. Jedes Glied unter dem Summenzeichen ist eindeutig bestimmt durch die Angabe des Wertsystems α, β, γ, oder auch, was zu bemerken für den Beweis nützlich ist, durch die Angabe der drei Zahlen $\beta+\gamma$, $\alpha-\gamma$, γ. Ich betrachte zuerst die Gesamtheit derjenigen Glieder, für welche $\beta+\gamma$ am grössten ist. In dieser Gesamtheit betrachte ich wieder die Teilgesamtheit derjenigen Glieder, für welche $\alpha-\gamma$ am grössten ist, und endlich in der so erhaltenen Teilgesamtheit dasjenige Glied, für welches γ am grössten ist. Dieses durch dreifache Auswahl zuletzt erhaltene wohlbestimmte »höchste Glied« soll $A_{abc} x^a y^b y'^c$ heissen.

Setzt man für y ein Polynom m-ten Grades

$$y = Cx^m + \cdots \tag{3}$$

ein, so wird aus dem Gliede

$$A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta y'^\gamma$$

ein Polynom, worin das mit der höchsten Potenz behaftete Glied

$$A_{\alpha\beta\gamma} C^{\beta+\gamma} m^\gamma x^{m(\beta+\gamma)+\alpha-\gamma}$$

heisst. Übersteigt m eine bestimmte leicht angebbare Schranke, so wird die höchste Potenz von x, die beim Einsetzen von (3) in (2) entsteht, die Potenz $x^{(b+c)m+a-c}$ und der dazu gehörige Koeffizient

$$C^{b+c} \Sigma' A_{\alpha\beta\gamma} m^\gamma \tag{4}$$

sein, wo Σ' nur über diejenigen Wertsysteme α, β, γ erstreckt ist, bei welchen

$$\beta+\gamma = b+c, \quad \alpha-\gamma = a-c$$

ist. Der Ausdruck (4) ist ein Polynom c-ten Grades in m, das für genügend grosses m nicht verschwindet: also kann durch Einsetzung eines Polynoms genügend hohen Grades die linke Seite von (2) nicht mehr identisch verschwinden, w. z. b. w.

2. Bei dieser Überlegung sind diejenigen einfachen Eigenschaften der Differentialgleichungen erster Ordnung zum Vorschein gekommen, die den Beweis von folgendem Satze ermöglichen:

Eine ganze transzendente Funktion von der Ordnung Null kann nie eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung befriedigen.

Diejenigen tiefliegenden Eigenschaften der ganzen Funktionen, auf welche ich den Beweis stützen werde, wurden erst kürzlich von Herrn WIMAN[1] aufgedeckt. Auch die Methode, die ich befolge, ist seinen sich auf verwandte Probleme beziehenden Andeutungen entnommen.

Der zitierten Stelle der WIMAN'schen Arbeit ist folgender Satz als Spezialfall zu entnehmen:

Zu jeder ganzen transzendenten Funktion

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{5}$$

nullter Ordnung lässt sich eine Folge komplexer Zahlen

$$x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ldots \tag{6}$$

mit unendlich wachsenden absoluten Beträgen (*d. h.*

$$0 < |x_1| < |x_2| < \cdots < |x_\nu| < \cdots; \lim_{\nu = \infty} |x_\nu| = \infty \;) \tag{7}$$

bestimmen, die folgende Eigenschaften hat:

Bezeichnet man mit n_ν den Index des grössten Gliedes (*bezw. eines geeigneten der grössten Glieder*) *der Taylorreihe* (5) *für $x = x_\nu$, so ist*

$$\lim_{\nu = \infty} \frac{x_\nu F'(x_\nu)}{n_\nu F(x_\nu)} = 1. \tag{8}$$

Bezeichnet man mit $M(r)$ das Maximum von $|F(x)|$ an dem Kreisrande $|x| = r$, so ist

$$|F(x_\nu)| = M(|x_\nu|). \tag{9}$$

[1] WIMAN, Über den Zusammanhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Betrage bei gegebenem Argumente der Funktion. Acta Mathematica, Bd. 41 (1916), S. 1—28. Vgl. S. 16.

Endlich ist[1] *für beliebiges reelles* k

$$(10) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{n_\nu^k}{x_\nu} = 0.$$

Der Bequemlichkeit halber können wir anstatt (8), (10)

$$(8') \qquad \frac{x F'(x)}{n F(x)} \to 1, \qquad (10') \qquad \frac{n^k}{x} \to 0$$

schreiben, indem wir folgendes vereinbaren: das Zeichen → bedeute im jetzigen Zusammenhange, dass bei der Grenzwertbildung x nur die Werte (6) durchläuft, und dass in einer Formel, wo → vorkommt, n den Index des dem x zugeordneten grössten Gliedes bedeutet. In diesem Sinne ist

$$(11) \qquad n \to \infty$$

und für beliebiges reelles k

$$(12) \qquad \frac{x^k}{F(x)} \to 0.$$

(11) folgt aus (7), (12) folgt aus (9). —

Ich habe einen Widerspruch aus der Annahme abzuleiten, dass durch Einsetzen der Funktion (5) die Gleichung (2) befriedigt wird. Ich werde zeigen, dass

$$(13) \qquad \frac{\Sigma A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha F(x)^\beta F'(x)^\gamma}{A_{abc} x^a F(x)^b F'(x)^c} \to 1$$

ist, wodurch mein Satz voll erhärtet sein wird. M. a. W., ich habe zu zeigen, dass nach Einsetzen von $y = F(x)$ und bei Durchlaufen der ausgezeichneten Stellen (6) das unter 1 definierte höchste Glied alle anderen Glieder der linken Seite von (2) überwiegt.

Die von dem höchsten Gliede verschiedenen Glieder an der linken Seite von (2) teile ich in drei Klassen.

I. $\beta + \gamma = b + c$, $\alpha - \gamma = a - c$, $\gamma < c$. In diesem Falle ist

$$\frac{x^\alpha F(x)^\beta F'(x)^\gamma}{x^a F(x)^b F'(x)^c} = n^{\gamma - c} x^{\alpha - \gamma - (a-c)} F(x)^{\beta + \gamma - (b+c)} \left(\frac{x F'(x)}{n F(x)}\right)^{\gamma - c}$$

$$= \frac{1}{n^{c-\gamma}} \left(\frac{x F'(x)}{n F(x)}\right)^{\gamma - c} \to 0$$

nach (8′) und (11).

[1] Nach Herrn WIMAN bestehen (8), (9) für *beliebige* ganze Funktionen, und nur das leicht zu gewinnende (10) ist für die Funktionen nullter Ordnung charakteristisch

II. $\beta+\gamma=b+c$, $\alpha-\gamma<a-c$. In diesem Falle ist

$$\frac{x^{\alpha} F(x)^{\beta} F'(x)^{\gamma}}{x^{a} F(x)^{b} F'(x)^{c}}=\frac{n^{\gamma-c}}{x^{a-c-(\alpha-\gamma)}}\left(\frac{x F'(x)}{n F(x)}\right)^{\gamma-c} \rightarrow 0$$

nach (8′) und (10′).

III. $\beta+\gamma<b+c$. In diesem Falle ist

$$\frac{x^{\alpha} F(x)^{\beta} F'(x)^{\gamma}}{x^{a} F(x)^{b} F'(x)^{c}}=\frac{n^{\gamma-c} x^{\alpha-\gamma-(a-c)}}{F(x)^{b+c-(\beta+\gamma)}} \cdot\left(\frac{x F'(x)}{n F(x)}\right)^{\gamma-c} \rightarrow 0$$

nach (8′) und (10′), (12).

Nach dem Begriffe des höchsten Gliedes sind mit I, II, III alle von ihm verschiedenen Glieder an der linken Seite von (2) erschöpft, und somit (13) und der in Aussicht genommene Satz bewiesen. — Man sieht übrigens, dass die von Herrn Wiman a. a. O. angedeutete Methode bei jeder Differentialgleichung erster Ordnung eine positive untere Schranke für die Ordnung ihrer ganzen transzendenten Integrale zu bestimmen erlaubt, ähnlich, wie sich die Überlegung unter 1 zur numerischen Abschätzung der Grade von ganzen rationalen Integralen eignet.

3. Der unter 2 bewiesene Satz steht nicht vereinzelt da. In einer bemerkenswerten Untersuchung über lineare Differentialgleichungen bewies Herr Perron[1] u. a., dass eine ganze transzendente Funktion, die einer solchen Gleichung m-ter Ordnung genügt, mindestens von der (Grössen-) Ordnung $\frac{1}{m}$ sein muss.[2]

Die Ordnung, d. h. das Anwachsen des Maximalbetrages einer ganzen Funktion ist umgekehrt proportional der Geschwindigkeit, mit welcher die Koeffizienten ihrer Taylorreihe gegen Null konvergieren, m. a. W. der Geschwindigkeit, mit welcher die Taylorreihe gegen die Funktion konvergiert. Der zitierte Perron'sche sowie der Satz unter 2 beschränken also die Schnelligkeit, mit der die Potenzreihe einer ganzen, nicht rationalen Funktion, die einer Gleichung der genannten Art genügt, gegen die Funktion konvergiert. Sie zeigen eine unverkennbare Analogie zu dem Liouville'schen Approximationssatze[3], der seinerseits die Schnelligkeit beschränkt, mit der der Dezimalbruch einer reellen, nicht ratio-

[1] O. Perron, Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten, Acta Mathematica, Bd. 34 (1910), S. 139—163.

[2] Einen auf dieses Einzelresultat abzielenden Beweisgang nebst einer Anwendung gab ich in meiner Arbeit: Über das Anwachsen von ganzen Funktionen, die einer Differentialgleichung genügen, Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang (61) 1916, S. 531—545, vgl. S. 538—545. Herr Wiman deutete a. a. O. einen neuen Weg zur Gewinnung der Perron'schen Resultate an, der zugleich weiter und tiefer führen soll. Diesem Wege folgte ich unter 2, und an demselben lässt sich auch der eben ausgesprochene Satz in wenigen Zeilen folgern.

[3] Vgl. etwa Borel, Théorie des fonctions (Paris, 1898), S. 26 ff.

nalen Zahl, die einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten genügt, gegen die Zahl konvergiert.

Es ist zu erwarten, dass die Untersuchung beliebiger algebraischer Differentialgleichungen, auch zu einem Gegenstück des LIOUVILLE'schen Approximationssatzes führt. Man könnte daran denken, dass etwa folgender Satz besteht: »Eine ganze transzendente Funktion nullter Ordnung kann keiner algebraischen Differentialgleichung genügen». Allerdings könnte der Beweis oder die Widerlegung einer solchen Vermutung die Frage wesentlich klären.

Die Differentialgleichungen erster Ordnung einerseits und die linearen andererseits sind die einfachsten algebraischen Differentialgleichungen. Daher gelang auch bisher eben diese Spezialfälle mit Erfolg in Angriff zu nehmen. Aber auch eine ganz anders geartete Spezialisierung der Frage führt zu einigermassen befriedigendem Resultate, wenn man sich nämlich auf Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten beschränkt und dafür beliebige algebraische Differentialgleichungen zulässt. Ich will meine diesbezügliche Untersuchung in Erinnerung rufen und zugleich deren Ergebnis in etwas verbesserter Fassung aussprechen.

4. Den ersten wichtigen Schritt in der Untersuchung der arithmetischen Eigenschaften von Potenzreihen, die einer algebraischen Differentialgleichung genügen, hat Herr HURWITZ[1] getan. Sowohl sein Resultat, wie das, was ich hinzuzufügen habe, wird am besten durch Vergleich mit einem bekannten EISENSTEIN'schen Satze aufgeklärt.

Es handelt sich um Potenzreihen von der Form

$$\frac{s_0}{t_0} + \frac{s_1}{t_1}x + \frac{s_2}{t_2}x^2 + \cdots + \frac{s_n}{t_n}x^n + \cdots \tag{14}$$

wo s_n und t_n relativ prime rationale ganze Zahlen sind, $t_n \geq 1$. Ist $s_n = 0$, so ist $t_n = 1$. Der in Rede stehende EISENSTEIN'sche Satz besagt: ist die durch (14) dargestellte Funktion algebraisch, so gibt es eine ganze Zahl T von der Eigenschaft, dass T^n durch t_n teilbar ist. — Bezeichnet man mit p_n den grössten Primfaktor von t_n, so lässt, wie leicht zu sehen, derselbe Satz sich noch auf die folgende, der ursprünglichen äquivalente Fassung bringen:

Genügt die Reihe (14) *einer algebraischen Gleichung so ist*

$$p_n = O(1), \qquad \log t_n = O(n).$$

Das grosse »O» bedeutet dabei das bekannte LANDAU'sche Zeichen für Grössenordnung. Diese neue Fassung ist recht gekünstelt, aber lässt sich am besten zum Vergleiche mit folgendem Satze heranziehen.

[1] A. HURWITZ, Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique, Annales de l'Ecole Normale, 3e série, t. VI (1889), S. 327—332.

Genügt die Reihe (14) *einer algebraischen Differentialgleichung, so ist*

$$\text{(I)}\quad \log p_n = O(\log n), \qquad \text{(II)}\quad \log t_n = O\,(n\,(\log n)^2).$$

Die Tatsache (I), d. h. dass die grösste Primzahl p_n im Nenner nicht schneller wächst, als eine gewisse Potenz von n, ist von Herrn HURWITZ gefunden worden. Die Beschränkung (II) für die Grössenordnung des Nenners wird hier das erste Mal ausgesprochen (meines Wissens), aber sein Beweis ist schon vollständig enthalten in meiner vorher zitierten Arbeit.[1] — Aus (II) folgt, dass etwa die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n^2}} x^n,$$

wo die u_n irgendwelche ungerade Zahlen sind, keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann, und dasselbe folgt für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} x^n,$$

wo q einen rationalen echten Bruch bezeichnet (letztere ist die rechte Hälfte einer gewissen Thetareihe). Die Bedingung (I) gestattete hingegen für diese Reihen keine ähnliche Folgerung zu ziehen.

Dieselbe Bedingung (II) bildet auch die Brücke zu der Frage, die ich in dieser Arbeit aufwerfen wollte. Aus ihr folgt nämlich offenbar, dass *wenn eine ganze transzendente Funktion*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{15}$$

mit rationalen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ *einer algebraischen Differentialgleichung genügt, so ist*

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log |a_n|}{n(\log n)^2} > -\infty. \tag{16}$$

Dieser Satz steht zu der unter 3 versuchsweise ausgesprochenen Vermutung offenbar in Beziehung: nach dieser Vermutung sollte nämlich

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |a_n|}{n \log n} > -\infty$$

sein, was nicht viel mehr besagen würde, als das schon bewiesene (16).

[1] A. a. O., vgl. S. 531—538. Nur an S. 537 sind einige selbstverständliche Änderungen anzubringen.

Es sei noch folgende, mehr kuriose als wichtige Folgerung hervorgehoben: Wenn die Koeffizienten einer Potenzreihe rationale positive Zahlen sind und ihre Partialsummen $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ nur reelle Nullstellen haben, so genügt die Reihe keiner algebraischen Differentialgleichung. — Man kann nämlich zeigen, dass unter den besagten Bedingungen (16) nicht erfüllt ist.[1]

[1] Vgl. meine Arbeit: Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 36 (1913, 2) S. 279—295 und die dort zitierten Arbeiten des Herrn Petrovitch.

SUR LES FONCTIONS À UN NOMBRE FINI DE BRANCHES SATISFAISANT À UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE.

Par

J. MALMQUIST

à Stockholm.

Dans un travail précédent[1] j'ai étudié les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dx} = R(x, y),$$

où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle de x, y. Un travail de M. Polya[2] m'a conduit à publier certains résultats que j'ai obtenus pour l'équation générale

$$(1) \quad F\left(\frac{dy}{dx}, y, t, x\right) = F_0(y, t, x) \left(\frac{dy}{dx}\right)^m + F_1(y, t, x) \left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + F_m(y, t, x) = 0,$$

où $F_0, F_1, \ldots F_m$ sont des fonctions entières et rationnelles de y, t et x, t étant lié à x par une équation algébrique $F(t, x) = 0$.

Rappelons d'abord quelques résultats connus.

On peut supposer que l'équation $F(y', y, t, x) = 0$ entre y', y est irréductible pour une valeur quelconque de x. De plus, si l'on fait, au besoin, dans l'équa-

[1] *Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre.* Acta mathematica, t. 36, p. 297.

[2] *Zur Untersuchung der Grössenordnung ganzer Funktionen, die einer Differentialgleichung genügen.* Ce tome, p. 309.

tion différentielle (I) une substitution de la forme $y = a + \frac{1}{z}$, où a est une constante convenable, on peut supposer qu'il correspond à une valeur infiniment grande de y m valeurs infiniment grandes de y' satisfaisant à l'équation $F(y', y, t, x) = 0$ et s'obtenant par m séries de la forme

$$y' = \alpha y^2 + \beta y + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{y}, x\right), \tag{2}$$

où α, β et les coefficients de $\mathfrak{P}$ sont des fonctions algébriques de x.

Les points singuliers des intégrales d'une équation (I) se divisent en deux classes: les points singuliers fixes et les points singuliers mobiles. Les points de la première classe sont en nombre fini, mais ils sont en général des points transcendants. Les points de la seconde classe sont, d'après un théorème de M. Painlevé,[1] des points singuliers algébriques. Soit y_0 la valeur pour $x = x_0$ d'une intégrale qui en $x = x_0$ a un point singulier de la seconde classe. Si $y_0 = \infty$ il résulte des équations (2) que le point x_0 est un pôle. Supposons ensuite que y_0 soit fini. Alors, y_0 satisfait à l'une des équations

$$F_0(y_0, t_0, x_0) = 0, \quad D(y_0, t_0, x_0) = 0,$$

$D(y, t, x)$ étant le discriminant de la fonction $F(y', y, t, x)$ de y', et t_0 étant une valeur de t pour $x = x_0$. De plus, l'intégrale considérée satisfait à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = (y - g(x))^{-\frac{\lambda}{\mu}} \mathfrak{P}\left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}}, x - x_0\right), \tag{3}$$

où $g(x)$ est une série de puissances de $x - x_0$ qui satisfait à l'une des équations $F_0(y, t, x) = 0$, $D(y, t, x) = 0$, et où la série au second membre satisfait à l'équation algébrique $F\left(\frac{dy}{dx}, y, t, x\right) = 0$. On a ou bien $\lambda > 0$, $\mu \geq 1$, ou bien $\lambda = 0$, $\mu > 1$. Dans le premier cas, on aura

$$y = y_0 + c_1 (x - x_0)^{\frac{\mu}{\lambda + \mu}} + \cdots, \quad c_1 \neq 0.$$

Dans le second cas, en posant $y = g(x) + z^\mu$ on aura une équation de la forme

$$z^{\mu' - 1} \frac{dz}{dx} = \mathfrak{P}_1(z, x - x_0), \quad \mathfrak{P}_1(0, x - x_0) \neq 0.$$

[1] *Leçons de Stockholm*, p. 57.

Pour que x_0 soit un point singulier il faut et il suffit que $\mu' > 1$; alors, on aura

$$y = g(x) + c_1 (x - x_0)^{\frac{\mu}{\mu'}} + \cdots, \; c_1 \neq 0.$$

Il y a une classe d'équations (1) particulièrement simples, introduite par Fuchs, ce sont les équations à points critiques fixes, satisfaisant à la condition que les points singuliers mobiles sont des pôles. Il résulte immédiatement de ce qui précède que ces équations sont caractérisées par les conditions suivantes:

1) F_0 est indépendant de y; il résulte alors des équations (2) que le degré de F_ν par rapport à y est au plus égal à 2ν;

2) tous les nombres μ' sont égaux à 1.

Nous démontrons maintenant le théorème suivant:

Théorème. Si l'équation (1) *n'est pas une équation à points critiques fixes, toute intégrale à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points critiques est nécessairement une fonction algébrique.*

Prenons une équation (3) telle que l'intégrale de cette équation qui pour $x = x_0$ devient égale à $g(x_0)$ ait un point critique en x_0. La série

$$y' = (y - g(x))^{-\frac{\lambda}{\mu}} \mathfrak{P}\left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}},\; x - x_0\right),$$

qui entre dans le second membre de cette équation (3), représente, pour une valeur quelconque de x dans le voisinage de x_0, l'entourage d'un certain point de la courbe algébrique $F(y', y, t, x) = 0$. Il existe une fonction rationnelle de y', y, soit

$$z = R(y', y \,|\, x)$$

qui ne devient infinie qu'en ce point. Dans le voisinage de ce point, on aura

$$z = (y - g(x))^{-\frac{\lambda'}{\mu}} \mathfrak{P}_1\left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}} \,|\, x\right),\; \mathfrak{P}_1(0 \,|\, x) \neq 0,$$

les coefficients de $\mathfrak{P}_1$ étant des fonctions algébriques de x. Si y est l'intégrale de l'équation (3) considérée qui pour $x = x_0$ devient égale à $g(x_0) = y_0$ on aura

$$\frac{dz}{dx} = (y - g(x))^{-\frac{\lambda + \lambda'}{\mu} - 1} \mathfrak{P}_2\left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}} \,|\, x\right)$$

$$= z^{1 + \frac{\lambda + \mu}{\lambda'}} \mathfrak{P}_3\left(z^{-\frac{1}{\lambda'}} \,|\, x\right),\; \mathfrak{P}_3(0 \,|\, x) \neq 0$$

dans le cas où $\lambda > 0$, et

$$\frac{dz}{dx} = (y - g(x))^{-\frac{\mu'+\lambda'}{\mu}} \mathfrak{P}_2\left((y-g(x))^{\frac{1}{\mu}} \mid x\right)$$

$$= z^{1+\frac{\mu'}{\lambda'}} \mathfrak{P}_3\left(z^{-\frac{1}{\lambda'}} \mid x\right),\ \mathfrak{P}_3(0 \mid x) \neq 0$$

dans le cas où $\lambda = 0$.

On aura un résultat analogue pour une intégrale quelconque quand x est situé dans le voisinage d'un point singulier fixe ξ, en supposant seulement que le point $\left(\frac{dy}{dx}, y\right)$ soit situé dans le voisinage du point considéré de la courbe algébrique $F(y', y, t, x) = 0$. Alors

$$(4) \qquad \frac{dz}{dx} = z^{1+\frac{\lambda+\mu}{\lambda'}} \mathfrak{P}\left(z^{-\frac{1}{\lambda'}} \mid x\right),\ \mathfrak{P}(0 \mid x) \neq 0$$

si $\lambda > 0$, et

$$(4') \qquad \frac{dz}{dx} = z^{1+\frac{\mu'}{\lambda'}} \mathfrak{P}\left(z^{-\frac{1}{\lambda'}} \mid x\right),\ \mathfrak{P}(0 \mid x) \neq 0$$

si $\lambda = 0$.

Cela posé, supposons que l'équation (1) soit satisfaite par une fonction y à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points critiques. Alors

$$z = R\left(\frac{dy}{dx}, y \mid x\right)$$

est une fonction à un nombre fini de branches et à un nombre fini de *points singuliers*, car, à l'exception des points singuliers fixes ξ, elle ne saurait devenir infinie qu'en un point critique de y. Étudions l'entourage d'un point ξ. Si $|z|$ est suffisamment grand, z satisfait à l'équation (4) ou (4'). Or $\lambda + \mu > 0$, $\mu' > 0$; par suite, on peut employer les raisonnements par lesquels nous avons déduit, dans le mémoire cité, certains résultats de M. Boutroux concernant la croissance des intégrales. On aura ainsi le résultat qu'il correspond à tout point ξ un nombre r de telle manière que l'inégalité

$$|z| < |x - \xi|^r$$

a lieu dans un certain entourage de $x = \xi$. Comme ξ est un point singulier isolé et comme z a, d'après la supposition, un nombre fini de branches, on en conclut

que tout point ξ est au plus un point singulier algébrique de z et que z est une fonction algébrique. Par suite, y est une fonction algébrique.

Le théorème démontré peut être complété par le théorème suivant:

Théorème. Une équation (I) *ne peut être satisfaite par une fonction transcendante à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points singuliers que dans le cas où l'équation* (I) *se transforme à une équation linéaire*

$$\frac{dz}{dx} = Az + B$$

par une transformation de la forme

$$y = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m,$$

ou à une équation linéaire et homogène

$$\frac{dz}{dx} = Az$$

par une transformation de la forme

$$y = \sum_{\nu=-n'}^{n} a_\nu z^\nu, \quad n + n' = m,$$

A, B et a_ν étant des fonctions algébriques de x.

Supposons qu'il existe une intégrale transcendante y à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points singuliers. Il résulte d'abord du théorème démontré que l'équation (I) doit être une équation à points critiques fixes. Ensuite, il résulte d'un théorème de POINCARÉ[1] que le genre ϱ de la courbe algébrique $F(y', y, t, x) = 0$ doit être ≤ 1, car si $\varrho > 1$, l'intégrale générale est une fonction algébrique.

Supposons que $\varrho = 1$. Alors, l'équation (I) se transforme à une équation

$$\frac{dz}{dx} = a(x)\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$$

par une transformation qui peut s'écrire

$$z = R\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right)$$

[1] *Sur un théorème de M. Fuchs.* Acta mathematica, t. 7, p. 1.

ou inversement

$$y = R_1\left(\frac{dz}{dx}, z \mid x\right),$$

g_2, g_3 étant des constantes, a et les coefficients des fonctions rationnelles R, R_1 étant des fonctions algébriques de x. Introduisant dans R l'intégrale y considérée on aura une fonction z à un nombre fini de branches; elle est nécessairement transcendante, car on a inversement $y = R_1\left(\frac{dz}{dx}, z \mid x\right)$.

La fonction $R_1(z', z \mid x)$ devient infinie pour certains points (z', z) de la courbe $z'^2 = a^2(4z^3 - g_2 z - g_3)$, soit $z = g(x)$ une telle valeur de z. Il est évident que R_1 devient infinie pour le point correspondant, quel que soit x, à l'exception peut-être d'un nombre fini de valeur de x. Il est facile à en conclure que la fonction $y = R_1\left(\frac{dz}{dx}, z \mid x\right)$ devient infinie pour une infinité de valeurs de x, contrairement à l'hypothèse. Il suffit de montrer que $z - g(x)$ a une infinité de zéros. La fonction $u = \frac{1}{z - g(x)}$ satisfait à l'équation

$$\frac{du}{dx} = -u^2\left[a(x)\sqrt{4\left(g(x) + \frac{1}{u}\right)^3 - g_2\left(g(x) + \frac{1}{u}\right) - g_3} - g'(x)\right]$$

dont le second membre devient infini pour $u = \infty$ de l'ordre 2 ou exceptionnellement de l'ordre $^3/_2$. Si la fonction $z - g(x)$ n'avait qu'un nombre fini de zéros, u aurait un nombre fini de points singuliers, d'après les résultats de M. Boutroux u et z seraient des fonctions algébriques.

Par là, il est démontré qu'on ne peut pas avoir $\varrho = 1$; donc, $\varrho = 0$. Alors, l'équation (1) se transforme à une équation de Riccati

$$\frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz + C$$

par une transformation

$$z = R\left(\frac{dy}{dx}, y \mid x\right)$$

ou inversement

$$y = R_1(z \mid x).$$

Supposons en premier lieu que l'équation (1) ne puisse être transformée à une équation linéaire. Alors, l'équation de Riccati n'aura aucune intégrale algébrique. Si y est l'intégrale considérée de (1), $z = R\left(\frac{dy}{dx}, y \mid x\right)$ est une fonction transcen-

dante à un nombre fini de branches. On voit comme précédemment que les fonctions $\frac{1}{z}$, $z - g(x)$, où $g(x)$ est une fonction algébrique, ont une infinité de zéros, et on en conclut que la fonction $y = R_1(z|x)$ a une infinité de pôles, contrairement à l'hypothèse.

Il est donc démontré que l'équation (1) se transforme à une équation linéaire par une transformation $z = R\left(\frac{dy}{dx}, y \mid x\right)$ ou inversement $y = R_1(z|x)$. Si l'équation linéaire n'a aucune intégrale algébrique, on démontrera comme précédemment que la fonction $R_1(z|x)$ de z ne peut devenir infinie que pour $z = \infty$, c'est-à-dire que R_1 est une fonction entière de z. On voit facilement que son degré est égal à m. Si l'équation linéaire a une intégrale algébrique, on peut supposer que ce soit $z = 0$, c'est-à-dire que l'équation est homogène. Alors, on démontre que R_1 ne peut devenir infinie que pour $z = 0$ ou $z = \infty$. Par suite, R_1 aura la forme $y = \sum_{\nu = -n'}^{n} a_\nu z^\nu$. À une valeur de y, il correspond $n + n'$ valeurs de z et $n + n'$ valeurs de $\frac{dy}{dx}$, comme on le voit facilement, donc $n + n' = m$. Le théorème est donc démontré.

Les considérations précédentes s'appliquent facilement à l'étude d'un point singulier, soit $x = 0$, d'une équation de la forme

$$(5) \qquad F_0(y|x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + F_1(y|x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + F_m(y|x) = 0,$$

$F_0, F_1, \ldots F_m$ étant des fonctions entières et rationnelles de y, dont les coefficients sont des séries de puissances de x. On aura le résultat suivant.

Théorème. Supposons en premier lieu que l'équation (5) *n'est pas une équation à points critiques fixes et qu'il existe une branche d'intégrale, définie pour* $|x| < r$, *ayant un nombre fini de valeurs en chaque point et n'ayant d'autre point critique que* $x = 0$. *Alors, cette branche aura au plus un point singulier algébrique en* $x = 0$.

Supposons en second lieu qu'il existe une branche d'intégrale, définie pour $|x| < r$, *et ayant en* $x = 0$ *un point singulier isolé non algébrique, dans le voisinage duquel un nombre fini de valeurs se permutent. Alors, l'équation* (5) *se transforme à une équation linéaire*

$$\frac{dz}{dx} = Az + B$$

par une transformation de la forme

$$y = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$$

ou à une équation linéaire et homogène

$$\frac{dz}{dx} = A z$$

par une transformation de la forme

$$y = \sum_{\nu=-n'}^{n} a_\nu z^\nu, \quad n + n' = m,$$

A, B et a_ν étant des séries de la forme $x^{\frac{\lambda}{\mu}} \mathfrak{P}\left(x^{\frac{1}{\mu}}\right)$, *où μ est un entier $\geqq$ 1 et λ un entier quelconque ou nul.*

L'ordre de croissance de la branche considérée dans la seconde partie de ce théorème est déterminé par l'ordre d'infinitude de la série A pour $x = 0$.[1] Si cette série commence par la puissance $x^{-(1+k)}$ l'ordre de croissance est égal à k. On peut obtenir une limite inférieure de ce nombre. Supposons d'abord que la transformation a la forme $y = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$. On peut supposer que $a_0 = 1$. En étudiant l'entourage de $y = \infty$ on voit facilement que $-m^2 A$ est égal au coefficient de y dans le quotient $\frac{F_1}{F_0}$, par suite, A est une série de puissance de x, donc k est un entier qui est nécessairement $\geqq$ 1. Supposons ensuite que la transformation a la forme $y = \sum_{\nu=-n'}^{n} a_\nu z^\nu$. On peut supposer que $a_n = 1$. Par un calcul élémentaire on trouve que les termes de l'équation (5) qui sont du plus grand degré m par rapport à $\frac{dy}{dx}$ et y peuvent s'écrire

$$\left[\frac{dy}{dx} - \left(\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}} - n' A\right) y\right]^{n'} \left(\frac{dy}{dx} - n A y\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)^m - \left[n'\left(\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}} - n' A\right) + n^2 A\right] y \left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \left[n' n^2 A \left(\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}} - n' A\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n'(n'-1)}{2}\left(\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}} - n' A\right)^2 + \frac{n(n-1)}{2} n^2 A^2\right] y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-2} + \cdots$$

[1] Je dois à M. Pólya d'avoir posé la question concernant la croissance dont la discussion suivante donne la solution.

On conclut que A et $\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}}$ satisfont à des équations du second degré dont les coefficients sont des séries de puissances de x. L'ordre d'infinitude de $\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}}$ est égal à 1, si ce quotient devient égal à ∞ pour $x = 0$; par suite k est un entier si $n \neq n'$. Le seul cas où k pourrait être < 1 est donc celui où $n = n'$; alors, k est égal à $\frac{1}{2}$ ou à un multiple de $\frac{1}{2}$.

ON TWO THEOREMS OF F. CARLSON AND S. WIGERT.

BY

G. H. HARDY
NEW COLLEGE, OXFORD.

1. In this short note I have united a number of remarks relating to two theorems due in part to WIGERT and in part to CARLSON.[1] The theorems belong to the same region of the theory of functions, and it is natural to consider them together.

I.

2. I write $z = x + iy = re^{i\theta}$. Then the first theorem is as follows.[2]

[1] The manuscript of the note (then entitled 'On two theorems of Mr. S. Wigert') was sent to Prof. MITTAG-LEFFLER in 1917. I was at that time unaware of the existence of Mr. CARLSON's dissertation ('Sur une classe de séries de Taylor', Uppsala, 1914). This dissertation was given to me by Prof. MITTAG-LEFFLER in September 1919; and I found at once that Mr. CARLSON had anticipated not only Mr. WIGERT's theorem of 1916, referred to in § 2, but my own generalisation of this theorem and indeed the substance of most that I had to say.

The note, however, contains something in substance, and a good deal in presentation, that is new; and I have therefore agreed to Prof. MITTAG-LEFFLER's suggestion that it should still appear. Except as regards §§ 1—2, I have left it substantially in its original form.

[2] WIGERT ('Sur un théorème concernant les fonctions entières', *Arkiv för Matematik*, vol. 11, 1916, no. 22, pp. 1—5) proves a theorem which is less general in that (1) the angle is supposed to cover the whole plane and (2) $f(z)$ is supposed to vanish for all positive and negative integral values of z. CARLSON (*l. c.*, p. 58) proves a theorem which contains the present theorem as a particular case (but is in fact substantially equivalent to it). His method of proof is similar to that of the first two proofs given here.

WIGERT (*l. c.*) refers to previous and only partially succesful attempts to prove his theorem, and gives a proof based on a theorem of PHRAGMÉN ('Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions', *Acta Mathematica*, vol. 28, 1904, pp. 351—369). He deduces as a corollary a result relating to the case in which $f(z)$ vanishes only for positive integral values of z; in this the number π is replaced by the less favourable number $\frac{1}{2}\pi$. I may add that a similar result, in which $\frac{1}{2}\pi$ is replaced by the still less favourable number 1, was found independently by PÓLYA ('Über ganzwertige ganze Funktionen', *Rendiconti del Circolo Matematico*

If

(1) *$f(z)$ is regular at all points inside the angle $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, where $\alpha \geq \frac{1}{2}\pi$;*

(2) $$|f(z)| < A e^{kr}, \text{ where } k < \pi, \text{ throughout this angle;}$$

(3) $$f(n) = 0 \text{ for } n = 1, 2, 3, \ldots;$$

then $f(z)$ is identically zero.

3. It seems most natural to deduce this theorem from those proved by Phragmén and Lindelöf in Part III of their well-known memoir in Vol. 31 of the *Acta Mathematica*.[1] Let us suppose that $f(z)$ is not always zero, and write, with Phragmén and Lindelöf,

$$h(\theta) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r},$$

so that

$$h(\theta) \leq k, \qquad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha).$$

Then $h(\theta)$ is continuous for $-\alpha < \theta < \alpha$.[2]

Now let

$$F(z) = \frac{f(z)}{\sin \pi z},$$

so that $F(z)$ also is regular inside the angle of the theorem; and let $H(\theta)$ be formed from $F(z)$ as $h(\theta)$ is from $f(z)$. Then it is obvious that

(1) $$H(\theta) = h(\theta) - \pi |\sin \theta| \leq k - \pi |\sin \theta|,$$

except possibly for $\theta = 0$.

If $\theta = 0$, $z = x$ is real. We write

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad F(x) = U(x) + iV(x).$$

Let us suppose that x is not an integer, and that n is the integer nearest to x. Then

Palermo, vol. [illegible], pp. [illegible]. It should be added that this result of Pólya appears only incidentally as a corollary of theorems of a somewhat different character and of the highest interest.

[1] E. Phragmén and E. Lindelöf, 'Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier', *Acta Mathematica*, vol. 31, 1908, pp. 381—406.

[2] This follows from the argument of pp. 404—405 of Phragmén and Lindelöf's memoir. This argument presupposes that the value of $h(\theta)$ is not always $-\infty$, a possibility excluded by the theorem of p. 385.

$$U(x)=\frac{x-n}{\sin \pi x}u'(\xi_1),\quad V(x)=\frac{x-n}{\sin \pi x}v'(\xi_2),$$

where ξ_1 and ξ_2 are numbers between n and x. It follows that

$$|F(x)|<C\varphi_n,$$

where C is a constant and φ_n is the maximum of $|f'(x)|$ for $n-1\leq x\leq n+1$. But

$$f'(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-x)^2}dz,$$

where the contour of integration is the circle $|z-x|=1$; and so

$$|f'(x)|<Ae^{k(x+1)},\quad \varphi_n<Ae^{k(n+2)}.$$

Thus

$$|F(x)|<Be^{kx},$$

where B is a constant.

It follows that $H(0)<k$. Hence $H(\theta)$ is continuous for $\theta=0$, and (1) holds for all values of θ between $-\alpha$ und α. Thus $H(\theta)<0$ for $\beta<\theta<\gamma$ and $-\gamma<\theta<-\beta$, β being the positive acute angle whose sine is $\frac{k}{\pi}$, and γ the lesser of α and $\pi-\beta$.

But it is easily proved that this is impossible. Suppose first that $\alpha>\frac{1}{2}\pi$. Then $H(\theta)$ cannot be negative for $-\alpha<\theta<\alpha$, since the length of this interval is greater than π.[1] There is therefore, inside this interval, an interval in which $H(\theta)$ is positive.[2] This last interval must form part of the interval $-\beta\leq\theta\leq\beta$; and its length is therefore less than π. And this, finally, is impossible.[3]

Secondly, suppose that $\alpha=\frac{1}{2}\pi$. If $H(\theta)$ is not negative for $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$, we obtain a contradiction in the same way as before. If $H(\theta)$ is negative for $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$, it must be of the form $L\cos\theta+M\sin\theta$.[4] It is plain that L must be negative and M zero, and that $H(\theta)$ must tend to zero as we approach an end of the interval, which is not the case.

[1] Phragmén and Lindelöf, *l. c.*, p. 400.
[2] *Ibid.*, p. 399.
[3] *Ibid.*, p. 399.
[4] *Ibid.*, p. 403.

We have therefore arrived in any case at a contradiction, and the theorem is proved. It is easy to see, by considering a function of the form $e^{-cz}\sin\pi z$, that it ceases to be true when $\alpha < \frac{1}{2}\pi$.

4. I shall now give an alternative proof of the theorem based on entirely different ideas. This proof is less elementary than the first, but seems to me to be of some instrinsic interest.

Suppose that w is positive, p a positive integer, $0 < \varkappa < 1$, and $p < \lambda < p+1$. Then it is clear that, under the conditions of the theorem, we have

$$\sum_1^p f(n)(-w)^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi z}f(z)w^z dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi z}f(z)w^z dz,$$

the paths of integration being rectilinear.

Let us suppose now that $\lambda = p+\frac{1}{2}$ and that $p\to\infty$. Then

$$\left|\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{f(z)}{\sin\pi z}w^z dz\right| \leq w^{p+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|f\left(p+\frac{1}{2}+iy\right)\right|}{\cosh\pi y}dy.$$

Also

$$\left|f\left(p+\frac{1}{2}+iy\right)\right| < A\,exp\left[k\sqrt{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+y^2}\right] < Be^{k(p+|y|)},$$

where B is a constant; and so

$$\left|\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{f(z)}{\sin\pi z}w^z dz\right| < C(we^k)^p,$$

where C is another constant. Thus the integral tends to zero if w is sufficiently small. We have therefore

(1) $$\Phi(w) = wf(1) - w^2f(2) + w^3f(3) - \cdots = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi z}f(z)w^z dz,$$

for sufficiently small positive values of w. This formula is of course well-known, and shows that $\Phi(w)$ is an analytic function regular for all positive values of w.

Suppose now that $-1 < s < 0$. Then we can choose μ and ν so that $0 < \nu < -s < \mu < 1$. And we have[1]

$$\int_0^1 w^{s-1}\Phi(w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 w^{s-1}\,dw \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{\pi}{\sin\pi z} f(z) w^z dz, \tag{2}$$

$$\int_1^\infty w^{s-1}\Phi(w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_1^\infty w^{s-1}\,dw \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{\pi}{\sin\pi z} f(z) w^z dz, \tag{3}$$

provided only that these integrals are convergent.

The double integral

$$\int_0^1 \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \left| \frac{\pi}{\sin\pi z} f(z) w^{z+s-1}\,dw\,dz \right|$$

is convergent, as may be seen at once by comparison with the integral

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} w^{\mu+s-1} e^{-(\pi-k)|y|}\,dw\,dy.$$

Hence the integral (2) is convergent, and may be calculated by inversion of the order of integration. The same arguments may be applied to the integral (3). Inverting the order of integration, and combining the results, we obtain

$$\int_0^\infty w^{s-1}\Phi(w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{\pi}{\sin\pi z}\,\frac{f(z)}{z+s}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{\pi}{\sin\pi z}\,\frac{f(z)}{z+s}\,dz,$$

or

$$\int_0^\infty w^{s-1}\Phi(w)\,dw = -\frac{\pi}{\sin\pi s} f(-s). \tag{4}$$

This formula has been proved for $-1 < s < 0$. It is equivalent to

[1] This artifice is due to MELLIN, from whose work the ideas of the proof are borrowed. See HJ. MELLIN, 'Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma und der Hypergeometrischen Funktionen; *Acta Societatis Fennicae*, vol. 21, no. 1. 1896, pp. 1—111 (pp. 37 *et seq.*).

$$\int_0^1 w^{t-1}(a_0 - a_1 w + a_2 w^2 - \cdots)\, dw = \frac{\pi}{\sin \pi t} a_{-t}, \tag{5}$$

where $0 < t < 1$ and $a_z = a(z)$ is an analytic function of z subject to certain conditions. In this form the formula was communicated to me some years ago by Mr S. Ramanujan, in ignorance of Mellin's work.

So far we have made no assumption as to the values of $f(z)$ for integral values of z. It is plain that, if $f(n) = 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$, we obtain

$$f(-s) = 0 \qquad (-1 < s < 0),$$

so that $f(z)$ is always zero.

II.

5. Suppose that $f(z)$ is an integral function of z such that

$$|f(z)| < e^{(\gamma+\varepsilon)r} \tag{1}$$

for every positive ε and all sufficiently large values of r,

$$|f(z)| > e^{(\gamma-\varepsilon)r} \tag{2}$$

for every positive ε and for a corresponding sequence of values of r whose limit is infinity. Then, following Pringsheim,[1] I shall call $f(z)$ an integral function of order 1 and type γ. This being so, the second theorem which I wish to discuss may be stated as follows.

The necessary and sufficient condition that

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

should be an integral function of $\frac{1}{1-z}$ *is that there should be an integral function* $a(z)$, *of order* 1 *and type* 0, *which takes the values* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *for* $z = 1, 2, 3, \ldots$

I may insert here a few references to the rather extensive literature connected with this theorem. The complete theorem is due to Wigert[2]; but the second half of it, asserting the *sufficiency* of the condition, was discovered almost simultaneously, and by a quite different method, by le Roy.[3] Another proof of this part of the

[1] A. Pringsheim, 'Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung', *Mathematische Annalen*, vol. 58, 1904, pp. 257—342.

[2] S. Wigert, 'Sur les fonctions entières', *Öfversikt af K. Vet.-Ak. Förhandlingar*, Årg. 57, 1900, pp. 1001—1011.

[3] E. le Roy, 'Sur les séries divergentes et les fonctions données par un développement de Taylor', *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, ser. 2, vol. 2, 1900, pp. 317—430 (pp 350—353).

theorem has been given by LINDELÖF,[1] who deduces it, along with many other important theorems, from the *'formules sommatoires'* of the calculus of residues. The whole theorem was rediscovered at a slightly later date by FABER,[2] whose proof does not differ in principle from WIGERT's. It has been further discussed by PRINGSHEIM,[3] who presents the whole proof in a particularly simple and elementary form. And, as explained in the footnote to § 1, it is a special case of much more general theorems to be found in CARLSON's dissertation.

6. The proof which I give here stands in closest connection with the ideas of LE ROY. I begin by proving the following lemma.

In order that $a(z)$ should be an integral function of order 1 and type 0, it is necessary and sufficient that $a(z)$ should be of the form

$$a(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{zu}\varphi\left(\frac{1}{u}\right)du, \tag{1}$$

where C is a simple contour enclosing the origin, and $\varphi\left(\frac{1}{u}\right) = \varphi(w)$ is an integral function of w.

This lemma is extremely easy to prove and very useful, but I do not remember having seen it stated explicitly. In the first place the condition is sufficient. For we may replace the contour by a circle whose centre is the origin and whose radius is ε, and then

$$|a(z)| = |a(re^{i\theta})| \leq \varepsilon M e^{\varepsilon r},$$

where M is the maximum of $\left|\varphi\left(\frac{1}{u}\right)\right|$ on the circle.

In the second place the condition is necessary. For if

$$a(z) = \sum_0^\infty c_k z^k$$

is a function of the required type, then[4]

[1] E. LINDELÖF, *Le calcul des résidus,* Paris, 1905, p. 127. See also 'Quelques applications d'une formule sommatoire générale', *Acta Societatis Fennicae,* vol. 31, no. 3, 1902, pp. 1—46.

[2] G. FABER, 'Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen', *Mathematische Annalen,* vol. 57, 1903, pp. 369—388.

[3] A. PRINGSHEIM, 'Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihen-Transformation', *Münchener Sitzungsberichte,* 1912, pp. 11—92 (pp. 40—45).

[4] See, *e. g.,* PRINGSHEIM, *l. c.,* p. 38.

$$\sqrt[n]{n!\,|c_n|} \to 0;$$

so that

$$\varphi(w) = \sum_0^\infty n!\, c_n w^{n+1}$$

is an integral function of w. Thus

$$a(z) = \sum_0^\infty n!\, c_n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zu}}{u^{n+1}}\, du = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zu} \varphi\left(\frac{1}{u}\right) du.$$

7. We have now to show that $f(z)$ is an integral function of $\frac{1}{1-z}$ if and only if there exists a function of the form (1) which assumes the values $a_1, a_2, \ldots$ for $z = 1, 2, \ldots$

In the first place, if such a function exists, we have

$$(1) \qquad f_1(z) = f(z) - a_0 = \sum_1^\infty a_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z e^u}{1 - z e^u} \varphi\left(\frac{1}{u}\right) du,$$

if C is a contour enclosing the origin and $|z e^u| < 1$ at all points of C. These conditions will be satisfied if $|z| < 1$ and C lies entirely to the left of the line

$$\Re(u) = \log\left|\frac{1}{z}\right|.$$

The only singularities of the integrand, other than the origin and infinity, are the various values of $\log \frac{1}{z}$; and it follows, by a familiar argument due in principle to Hadamard,[1] that the only possible singularities of $f_1(z)$ are the values of z for which $\log \frac{1}{z}$ is zero or infinite, that is to say the values 0, 1, and ∞.

Let us draw a cut in the plane of z from 1 to ∞, say along the positive real axis. Then there is a branch $\mathfrak{f}_1(z)$ of $f_1(z)$, the so-called 'principal' branch, which is one-valued and regular in the cut plane and vanishes at the origin. If finally we can show that *$f_1(z)$ is one-valued in the neighbourhood of $z = 1$*, it will follow that $\mathfrak{f}_1(z)$ is the *only* branch of $f_1(z)$, and so that $f_1(z)$ is a one-valued

[1] J. Hadamard, 'Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor', *Journal de mathématiques*, ser. 4, vol. 8, 1892, pp. 101—186.

function with $z = 1$ as its sole finite singularity, that is to say an integral function of $\frac{1}{1-z}$.

Suppose then, to fix our ideas, that z tends to 1 through positive values less than 1, that C is a circle whose centre is the origin and whose radius is less than $\log\left|\frac{1}{z}\right|$, and that C' is a concentric circle whose radius is greater than $\log\left|\frac{1}{z}\right|$. Then[1]

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^u}{1 - ze^u}\varphi\left(\frac{1}{u}\right) du$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{\log\frac{1}{z}}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{ze^u}{1 - ze^u}\varphi\left(\frac{1}{u}\right) du,$$

where $\log\frac{1}{z}$ denotes, of course, the value of the logarithm which vanishes for $z = 1$. It is plain that the last integral representents a function regular for $z = 1$. As

$$\varphi\left(\frac{1}{\log\frac{1}{z}}\right)$$

is one-valued in the neighbourhood of $z = 1$, so also is $f_1(z)$. Thus one half of the theorem is proved.

8. Secondly, let us suppose that $f(z)$ is a function of the type prescribed. We have

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \qquad (1)$$

the path of integration being a closed contour surrounding the origin, but excluding the point $z = 1$. It is evident that, if $n \geq 1$,[2] we may deform this contour into that formed by (1) the right hand half of the circle

$$|z| = e^{-\gamma},$$

[1] Compare G. H. Hardy, 'A method for determining the behaviour of a function represented by a power series near a singular point on the circle of convergence', *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 3, 1905, pp. 381—389.

[2] The argument fails for $n = 0$ unless $f(x) = 0$. Compare Wigert's paper.

γ being any positive number, and (2) the parts of the imaginary axis which stretch from the ends of this semicircle to infinity.

Let us now effect the transformation $z = e^{-u}$, $u = \log \frac{1}{z}$, where that value of the logarithm is chosen whose imaginary part lies between $-\pi$ and π. The contour in the z-plane becomes a contour in the u-plane formed by three sides of an infinite rectangle whose vertices are

$$\gamma + \frac{1}{2}\pi i, \quad -\infty + \frac{1}{2}\pi i, \quad -\infty - \frac{1}{2}\pi i, \quad \gamma - \frac{1}{2}\pi i$$

and we have

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int e^{nu} f(e^{-u})\, du,$$

the integration being effected along this contour. It is obvious that the contour may now be deformed into any simple closed contour which encloses the origin but lies entirely inside the circle $|u| = 2\pi$. Finally, $f(e^{-u})$ is plainly regular except for $u = 0$ and $u = \pm 2k\pi i$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), and is therefore of the form

$$f(e^{-u}) = \varphi\left(\frac{1}{u}\right) + \psi(u),$$

where $\varphi(w)$ is an integral function of w and $\psi(u)$ is a power series whose radius of convergence is at least 2π. And

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int e^{nu} \varphi\left(\frac{1}{u}\right) du,$$

which proves the theorem.

9. The preceding proof of WIGERT's theorem is of course less elementary than (for example) PRINGSHEIM's. It seems to me interesting none the less on account of its almost intuitive character. It has the further advantage of lending itself very readily to generalisation, as I shall proceed to show.

In the first place, the lemma of § 6 may be at once generalised as follows:

In order that $a(z)$ should be an integral function of order 1 *and type γ, it is necessary and sufficient that $a(z)$ should be of the form*

$$a(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{zu} \varphi\left(\frac{1}{u}\right) du,$$

where C is a contour which includes the circle $|u| = \gamma$, and $\varphi(w)$ is a function regular for $|w| < \frac{1}{\gamma}$ $\left(\text{but not for } |w| \leq \frac{1}{\gamma}\right)$.

To prove this we observe that $a(z) = \Sigma c_n z^n$ will be a function of the type required if, and only if,

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!\,|c_n|} = \gamma,^{1}$$

so that the radius of convergence of $\Sigma n!\, c_n z^n$ is precisely γ. The proof is then practically the same as that of § 6.

We can now express

$$f_1(z) = f(z) - a_0 = \sum_1^\infty a_n z^n$$

in the form (1) of § 7. The possible singularities of $f_1(z)$ are now 0, ∞, and the values of z for which $\left|\log \frac{1}{z}\right| < \gamma$. The latter values cover the interior of the curve defined by the equation

(1) $$\left|\log \frac{1}{z}\right| = \gamma.$$

We suppose that $0 < \gamma < \pi$ and $-\pi < \theta < \pi$. Then the curve defined by (1) has the polar equation

(2) $$\left(\log \frac{1}{r}\right)^2 = \gamma^2 - \theta^2,$$

and consists of a single loop, enclosing the point $r = 1$, $\theta = 0$, and cutting the unit circle where $\theta = \pm \gamma$. The function $f(z)$ is regular outside this curve, and has a branch regular at the origin and at infinity. The curve may be the boundary of existence of the function: in this case the function is one-valued. But in other circumstances the function may have other branches of which 0 or ∞ are singular points.[2]

10. I shall now suppose that $f(z)$ is a branch of an analytic function, one-valued and regular throughout the region exterior to the curve (2), including

[1] See pp. 337—342 of PRINGSHEIM's paper in the *Mathematische Annalen* quoted above.

[2] The substance of these results is contained in the work of LE ROY and LINDELÖF. Cf. LE ROY, *l. c.*, and LINDELÖF, *Le calcul des residus*, pp. 135—136. A less complete result is given by PRINGSHEIM: see p. 46 of his paper in the *Münchener Sitzungsberichte* already referred to.

infinity; and I shall show that in these circumstances there is an integral function $a(z)$, of oder I and type γ, which assumes the values $a_1, a_2, a_3, \ldots$ for $z = 1, 2, 3, \ldots$

We start from the formula (1) of § 8, and deform the path of integration into one of the same general character as that used in § 8, but so constructed as to leave the curve (2) entirely on its right. We may take the contour, for example, to be formed by part of the circle $r = e^{-\delta}$, where $\delta > \gamma$, and parts of the radii $\theta = \pm\lambda$, where $\gamma < \lambda < \pi$. This contour transforms, as in § 8, into a quasi-rectangular contour, which now lies entirely outside the circles $|u| = \gamma$ and $|u \pm 2k\pi i| = \gamma$ $(k = 1, 2, \ldots)$. We thus obtain

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int e^{nu} f(e^{-u})\,du,$$

where $f(e^{-u})$ is regular in the region exterior to the circles just referred to. We can express $f(e^{-u})$ in the form of a LAURENT's series

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n u^n = \sum_{-\infty}^{-1} b_n u^n + \sum_{0}^{\infty} b_n u^n = \varphi\left(\frac{1}{u}\right) + \psi(u),$$

the first series being convergent for $|u| > \gamma$ and the second for $|u| < 2\pi - \gamma$; and plainly

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int e^{nu} \varphi\left(\frac{1}{u}\right) du,$$

where now the path of integration is any closed contour at all points of which $|u| > \gamma$.

We have thus proved the following theorem.

The necessary and sufficient condition that $f(z) = \Sigma a_n z^n$ should be a one-valued branch of an analytic function, regular in the region exterior to the curve

$$\left(\log\frac{1}{r}\right)^2 = \gamma^2 - \theta^2 \qquad (0 < \gamma < \pi),$$

and including infinity, but not in any more extensive region of the same character, is that there should be an integral function $a(z)$, of order 1 and type γ, which assumes the values $a_1, a_2, \ldots$ for $z = 1, 2, \ldots$

The function $a(z)$ is, in virtue of WIGERT's first theorem, unique. It is plain that the theorem ceases to be true if $\gamma > \pi$. The critical curve then is

no longer a simple loop surrounded by an open infinite region, and there are infinitely many different functions which have the properties specified.

The proof of the theorem which I have given seems to be that which is most in conformity with the general ideas of this note. But it can also be proved by an argument more on the lines of WIGERT's note and depending upon the properties of the functions

$$\psi_n(z) = 1^n z + 2^n z^2 + 3^n z^3 + \cdots = \left(z \frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{1 - z}.$$

Chelsea, London, August 1917.

SUR L'ÉLÉMENT SIMPLE DE LA DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE TROISIÈME ESPÈCE.

PAR

PAUL APPELL

à Paris.

I. Dans plusieurs mémoires insérés aux Annales de l'Ecole normale supérieure[1] (Troisième série, T. I, II, III et V, 1884, 5, 6 et 8), j'ai introduit une fonction de deux variables indépendantes u et z,

$$(1)\qquad \chi_m(u, z) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2K}(u - z - 2niK'),$$

(m entier positif) où les deux périodes ω et ω' sont désignées par $2K$ et $2iK'$, avec

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad |q| < 1.$$

Cette fonction de u admet le pôle simple $u = z$ avec le résidu $+1$, et les pôles homologues dans les autres parallélogrammes des périodes, avec les résidus résultant des relations fonctionnelles suivantes. Cette même fonction considérée comme fonction de z admet le pôle simple $z = u$ avec le résidu -1 et les pôles homologues avec les résidus résultant des mêmes relations. La fonction $\chi_m(u, z)$ admet la période $2K$ par rapport à chaque variable. Elle vérifie, en outre, les deux relations

[1] Voyez également Comptes Rendus, 17 décembre 1883, t. 97, p. 1419.

$$
(2)\quad \begin{cases}
\chi_m(u, z + 2iK') = e^{-\frac{m\pi zi}{K}} \chi_m(u, z), \\
\chi_m(u + 2iK', z) = e^{\frac{\quad}{K}} \chi_m(u, z) \\
\qquad -\frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{m\pi ui}{K}}\right) g_0^{(m)}(z) - \frac{\pi i}{K} \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} e^{\frac{(m-\nu)\pi ui}{K}} g_\nu^{(m)}(z)
\end{cases}
$$

où $g_\nu^{(m)}(z)$ désigne la fonction entière

$$
(3)\qquad g_\nu^{(m)}(z) = e^{\frac{\nu\pi zi}{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi zi}{K}} q^{mn(n-1)+2n\nu},
$$

$$
(\nu = 0, 1, 2 \ldots, m-1).
$$

Cela posé, on suit qu'il existe deux sortes de fonctions doublement périodiques de troisième espèce, au sens d'Hermite, les unes (A) ayant plus de pôles que de zéros, les autres (B) ayant plus de zéros que de pôles, dans un parallélogramme des périodes.

(A) Soit $F(u)$ une fonction de troisième espèce, ayant m pôles de plus que de zéros: on peut toujours ramener cette fonction à vérifier deux relations de la forme

$$
(4)\qquad F(u + 2K) = F(u),\quad F(u + 2iK') = e^{\frac{m\pi ui}{K}} F(u).
$$

Supposons que, dans un parallélogramme des périodes, elle admette des pôles du premier ordre $a, b, \ldots l$ avec les résidus correspondants $A, B, \ldots L$; on peut écrire alors la formule de décomposition en éléments simples

$$
(4')\qquad F(u) = A\chi_m(u, a) + B\chi_m(u, b) + \cdots + L\chi_m(u, l);
$$

les résidus ne sont pas indépendants des pôles; ils vérifient les m relations

$$
(4'')\qquad Ag_\nu^{(m)}(a) + Bg_\nu^{(m)}(b) + \cdots + Lg_\nu^{(m)}(l) = 0
$$

$$
(\nu = 0, 1, 2, \ldots m-1).
$$

(B) Soit $F(z)$ une fonction de troisième espèce ayant, dans un parallélogramme, m zéros de plus que de pôles; appelons $a, b, \ldots l$ les pôles, $A, B, \ldots L$ les résidus. On amènera cette fonction à vérifier les relations

$$
(5)\qquad F(z + 2K) = F(z),\quad F(z + 2iK') = e^{\frac{m\pi zi}{K}} F(z)
$$

et on aura

$$(5') \qquad F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \cdots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

$G(z)$ désignant une fonction entière vérifiant les relations (5), c'est-à-dire une fonction de la forme

$$(5'') \qquad G(z) = \lambda_0 g_0^{(m)}(z) + \lambda_1 g_1^{(m)}(z) + \cdots + \lambda_{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z),$$

où les λ sont des constantes. Les résidus $A . B \ldots L$ sont actuellement indépendants des pôles.

Tels sont les deux cas à envisager. C'est un fait remarquable que la même fonction $\chi_m(u, z)$ serve d'élément de décomposition, dans les deux cas: dans le premier cas (A), u est la variable et z un paramètre qui coïncide successivement avec les différents pôles; dans le deuxième cas (B), z est la variable et u un paramètre qui coïncide successivement avec les pôles.

On trouvera un exposé de cette théorie dans le *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen (T. I, Chap. XIV, p. 467) et dans le *Précis des fonctions elliptiques* par Appell et Lacour (Gauthier-Villars).

On a ainsi des méthodes générales de calcul pour les fonctions de troisième espèce. Ces méthodes permettent de retrouver et de rattacher à un même point de vue les nombreuses formules isolées trouvées par Hermite, puis les formules établies par Biehler dans son intéressante Thèse (*Sur les développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce*, Gauthier-Villars, 1879). Quelques-unes des formules que j'ai obtenues de cette façon ont été reproduites par Hermite, dans un mémoire inséré au tome C du Journal de Crelle.

Dans la Préface des *Oeuvres d'Hermite*, M. Emile Picard partant des travaux d'Hermite sur les fonctions elliptiques, dit:

»Je ne puis m'arrêter sur toutes les questions qu'il a étudiées dans cette théorie. Que de Mémoires seraient encore à citer, renfermant des idées ingénieuses et originales, sur lesquelles il revenait avec joie: décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, à laquelle M. Appell devait apporter des compléments importants . . .»

Ce passage, justifié par la constatation du rôle génial joué par Hermite dans l'établissement d'une théorie générale des fonctions doublement périodiques basée sur les méthodes de Cauchy, et dans la création de l'élément simple de décomposition des fonctions trigonométriques, elliptiques, et doublement périodiques de deuxième espèce, peut conduire le lecteur à une opinion erronée. Je

ne crois pas manquer aux sentiments de reconnaissance et d'affection que j'ai pour mon maître Hermite, en disant, que l'élément simple de décomposition χ_m des fonctions de troisième espèce a été établi par moi sans aucune indication. Plus tard, après mes premières publications, Hermite m'a confié un cahier manuscrit que j'ai analysé en conscience dans les Annales de l'Ecole Normale (Troisième série, T. III, 1886); ce cahier contenait seulement de nombreux développements en série isolés; aucun élément simple ne s'y trouvait indiqué; j'ai tenté, par des notations appropriées, de grouper les formules très-intéressantes trouvées par Hermite de façon à les rattacher à l'élément χ. Cet élément simple χ_m est essentiellement une fonction de deux variables, à laquelle j'ai été conduit en m'inspirant du théorème de M. Mittag-Leffler.

Après ces remarques d'ordre historique, je demande la permission d'établir certaines formules, liant entre elles des fonctions χ_m d'indices différents m', m'', ..., en ouvrant ainsi un ordre nouveau de recherches.

II. Cherchons d'abord une relation entre χ_1 et χ_2. Pour cela, considérons la fonction

$$F(u, v, z) = \chi_1(u, z)\, \chi_1(v, z), \tag{6}$$

où u, v, z sont trois variables indépendantes. Considérée comme fonction de z, cette fonction admet la période $2K$ et vérifie la relation

$$F(z + 2iK') = e^{-\frac{2\pi i}{K}} F(z);$$

c'est une fonction de troisième espèce ayant, dans un parallélogramme, deux zéros de plus que de pôles. On peut prendre pour pôles les deux points u et v; les résidus correspondants sont $-\chi_1(v, u)$ et $-\chi_1(u, v)$. On a donc

$$\begin{aligned} \chi_1(u, z)\, \chi_1(v, z) = \chi_1(v, u)\, \chi_2(u, z) + \chi_1(u, v)\, \chi_2(v, z) + \\ + \varphi_0(u, v)\, g_0^{(2)}(z) + \varphi_1(u, v)\, g_1^{(2)}(z) \end{aligned} \tag{7}$$

$\varphi_0(u, v)$ et $\varphi_1(u, v)$ étant deux fonctions uniformes de u et v admettant pour chaque variable la période $2K$.

On obtient une première expression des fonctions $\varphi_0(u, v)$ et $\varphi_1(u, v)$ en donnant à z une valeur annulant soit $g_1^{(2)}(z)$ soit $g_0^{(2)}(z)$. On peut aisément former les équations fonctionnelles que vérifient ces deux fonctions et s'en servir pour les déterminer. Quand on suit cette méthode, on est conduit naturellement à l'étude de la fonction de deux variables dont nous allons nous occuper.

III. *Etude d'une certaine fonction de deux variables.* Soit la fonction

$$\Phi(u, z) = g_0^{(1)}(z)\,\chi_1(u, z) - g_0^{(1)}(u)\,\chi_2(u, z). \tag{8}$$

Considérée comme fonction de z cette fonction admet la période $2K$ et se reproduit multipliée par $e^{-\frac{2\pi z i}{K}}$ quand on y change z en $z + 2iK'$; d'ailleurs elle est *entière*, car les infinis relatifs à z se détruisent; on peut dire aussi, en appliquant la formule de décomposition en éléments simples à la fonction de z $g_0^{(1)}(z)\,\chi_1(u, z)$, que l'on a

$$g_0^{(1)}(z)\,\chi_1(u, z) = g_0^{(1)}(u)\,\chi_2(u, z) + f_0(u)\,g_0^{(2)}(z) + f_1(u)\,g_1^{(2)}(z),$$

ce qui montre que la fonction Φ est entière en z,

$$\Phi(u, z) = f_0(u)\,g_0^{(2)}(z) + f_1(u)\,g_1^{(2)}(z).$$

Cette fonction (8) est aussi entière en u. En effet, considérée comme fonction de u elle semble admettre le pôle $u = z$ et les points homologues; mais, dans le voisinage de $u = z$, la partie principale du premier terme de (8) est $\frac{g_0^{(1)}(z)}{u - z}$ et celle du deuxième terme est $-\frac{g_0^{(1)}(z)}{u - z}$. Les fonctions inconnues $f_0(u)$ et $f_1(u)$ sont donc entières. Elles admettent la période $2K$. Formons la fonction $\Phi(u + 2iK', z)$ d'après (2). Nous avons

$$\begin{aligned}\Phi(u + 2iK', z) = {} & g_0^{(1)}(z)\left[e^{\frac{\pi u i}{K}}\chi_1(u, z) - \frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right)g_0^{(1)}(z)\right] \\ & - e^{-\frac{\pi u i}{K}}g_0^{(1)}(u)\left[e^{\frac{2\pi u i}{K}}\chi_2(u, z) - \frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{2\pi u i}{K}}\right)g_0^{(2)}(z)\right. \\ & \left. - \frac{\pi i}{K}e^{\frac{\pi u i}{K}}g_1^{(2)}(z)\right] = \\ = {} & e^{\frac{\pi u i}{K}}\Phi(u, z) - \frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right)[g_0^{(1)}(z)]^2 \\ & + \frac{\pi i}{2K}\left(e^{-\frac{\pi u i}{K}} + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right)g_0^{(1)}(u)\,g_0^{(2)}(z) \\ & + \frac{\pi i}{K}g_0^{(1)}(u)\,g_1^{(2)}(z).\end{aligned} \tag{9}$$

Mais on a

$$[g_0^{(1)}(z)]^2 = \alpha g_0^{(2)}(z) + \beta g_1^{(2)}(z),$$

α et β désignant les constantes

$$\alpha = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2n^2}, \quad \beta = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2n^2+2n}.$$

La formule (9) donne alors

$$\begin{aligned} f_0(u+2iK')\,g_0^{(2)}(z) + f_1(u+2iK')\,g_1^{(2)}(z) \\ = e^{\frac{\pi u i}{K}}\left[f_0(u)\,g_0^{(2)}(z) + f_1(u)\,g_1^{(2)}(z)\right] \\ -\frac{\pi i}{2K}\left[\alpha\left(1+e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) - \left(e^{-\frac{\pi u i}{K}} + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) g_0^{(1)}(u)\right] g_0^{(2)}(z) \\ -\frac{\pi i}{2K}\left[\beta\left(1+e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) - 2g_0^{(1)}(u)\right] g_1^{(2)}(z). \end{aligned}$$

D'où enfin, en identifiant les termes en $g_0^{(2)}(z)$ et $g_0^{(1)}(z)$

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} f_0(u+2iK') &= e^{\frac{\pi u i}{K}} f_0(u) - \frac{\pi i}{2K}\left[\alpha\left(1+e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) - \left(e^{-\frac{\pi u i}{K}} + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) g_0^{(1)}(u)\right] \\ f_1(u+2iK') &= e^{\frac{\pi u i}{K}} f_1(u) - \frac{\pi i}{2K}\left[\beta\left(1+e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) - 2g_0^{(1)}(u)\right]. \end{aligned}\right.$$

Ces relations permettent de déterminer $f_0(u)$ et $f_1(u)$ par la méthode des coefficients indéterminés.

IV. Dans la formule (7) on peut supposer $v = u$; la formule doit alors être modifiée à cause des termes $\chi_1(v, u)$ et $\chi_1(u, v)$ qui deviennent infinis. On a, dans ce cas,

$$(7')\qquad \chi_1^2(u, z) = -\frac{\partial \chi_2(u, z)}{\partial u} + \psi(u)\,\chi_2(u, z) + \lambda_0(u)\,g_0^{(2)}(z) + \lambda_1(u)\,g_1^{(2)}(z)$$

$\psi(u)$, $\lambda_0(u)$, $\lambda_1(u)$ étant des fonctions de u vérifiant des relations fonctionnelles qu'il est aisé d'établir.

V. On obtiendra des formules analogues à (7) et à (7') en appliquant la méthode de décomposition en éléments simples à des fonctions de z des formes suivantes

(11)
$$\chi_1(u, z)\,\chi_1(v, z)\,\chi_1(w, z)$$

ou, en général

(12)
$$\prod_{i=1}^{i=k} \chi_{m_i}(u_i, z).$$

La fonction (11) de z s'exprime par les fonctions $\chi_3(u, z)$, $\chi_3(v, z)$, $\chi_3(w, z)$ et, en général, la fonction (12) de z est une fonction linéaire de $\chi_{m_1+m_2+\cdots m_k}(u_i, z)$, où $i = 1, 2, \ldots k$.

Paris 25 mars 1919.

EXTENSION NOUVELLE D'UN LEMME DE SCHWARZ.

PAR

GASTON JULIA

à PARIS.

On trouve dans les œuvres de SCHWARZ (tome 2, page 109) le lemme suivant.

Si $f(z)$ est holomorphe pour $|z| < 1$ et si, dans tout ce domaine ($|z| < 1$) on a $|f(z)| \leq 1$, avec $f(0) = 0$, on a pour tout point z ($0 < |z| < 1$) l'inégalité $|f(z)| < |z|$ sauf dans le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire $ze^{i\theta}$, auquel cas $|f(z)| = |z|$.

On en peut conclure immédiatement que, hors le cas d'exception, $|f'(0)| < 1$ *sans égalité possible*. C'est évident si $f'(0) = 0$. Et si $f'(0) \neq 0$ on peut entourer 0 d'un cercle c assez petit pour que, z décrivant l'aire simple (C), $z_1 = f(z)$ décrive aussi une aire simple (C_1), à un seul feuillet, limité par une courbe analytique C_1 fermée *intérieure à C et contenant l'origine*. Cela permet de conclure que $|f'(0)| < 1$ car

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z^2}.$$

Or $\left|\frac{f(z)}{z^2}\right| < \left|\frac{1}{z}\right|$. Donc

$$|f'(0)| < \frac{1}{2\pi}\int_c \frac{|dz|}{|z|} = \frac{2\pi\varrho}{2\pi\varrho} = 1,$$

ϱ étant le rayon de C.

Le lemme de SCHWARZ affirme que, hors le cas banal $f(z) = ze^{i\theta}$, si z décrit l'intérieur du cercle $|z| \leq \varrho < 1$, son transformé $z_1 = f(z)$ décrit une surface de RIEMANN *toute entière intérieure à ce cercle* $|f(z)| < \varrho$, en supposant que $z = 0$ est un point invariant de la transformation.

Si l'on suppose maintenant que, pour $|z| < 1$ on a encore $|f(z)| \leq 1$, mais que le point ζ invariant ($f(\zeta) = \zeta$) n'est plus l'origine, mais un autre point *intérieur*

au cercle $|\zeta| < 1$, on verra bien facilement que, si ζ' désigne le point symétrique de ζ par rapport au cercle $|z| = 1$, on aura, dans le cercle $\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \leq \rho < \rho_0$, ($\rho_0$ étant la valeur constante de $\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$ pour $|z| = 1$, $\rho_0 = |\zeta|$), la relation

$$\left|\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

quel que soit $\rho < \rho_0$, sauf dans le cas où

$$\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'} = e^{i\theta}\,\frac{z-\zeta}{z-\zeta'},$$

c'est-à-dire où $f(z)$ est *homographique*, auquel cas on a toujours

$$\left|\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'}\right| = \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|.$$

Celà veut dire que, lorsque z décrit l'intérieur d'un cercle quelconque C du faisceau défini par les 2 points cercles ζ et ζ', cercle C intérieur à $|z| < 1$, le point $z_1 = f(z)$ *reste à l'intérieur du cercle C* sans jamais venir sur ce cercle, et décrit une surface de Riemann simplement connexe contenant ζ, toute intérieure à C (hors le cas où $f(z)$ est homographique).

S'affranchissant de l'hypothèse qu'il existe un point ζ invariant dans $|z| < 1$, hypothèse qui peut très bien n'être pas vérifiée, on envisagera un point quelconque ζ et son symétrique ζ' par rapport au cercle $|z| = 1$. Alors il est clair que, si $\zeta_1 = f(\zeta)$ est la valeur correspondante à ζ et ζ'_1 le symétrique de ζ_1 par rapport au cercle $|z| = 1$ (en supposant que ζ_1 ne soit pas sur le cercle), la fonction

$$\varphi(z) = \frac{1}{|\zeta_1|}\,\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}$$

est une fonction de la variable

$$u = \frac{1}{|\zeta|}\,\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}$$

qui est nulle pour $u = 0$ ($z = \zeta$) et qui pour $|u| < 1$ est toujours ≤ 1. On a donc, dans le cercle

$$\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \leq \rho\,|\zeta|.$$

qui est un cercle quelconque du faisceau (ζ, ζ') intérieur à $|z| < 1$

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\right| < \left|\frac{\zeta_1}{\zeta}\right| \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

sauf le cas où $f(z)$ serait homographique et conserverait l'intérieur du cercle $|z| < 1$ auquel cas le signe $<$ est à remplacer par $=$.

Ce fait s'énonce plus simplement si l'on transforme par une substitution linéaire convenable l'intérieur de $|z| < 1$ en l'intérieur du demi-plan analytique supérieur ($I(z) =$ partie imaginaire de $z > 0$). On voit alors immédiatement que, si $z_1 = f(z)$ transforme tout point z de ce demi-plan $(I(z) > 0)$ en un point z_1 du demi-plan $(I(z_1) > 0)$, si ζ est un point quelconque du demi-plan $(I(\zeta) > 0)$ et $\zeta_1 = f(\zeta)$ pour lequel $I(\zeta_1) > 0$, en désignant par ζ' et ζ'_1 les valeurs *conjuguées* de ζ et ζ_1 on aura

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

tant que $\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \leq \varrho < 1$ quel que soit $\delta < 1$, sauf dans le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire du type $\frac{az+b}{cz+d}$ conservant le demi-plan supérieur. Pour une telle fonction on aurait toujours

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\right| = \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

et d'ailleurs

$$\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta_1'} = \frac{z-\zeta}{z-\zeta'} e^{i\gamma}.$$

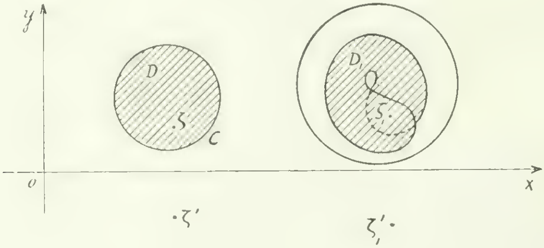
Extension nouvelle du lemme de Schwarz.

On a analysé précédemment comment se comportait dans le cercle $|z| \leq 1$ la transformation $z_1 = f(z)$ lorsque cette transformation transforme en lui-même *l'intérieur du cercle* en laissant invariant un point *intérieur*. Il peut arriver que la transformation ne laisse invariants que des points situés *sur la circonférence* du cercle $|z| = 1$. Ici encore on peut analyser l'allure de la transformation *dans le cercle*.

En supposant que ce cercle a été transformé dans le demi-plan $I(z) \geq 0$, $z_1 = f(z)$ sera une fonction analytique dans le demi-plan supérieur; nous la suppo-

serons analytique et réelle sur l'axe réel:[1] elle transformera l'axe réel en lui-même, et tout point situé au-dessus de l'axe réel en un point situé au-dessus de l'axe réel. On a vu que, si ζ est un point du demi-plan supérieur et $\zeta_1 = f(\zeta)$ son correspondant on a $\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta_1'}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$ lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence du cercle C $\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \leq \varrho < 1$ (excepté si $f(z)$ est homographique.)

Cela veut dire que, si z est intérieur à C ou sur sa circonférence, $z_1 = f(z)$ *est intérieur* au cercle C_1 défini par $\left|\frac{z_1-\zeta_1}{z_1-\zeta_1'}\right| = \varrho$.



Les cercles C et C_1 sont homothétiques par rapport à un point de l'axe réel; dans cette homothétie ζ et ζ_1 se correspondent. Le rapport des rayons de C et C_1 égale le rapport des ordonnées de ζ et ζ_1. Imaginons que ζ *tende vers un point* τ *de l'axe réel*, le cercle C conservant un rayon fini R; alors ζ_1 tendra vers τ_1 de l'axe réel[2] $(\tau_1 = f(\tau))$. Il est visible que, sur l'axe réel, $f'(z)$ est réelle et positive (non nulle); donc, ζ et ζ_1 tendant vers τ et τ_1, on conclut que le rapport $\frac{\text{ordonnée de } \zeta_1}{\text{ordonnée de } \zeta}$ tend vers une limite bien déterminée qui est égale à $f'(\tau)$. Il n'est pas difficile alors de conclure que, C tendant vers une position limite Γ qui est un cercle de rayon R tangent en τ à l'axe réel, C_1 tendra vers une position imite Γ_1 qui est un cercle de rayon $Rf'(\tau)$ tangent en τ_1 à l'axe réel. Lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence du cercle Γ, $z_1 = f(z)$ décrit un domaine Δ_1 *qui n'aura aucun point extérieur à* Γ_1, mais qui, a priori, pourrait très bien avoir des points sur Γ_1. L'hypothèse contraire, celle où Δ_1 aurait des points extérieurs à Γ_1 conduirait à une contradiction; envisageant en effet un cercle C infiniment voisin de Γ et situé au-dessus de ox, auquel correspondrait un cercle C_1 infini-

[1] Cette hypothèse n'a rien de nécessaire, mais elle simplifie l'exposition. Nous donnerons en terminant des conditions de validité moins restrictives.

[2] On peut toujours supposer τ et τ_1 à distance finie.

ment voisin de Γ_1, C_1 devrait toujours contenir z_1 lorsque z est dans C; et ceci ne serait pas vrai lorsque z_1 serait voisin d'un point de Δ_1 extérieur à Γ_1, donc extérieur à C_1. On peut cependant affirmer que, lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence de Γ, z_1 décrit un domaine qui n'a, en commun avec Γ_1 que le point τ_1 lorsque $f(z)$ n'est pas homographique. On vient de voir en effet que, lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence de Γ (qui est évidemment un cercle *quelconque* de rayon R tangent à l'axe réel en τ), z_1 décrit un domaine dont tous les points sont à l'intérieur ou sur la circonférence de Γ_1, tangent en τ_1 à ox, de rayon $R_1 = Rf'(\tau)$. Cela veut dire que la partie imaginaire de la fonction $\frac{1}{f(z)-\tau_1}$ est, à l'intérieur ou sur la circonférence de Γ, $\leq$ à une certaine limite négative qui est $-\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{Rf'(\tau)}$

$$I\left(\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right) \leq -\frac{1}{Rf'(\tau)}.$$ [1]

Or, lorsque z décrit l'intérieur de Γ, on a

$$I\left(\frac{1}{z-\tau}\right) < -\frac{1}{R},$$

le signe $<$ étant remplacé par $=$ quand z vient sur Γ. Donc, *lorsque z décrit la circonférence Γ*, on aura

$$I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1} - \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right] \leq 0.$$

La fonction $I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1} - \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$ est une fonction harmonique et régulière en tout point intérieur à Γ, et en tout point de Γ sauf peut-être en $z=\tau$. Or, en ce point, on a

$$f(z)-\tau_1 = f(z)-f(\tau) = (z-\tau)f'(\tau) + \frac{(z-\tau)^2}{2!}f''(\tau) + \cdots$$
$$= (z-\tau)f'(\tau)[1 + \lambda(z-\tau) + \cdots].$$

Donc

$$\frac{1}{f(z)-\tau_1} = \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}[1 - \lambda(z-\tau) + \cdots],$$

[1] Car évidemment le point $\frac{1}{z_1-\tau_1}$, lorsque z_1 est dans Γ_1, est dans le demi-plan $I\left(\frac{1}{z_1-\tau_1}\right) \leq -\frac{1}{R_1}$.

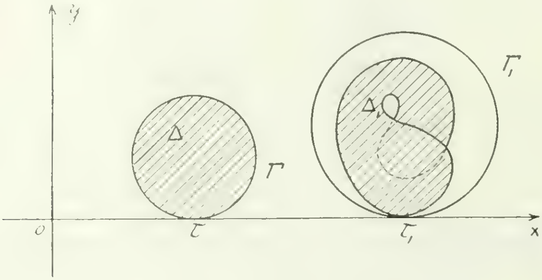
la quantité entre parenthèses étant régulière autour de $z=\tau$. Donc

$$\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}=-\frac{\lambda}{f'(\tau)}+\cdots,$$

le second membre étant régulière autour de $z=\tau$.

Donc $I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$ est harmonique et régulière autour de $z=\tau$. Cette fonction, si elle n'est pas constamment $=0$ sur Γ sera donc <0 à l'intérieur de Γ puisque, sur Γ, elle est ≤ 0. On aura donc *en tout point intérieur à* Γ

$$I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right]<I\left[\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right].$$



Cette inégalité ne peut devenir une égalité que si $I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$ est $=0$ sur tout Γ, alors la dite quantité est nulle dans tout Γ, et évidemment $f(z)$ est une fonction homographique: $\frac{1}{f(z)-\tau_1}=\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}+\varkappa$, $\varkappa$ étant une constante réelle quelconque.

Donc, hors le cas où $f(z)$ est homographique, on a, en tout point intérieur à Γ

$$I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right]<I\left[\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right].$$

Cette inégalité est valable en tout point z situé au-dessus de ox, car on peut trouver un cercle Γ tangent en τ à ox et contenant ce point z. Et elle prouve, ce qu'il fallait démontrer, que le domaine Δ_1 décrit par z_1 lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence d'un cercle Γ tangent en τ à ox, de rayon R quelconque, est intérieur au cercle Γ_1, de rayon $Rf'(\tau)$ tangent en τ_1 à ox, sans avoir avec la circonférence de Γ_1 d'autre point commun que τ_1 lui-même.

Remarque. — Tout ce que nous avons dit reste vrai si nous supposons seulement $f'(z)$ analytique *autour de* τ (et réelle aux environs de τ sur l'axe réel), sans la supposer *analytique sur tout l'axe réel,* en supposant toujours qu'à tout point z au-dessus de ox correspond un point z_1 au-dessus de l'axe réel ou sur l'axe réel.

En particulier, *si τ est un point invariant* $f(\tau)=\tau$, et si $0 < f'(\tau) \leq 1$ Γ_1 est intérieur à Γ ou confondu avec lui est Δ_1 et intérieur à Γ.

En résumé voici comment on peut, avec des hypothèses presque aussi générales que celles que l'on fait pour établir le lemme de Schwarz, énoncer l'extension de ce lemme:

Soit $f(z)$ une fonction *analytique à l'intérieur* d'un cercle C du plan des z, qu'on peut toujours supposer être le demi-plan $I(z) > 0$; supposons en outre:

1° que tout point z intérieur à C soit transformé en un point $z_1 = f(z)$ *intérieur à C ou situé sur C,* $I[f(z)] \geq 0$ en tout point $I(z) > 0$;

2° qu'un point O du cercle C reste invariant: par exemple l'origine $f(0) = 0$;

3° que $f(z)$ soit holomorphe dans une petite region[1] autour de ce point (on ne suppose rien d'autre sur C ailleurs qu'en 0).

Alors il faut nécessairement que $f'(0)$ *soit réelle et positive* pour que la condition 1° soit vérifiée autour de l'origine.

Tous les raisonnements qui précèdent sont ici valables; en tout point intérieur à C, c'est-à-dire *en tout point* $I(z) > 0$, on a $I\left[\frac{1}{f(z)}\right] < I\left[\frac{1}{zf'(0)}\right]$, *l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $f(z)$ est homographique.*

Donc, *lorsque z décrit l'intérieur et le contour d'un cercle quelconque Γ de rayon R tangent en 0 à C, z_1 décrit un domaine Δ_1 dont tous les points, y compris les points frontières, (sauf 0) sont intérieurs au cercle Γ_1 tangent en 0 à C, et de rayon* $R_1 = Rf'(0)$. *Δ_1 est tangent en 0 à C.*

En particulier, si $f'(0) \leq 1$, Δ_1 est tout entier intérieur à Γ, sauf en 0 où Δ_1 touche Γ.

---

[1] Il suffit même de supposer que $f(z)$, holomorphe dans C, admet, lorsque z tend vers 0, *dans C*, une dérivée première et une dérivée seconde finies et continues de façon qu'on puisse écrire

$$z_1 = zf'(0) + z^2 \frac{f''(0)}{2!} + z^2 \varepsilon(z),$$

$\varepsilon(z)$ étant *holomorphe dans C* et tendant vers *zéro* lorsque z tend vers 0 dans C.

AUSZUG AUS EINEM BRIEFE DES HERRN BIEBERBACH AN DEN HERAUSGEBER.

Frankfurt am Main 11. Mai 1919.

Sehr geehrter Herr Kollege!

Im zweiten und dritten Bande der »Mathematische Zeitschrift», dieses im Kriege neu gegründeten Deutschen Journals, habe ich zwei Untersuchungen veröffentlicht, bei welchen Ihre $E_a(z)$-Funktionen eine wichtige Rolle spielen. Namentlich die zweite dieser Arbeiten dürfte Ihr Interesse finden. Gibt sie doch eine Vertiefung des berühmten PICARD'schen Satzes, zu dem die Mathematiker so vieler Nationen Beiträge geliefert haben. So möchte ich mir denn erlauben, Ihnen in den folgenden Zeilen in Kürze meine Ergebnisse darzulegen und meine Methode kurz skizzieren, zumal ich nicht weiss, inwieweit die mathematische Zeitschrift im Ausland zugänglich ist.

Wie PICARD im Jahre 1879 entdeckte, besitzen ganze transcendente Funktionen in jeder Umgebung des Unendlichen höchstens einen Ausnahmewert. Sie nehmen also alle Werte mit höchstens einer Ausnahme in jeder Umgebung des Unendlichen unendlich oft an. Ich habe nun gefunden, dass eine gleiche Aussage schon für Winkelräume gilt, deren Oeffnung eine gewisse von der Ordnung der Funktion abhängige Schranke überschreitet. So nimmt z. B. die Funktion e^z in der Halbebene $\Re(z) > 0$ keinen Wert vom Betrag Eins an, während sie in jedem diese Halbebene umfassenden Winkelraum nur noch den einen Ausnahmewert Null besitzt. Dies Beispiel illustriert meinen allgemeinen Satz:

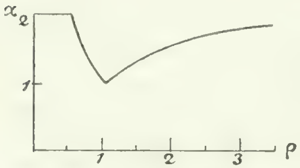
Jede ganze Funktion der Ordnung $\varrho \geqq 1$ besitzt in jedem Winkelraum, dessen Oeffnung $\pi \frac{2\varrho - 1}{\varrho}$ übersteigt, höchstens einen Ausnahmewert; ist ihre Ordnung zwischen $1/2$ und 1 gelegen $\left(\frac{1}{2} \leqq \varrho \leqq 1\right)$, so besitzt kein Winkelraum einer $\frac{1}{\varrho}\pi$ übersteigenden Oeffnung mehr als einen Ausnahmewert.

Die in diesem Satze enthaltenen Schranken für die Oeffnungen $\alpha\pi$ der Winkelräume in Abhängigkeit von ϱ habe ich in der beistehenden Figur veranschaulicht.

Hinsichtlich der Methode meiner Untersuchung möchte ich mich auf die folgenden Andeutungen beschränken. Ich stütze mich auf die scharfe Fassung, die P. LÉVY[1] einem berühmten SCHOTTKY'schen Satz gegeben hat: Der Satz handelt von dem Wachstum einer analytischen Funktion, die in $|z| < 1$ regulär ist und die Werte Null und Eins auslässt. Durch eine einfache Abbildung ziehe ich daraus den Schluss, dass

$$|f(z)| = O\left(e^{|z|^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}}\right) \text{ für jedes } \varepsilon > 0$$

ist, wenn $f(z)$ für $|\arg z| < \alpha\frac{\pi}{2}$ regulär ist und zwei Ausnahmewerte in diesem Winkelraum besitzt. Ein bekannter schon heute klassischer ausserordentlich fruchtbarer Satz von PHRAGMÉN und LINDELÖF[2] erlaubt es, hieraus den vorhin angegebenen Satz zu erschliessen.



Ich habe weiter gezeigt, dass die aus der Figur und aus dem Wortlaut des Satzes ersichtlichen Schranken für alle Ordnungen die genauen sind. Namentlich mit Hülfe Ihrer $E_\alpha(z)$-Funktionen habe ich Beispiele gebildet, bei welchen gerade die angegebenen Winkelräume zwei Ausnahmewerte besitzen. Als Beispiel für die Halbebene erwähnte ich schon vorhin $E_1(z) = e^z$. Für $\varrho > 1$ lässt

$$E_{1/\varrho}(z) - 1$$

also eine Funktion der Ordnung ϱ in $|\arg z| \leq \frac{2\varrho - 1}{2\varrho}\pi$ die beiden Werte Null und Eins aus. Für $\frac{1}{2} < \varrho \leq 1$ besitzt

$$4E_{1/\varrho}(z)$$

die gleiche Eigenschaft in

$$|\arg z| \leq \frac{1}{2\varrho}\pi.$$

[1] Bull. de la Soc. math. de France, Bd. 40.

[2] Vergl. diese Acta, Bd. 28, 31.

Man möchte wohl nun erwarten, dass für $\varrho \leqq \frac{1}{2}$ die Funktionen

$$E_{1/\varrho}(z) = \sum_0^\infty \frac{z^\nu}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\varrho}\nu\right)}$$

deren Ordnung ja dann $\frac{1}{2}$ nicht übertrifft, in der durch die negative reelle Achse begrenzten Ebene zwei Ausnahmewerte besitzen. In der Tat sieht man leicht, dass

$$E_2(z) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}\right)$$

nur auf der negativen reellen Achse Werte zwischen Null und Eins (diese Grenzen eingeschlossen) annimmt. Und weiter hat WIMAN in seiner Arbeit[1] über die Nullstellen der $E_\alpha(z)$-Funktionen mitgeteilt, dass für $\alpha > 2$ alle Nullstellen von $E_\alpha(z)$ auf der negativen reellen Achse liegen. Es wäre interessant, wenn sich wirklich zeigen liesse, dass dies und meine weitergehende Vermutung zuträfe. Ich habe die dazu nötigen mühsamen Betrachtungen nicht ausgeführt, habe vielmehr mit Hülfe der HARDY'schen P-Funktionen[2] die erwünschten Beispiele gewonnen. Setzt man für $\sigma > 2$

$$P_\sigma(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{n^\sigma}\right)$$

so ist dies eine Funktion der Ordnung $\frac{1}{\sigma}$. Man kann leicht sehen, dass man die Zahl μ so wählen kann, dass die sämtlichen Null- und Einsstellen von

$$1 + \mu P_\sigma(z)$$

auf der negativen reellen Achse liegen. Setzt man weiter

$$P_\infty(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{e^n}\right)$$

so hat man bei passend gewähltem μ in

$$1 + \mu P_\infty(z)$$

[1] Diese Acta, Bd. 29.
[2] The quarterly journal, Bd. 37.

eine Funktion nullter Ordnung, deren sämtliche Null- und Einsstellen negativ reell sind. Mit Hülfe der von Ihnen und anderen angegebenen Funktionen unendlicher Ordnung, welche auf allen Geraden der Ebene mit eventueller Ausnahme der negativen reellen Achse den Konvergenzwert Null haben, kann man weiter Beispiele von Funktionen unendlicher Ordnung bilden, die in beliebig grossen Winkelräumen zwei Ausnahmewerte besitzen. Das gilt z. B. für die LINDELÖF'sche Funktion

$$F_\beta(z) = \sum_0^\infty \left(\frac{-z}{\log (n+\beta)}\right)^n \qquad (\beta > 2),$$

deren Nullstellen sich nach LINDELÖF asymptotisch der negativen reellen Achse nähern. Man kann beliebig grosse Winkelräume angeben, in welchen die Funktion die Ausnahmewerte Null und Eins besitzt. (Vergl. LINDELÖF, Calcul des résidus S. 121.) (Vergl. auch den Schluss dieses Briefes.)

Die Familie der Funktionen, welche in einem Bereiche die Werte Null und Eins auslassen, gehört zu den von MONTEL sogenannten normalen Familien. Eine weitere neuerdings viel untersuchte normale Familie ist die, deren Glieder einen gegebenen Bereich schlicht abbilden, die also darin keinen Wert mehr als einmal annehmen. Besitzen schon alle normalen Familien viele verwandte Eigenschaften, so ist die Analogie gerade zwischen den beiden eben genannten Familien sehr gross. So habe ich denn auch in der schon eingangs erwähnten Arbeit im zweiten Bande der mathematischen Zeitschrift für die schlichte Abbildung von Winkelräumen ganz ähnliche Sätze gewonnen. An die Stelle der LÉVY'schen Formulierung des SCHOTTKY'schen Satzes tritt hier für die in $|z| < 1$ schlichte Funktion $f(z)$ die PICK'sche Verzerrungsformel

$$|f(z)| \leq |f'(0)| \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \qquad (f(0) = 0),$$

die schon PLEMELJ auf der Wiener Versammlung von 1913 ohne die Exponentenbestimmung angegeben hat. Auch PICK gibt in den Leipziger Berichten von 1915 noch keine Exponentenbestimmung. Dieselbe habe ich selbst erst in den Berliner Berichten von 1916 gegeben. Ohne Beweis gibt fast gleichzeitig GRONWALL dieselbe Verzerrungsformel in den Pariser Comptes rendus von 1916 an. Man kann aus dieser Formel schliessen, dass eine Funktion $f(z)$, die in $|\arg z| < \frac{\alpha}{2}\pi$ regulär ist und diesen Winkel schlicht abbildet für jedes $\varepsilon > 0$ der Bedingung

$$|f(z)| = O\left(|z|^{\frac{2}{\alpha}+\varepsilon}\right)$$

genügen muss. Die Verwendung des PHRAGMÉN—LINDELÖF'schen Satzes führt dann wieder zu dem folgenden Ergebnis: Eine jede ganze Funktion der Ordnung ϱ nimmt in jedem Winkelraum, dessen Oeffnung $\frac{2\varrho - 1}{\varrho}\pi$ übersteigt, einzelne Werte mehrfach an. Die Funktionen

$$z + E_{1/\varrho}(z)$$

aber bilden für $\varrho > \frac{1}{2}$ einen passend gewählten Winkel der Oeffnung $\frac{2\varrho - 1}{\varrho}\pi$ schlicht ab. Nur für Funktionen einer $\frac{1}{2}$ übertreffenden Ordnung kann es also schlicht abbildbare Winkelräume geben. Alle Funktionen, deren Ordnung $\frac{1}{2}$ nicht übertrifft, nehmen in jedem Winkelraum einzelne Werte mehrfach an.

Im Gebiete der Funktionen unendlicher Ordnung gibt es Funktionen, die beliebige Winkelräume einer an 2π nicht heranreichenden Oeffnung schlicht abbilden. Nach LINDELÖF (Calcul des résidus S. 121) gehört nämlich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl M_ε derart, dass im Winkelraum $|\arg z| < \pi - \varepsilon$

$$|F_3(z)| < M_\varepsilon$$

gilt. Daher bildet

$$z + F_3(z)$$

den Winkelraum $|\arg(z - M_\varepsilon)| < \pi - \varepsilon$ schlicht ab, und nimmt überdies, wenn man nur $M_\varepsilon > 1$ wählt, in demselben weder den Wert Null noch den Wert Eins an.

Bieberbach.

BIBLIOGRAPHIE.

American Mathematical Society.

New York 1918.

The *Cambridge Colloquium* 1916. Part. I: Functionals and their applications. Selected topics, including integral equations. By GRIFFITH CONRAD EVANS. (American Math. Society. Colloquium Lectures, V.) — XII + 136 pp. 8. 1918.

Functionals, derivatives, variational equations: Fundamental notions. Functionals of plane curves. Funct. of curves in space. Variat. equations in functionals of plane curves. Partial variat. equations. — Complex functionals: The relations of isogeneity. The theory of isogeneity for additive functionals. Isogenous non-additive functionals. Additive complex functionals of hyperspaces. — Implicit funct. equations: The method of successive approximations. The lin. functional. The lin. funct. for restricted fields. Volterra's theorem for implicit funct. equations. — Integro-differential equations of Bôcher type: The generalizat. of Laplace's equat. Green's theorem for the gen. lin. integro-diff. equat. of Bôcher type. The parabolic integro-diff. equat. of Bôcher type. The parabolic integro-diff. equat. of the usual type. The diff. equat. of hyperbolic type. — Direct generalizations of the theory of integral equations: Introd.: Some gen. properties of the Stieltjes integral. The gen. analysis of E. H. Moore. The theory of permutable functions a. combinat. of integrals.

P. Blakiston's Son & Co.

Philadelphia.

NIPHER, FRANCIS E., Experimental studies in electricity and magnetism. With 9 plates, 29 text fig. — 73 pp. 8. Dol. 1: 25. Cloth.

Experimental evidence for the one-fluid theory of electricity. Causes of local magnetic storms.

Cambridge University Press.

Cambridge 1917—1919.

ASKWITH, E. H., A course of pure geometry, containing a complete geometrical treatment of the properties of the conic sections. — XI + 284 pp. 8. 1917. 7 sh. 6 d. Cloth.

Some properties of the triangle. Some prop. of circles. The use of signs. Concurrence a. collinearity. Projection. Cross-ratios. Perspective. Harmonic section. Involution. The conic sections. Properties common to all conics. The parabola. The ellipse. The hyperbola. The rectangular hyperbola. Orthogonal projection. Cross-ratio properties of conics. Reciprocation. Circular points. Foci of conics. Inversion. Similarity of figures. Examples. Index.

Catalogue of Scientific Papers. Fourth series (1884—1900). Compiled by the *Royal Society of London.* Vol. XVI. I — Marbut. — 1054 pp. 4. 1918. £ 5/5 Cloth.

Jeans, J. H., Problems of cosmogony and stellar dynamics. Being an essay to which the Adams Prize of the University of Cambridge for the year 1917 was adjudged. — VIII + 293 pp. 8. 1919. — 21 sh. Bd.

Introduct. chapter. General dynamical principles. Ellipsoidal configurations of equilibrium. The gravitational potential of a distorted ellipsoid. Pear-shaped configurat. of equilibrium. Motion when there are no stable configurations of equilibrium. The motion of compressible a. non-homogeneous masses. The evolution of gaseous masses. The evolut. of rotating nebulae. The evolut. of star-clusters. The evolut. of binary a. multiple stars. The origin a. evolut. of the solar system. Index.

Lamb, Horace, An elementary course of infinitesimal calculus. Revised ed. — XIV + 530 pp. 1919. Bd. 20 sh.

Continuity. Derived functions. The exponential a. logarithmic functions. Applications of the derived function. Derivatives of higher orders. Integration. Definite integrals. Geometrical applications. Special curves. Curvature. Differential equations of the first order. Diff. equations of the second order. Linear equat. with constant coefficients. Differentiation a. integration of power-series. Taylor's theorem. Functions of several independent variables. Numerical tables. Index.

Whitehead, A. N., An enquiry concerning the principles of natural knowledge. — XII + 200 pp. 8. 1919. — 12/6.

The traditions of science: Traditional scientific concepts. Philosophic relativity. Perception. — Newton's laws of motion. The ether. Maxwell's equations. — Consentient sets. Kinematic relations. Motion through the ether. Formulae for relative motion. Mathemat. formulae. — Simultaneity. Congruence a. recognition. — The data of science: The diversification of nature. Events. Objects. — Apprehension of events. The constants of externality. Extension. Absolute position. The community of nature. Characters of events. — Types of objects. Sense-objects. Perceptual objects. Scientific objects. Duality of nature. — The method of extensive abstraction: The relation of extension, fundamental properties. Intersection, separation a. dissection. The junction of events. Abstractive classes. Primes a. antiprimes. Abstract. elements. — Antiprimes, durations a. moments. Parallelism a. timesystems. Levels, rects, a. puncts. Parallelism a. order. — Abs. primes a. event-particles. Routes. Solids. Volumes. — Stations.

Point-tracks a. points. Parallelism. Matrices. Null-tracks. Straight lines. — Normality. Congruence. — Analytic geometry. The principle of kinematic symmetry. Transitivity of congruence. The three types of kinematics. — The theory of objects: Location. Uniform objects. Components of objects. — Material objects. Stationary events. Motion of objects. Extensive magnitude. — Apparent a. causal components. Transition from appearance to cause. Sense-figures. Geometrical figures. Rhythms.

Coimbra Imprensa da Universidade.

Coimbra 1906—1918.

Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto. Publ. sob a direcção de F. Gomes Teixeira. Vol. IX, No. 3, 4. 1914. Vol. X, No. 1—4. 1915. Vol. XI, No. 1—4. 1916. Vol. XII, No. 1—4. 1917—18. 8.

Teixeira, F. Gomes, Obras sobre Mathematica. Publ. por ord. do Governo Portugués. Vol. 2 (1906), 3 (1906), 6 (1912), 7 (1915). — 424, 369, 541, 424 pp. 4.

2: Notes sur deux théorèmes d'Abel relatifs à l'intégration des différences finies (Acta Math., 28). Sur la décomposition d. fractions rationnelles. Varios artigos sobre diversas questões d'analyse. Integração d. equaç. ás derivadas parciaes de seg. ord. Tres artigos sobre as equaç. ás deriv. parciaes. Sobre o emprego d. eixos coordenados obliq. na mecanica analyt. Sur les nombres de Bernoulli. Sur la série de Lagrange et ses applications. Sur la théorie d. cubiques circul. et d. quartiques bicircul. Sur un probl. de Gauss et une classe particul. de fonct. symétriques. S. quelq. applications d. séries ord. suivant l. puissances du sinus. Alguns artigos sobre div. quest. de geometrica analyt. Div. art. sobre analyse math. Dois trabalhos sobre geometria analyt. plana.

3: Theoria d. numeros irrac., d. numeros negat. e d. numeros imag. Regras para o seu calculo. Principios geraes da theor. d. funcçoes. Func. algebr., logarithmicas, etc. Calculo differencial: Noç. prelemin. Derivadas de prim. ord. d. func. Applicaç. geom. d. principios preced. Derivadas e differenc. de ord. qualquer. Applic. analyt. da fórmula de Taylor. Applic. geom. da fórm. de Taylor. Func. def. por series. Singularid. d. func. Func. de variaveis imag.

6: Calculo integral: Integraes indef. Integraes def. Applic. geom. Integraes multiplos. Applic analyt. da theoria d. integraes indef. Integr. d. equac. diff. de prim. ord. Integr. de equac. diff. de ord. sup. Integr. d. equac. ás derivadas parc. Applic. geom. Integr. d. func. de variaveis imag. Integr. Eulerianos. Func. $\Gamma(\alpha)$. Func. ellipt. Applic. da theoria d. func. ellipt. Func. multiformes.

7: Sur quelques courbes algébr. S. quelq. courbes transcend. S. quelq. classes de courbes. S. quelq. questions de géométrie gén. S. quelq. courbes gauches. Sur le probl. d. moyennes proportionnelles. Duplication du cube. Division de l'angle. S. le quadrature d. cercle. Sur l'impossibilité de la résolut. par la règle et le compas d. probl. consid. précédemment.

Armand Colin.

Paris 1918.

Goblot, E., Traité de logique. Préface de Emile Boutroux. — XXIV + 412 pp. 8. 1918. Fr. 8: —

Préf. par E. Boutroux. Avertissement. Questions préliminaires. — Du jugement. Des jugements d'expérience. Des jugements de raisonnement. — Logique du concept: Jugements actuels et jugements virtuels. — Concepts négatifs; la privation. Concepts opposés, contradictoires et contraires. Concepts clairs, obscurs, distincts, confus. Extension et compréhension; le concept et l'idée. La définition. La classification. — Logique du jugement: De la modalité. De la qualité. De la quantité. De la relation. — Des raisonnements formels. Inférences hypothét. immédiates. Syllogismes hypothét. — Le raisonnement déductif. La démonstration indirecte. La démonstrat. du fait singulier. Le témoignage. Méthode de concordance variée. — L'induction. L'induct. aristotélicienne. L'induct. baconienne. Les procédés de l'induct. Les 4 méthodes expériment. Le principe de l'induction. — Le raisonnement téléologique. Les jugements de valeurs. L'esprit scientifique et le rationalisme. Index.

Gauthier-Villars & Cie.

Paris 1918—1919.

Halphen, G.-H., Oeuvres, publ. par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard avec la collaboration de E. Vessiot. T. 2. — VII + 560 pp. 8. 1918. Fr. 40: —

Discours pron. aux obsèques de G.-H. Halphen p. Charles Hermite. Sur les caractéristiques d. systèmes de coniques et de surfaces du sec. ordre. Sur la théorie d. caractéristiques pour l. coniques. S. l. lignes asymptot. d. surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes. S. l. lois de Kepler. Solution d'un probl. prop. par M. Bertrand. S. une formule récurrente concern. l. sommes d. diviseurs de nombres entiers. S. une proposit. d'algèbre. S. d. suites de fractions analogues à la suite de Farey. S. l. points singuliers d. courbes gauches algébr. S. l. singularités d. courbes gauches algébr. Théorème énoncé sans démonstration. S. l. lignes sing. d. surfaces algébr. S. l. invariants diff. S. l. sommes d. diviseurs d. nombres entiers et l. décompositions en deux carrés. S. div. formules récurrentes concern. l. diviseurs d. nombres entiers. S. la réduction de certaines équat. diff. du premier ordre à la forme lin., par rapport à la dérivée de la fonct. inconnue. S. le nombre d. coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions project. et indépend. entre elles. S. l'équat. diff. d. coniques. S. la multiplication d. fonct. elliptiques. S. l'intégration d'une équat. diff. S. deux équat. aux dérivées part. relatives à la multiplicat. d. l'argument dans l. fonctions ellipt. S. le développement d'une fonct. intermédiaire. S. cert. propriétés métriques relat. aux polygones de Poncelet. Recherches s. l. courbes planes du trois. degré. S. cert. cas singuliers du dépalcem. d'un corps solide. Observations s. la théorie d. caractéristiques. S. l. invariants diff. d. courbes gauches. S. une formule d'analyse. Probl. concern. l. courbes planes du trois. degré. S. une classe d'équat. diff. lin. S. d. fonctions qui proviennent

de l'équat. de Gauss. S. un systéme d'équat. diff. S. cert. systèmes d'équat. diff. S. un critérium relat. à la théorie d. sections con. S. cert. séries pour le développement d. fonctions à une seule variable. S. une série d'Abel. S. une série pour développer l. fonctions d'une var. S. la série de Fourier. S. l. courbes planes du six. degré à neuf points doubles.

Oppermann, A., Premiers éléments d'une théorie du quadrilatère complet. — 76 pp. 8. 1919.

Petrovitch, Michel, Les spectres numériques. Préface de M. Emile Borel. — VII+110 pp. 8. 1919.

Introduct. Spectres numériques et leurs éléments. La génératrice spectrale. La caractéristique spectrale principale. La caractérist. spectrale qualitative. La correspondance entre une suite d'entiers et les éléments de ses spectres. Le spectre en tant que nombre décimal. — Transformations $\triangle$ [f] et fonctions (E). Transform. $\triangle$ [f] se rattachant aux catégories déterminées de fonct. Quelques modes gén. de corresp. entre l. fonctions d'une variable et l. suites de nombres entiers. Digression sur l. séries (E). Diverses formes d. relations entre f (z) et sa transformée (E). — Spectres d'une fonction. Fonct. correspondant à un spectre donné. — Principe de la méthode spectrale. Quelques applicat. arithmétiques. Procédé spectral de développement en séries. Procédé spectral d'évaluation d. intégrales définies. Détermination spectrale d. fonctions.

Jul. Gjellerups Forlag.

København 1919.

Hjelmslev, J., Geometriske Eksperimenter. And. Udg. — 94 pp. 8. 1919.

Konstruktion og eksperiment. Skæring mellem Cirkel og Keglesnit. Vinklens Tredeling. Kubikrodsuddragn. Almind. Opgaver af 3. og 4. Grad. Spec. Opgaver af 3. og 4. Grad. Den trebenede Passer. Skridtforsøg. Indskydning. Flytningsforsøg. Reduktionsvinkler. Eksperimentel Fremstilling af Keglesnit. Den almind. Ligning af n'te Grad. Algebraisk Konstruktion. Opgaver i Rummet. Rumforsøg. Transcendente Opgaver. Cirkelafviklerens Teori. Cirkelafviklerens Anvend. Andre transcend. Opgaver.

Hjelmslev, J., Elementær Geometri. 2den Bog. — 111 pp. 8. 1919.

Parallelforskydning i Rummet. Polyedre. Krumme Flader. Ligedannethed. Modsatte Figurer. Rumfangsberegninger. Inledning i Projektionslæren. Sfærisk Geometri. Keglesnit. Koordinater. — Opgaver.

Hjelmslev, J., Stereometriske Konstruktioner. 2. Oplag. — 8 pp. 8. 1919.

Gleerupska Universitetsbokhandeln.

Lund 1919.

Ising, Gustaf, Undersökningar rörande elektrometrar. II. Avec un résumé français. (Doktorsafhandling.) — 374 pp. 8. 1919. Kr. 6.

Torsionselektrometern n:r 1. Öfriga elektrometrar. Afläsningsskärpan vid mätinstrument. Résumé.

Government Printing Office.

Washington 1917.

Jones, E. Lester, Use of mean sea level as the datum for elevations. (Department of Commerce, U. S. Coast and geodetic survey, E. Lester Jones, Superintendent. Special Publication, N. 41.) 21 pp. 8. 1917. 5 cents.

Sold only by the Superintendent of Documents, Government Print. Office Washington D. C.

Harvard University Press.

Cambridge, Mass., U. S. A. 1917.

Byerly, William Elwood, Introduction to the Calculus of variations. (Mathematical Tracts for physicists.) — 48 pp. 8. 1917. 75 cents. Cloth.

Introduction. Variations. Notation a. nomenclature. Illustrat. problems. Problems involving sev. depend. variables. Multiple integrals. Variat. of the limits. Princ. of least action.

Huntington, Edward V., The continuum and other types of serial order. With an introduction to Cantor's transfinite numbers. Sec. ed. — VII+82 pp. 8. 1917. Dol. 1.00. Cloth.

Introduction. On classes in general. On simply ordered classes, or series. Discrete series: especially the type ω of the natural numbers. Dense series: espec. the type η of the ration. numbers. Continuous series: espec. the type Θ of the real numbers. Contin. series of more than one dimension, with a note on multiply ordered classes. Well-ord. series, with an introduct. to Cantor's transfinite numbers. Index.

A. Hermann & Fils.

Paris 1919.

Boutroux, Pierre, Les principes de l'Analyse mathématique. Exposé historique et critique. T. 2: La géométrie algébrique. Extensions de l'algèbre et constructions logiques. Extension de l'algèbre: les développements en séries. La méthode analytique en mathématiques. Analyse infinitésimale. Analyse des principes mathématiques. Analyse de la notion de fonction. — 512 pp. 8. 1919. Fr. 20: —

Construction: Etude algébr. d. fig. Résolution d. triangles. La méthode d. coor-

données. La »géométrie» de Descartes. La »géométrie analytique» du plan. Les sections coniques. Etude alg. d. courbes planes. La »géométrie analyt.» de l'espace. Etude d. surfaces et d. courbes gauches. L'algèbre d. vecteurs. La »géométrie synthétique». Les transformations. — Progrès de la synthèse algébr. Déterminants. Nombres imag. Fonctions de variables complexes. La géométrie irréelle. Substitutions et groupes. La construct. logique d. mathématiques: la définition du nombre, la géométrie. La géométrie non-euclidienne. La logique algébr. — Premiers développements en séries. Propriétés fondament. d. séries à termes positifs. Critères de convergence. Séries à termes quelconques. La série de Taylor. Séries de puissances de plusieurs variables. — *Analyse.* La méthode analyt. en mathématiques. Les infiniment petits. Limites. Formes indéterminées. L'intégration. Différentielles. Equations différentielles. Différentielles totales. Intégrales definies. Intégrales curvilignes. Intégrales doubles et triples. Evaluat. d. longueurs, d. aires et d. volumes. Géométrie diff. Mécanique diff. — La notion de continuité. Les ensembles. Analyse de la discontinuité. Analyse d. principes de la géométrie. — La correspondance fonction. Prem. principes de la théorie d. fonct. Fonct. analytiques. Singularités d. fonct. analyt. Classification et étude gén. d. fonct. Fonctions périod. Intégrales d. équations diff. Appendice. Index. Errata.

S. Hirzel.

Leipzig 1919.

Runge, C., Vektoranalysis. Bd 1: Die Vektoranalysis des dreidimensionalen Raumes. — VIII + 195 pp. 8. 1919. Geh. M. 11; geb. M. 13;

Vektoren u. Plangrössen: Begriff d. Vektors. Addition v. Vektoren. Vektorgleich Beispiele d. Addit. v. Vektoren. Vervielfält. eines Vektors. Numerische Ableit. eines Vektors aus anderen. Das äussere Prod. zweier Vektoren u. d. Begriff d. Plangrösse. Addit. v. Plangrössen. Die Ergänz. einer Plangrösse. Num. Ableit. einer Plangr. aus anderen. Das äussere Prod. v. drei Vektoren. Zusammenhang mit d. Determinantentheorie. Das skalare Prod. zweier Vekt. Das vektorielle Prod. zwei. Vekt. Das äussere Prod. zwei. Plangrössen. Beispiele, Anwend. u. Übungsaufg. — *Differenziation u. Integration:* Differenziationsregeln. Krümmung u. Torsion einer Raumkurve. Krüm. u. Torsion anders betrachtet. Integrationsregeln. Anwend. auf die Beweg. eines Massenpunktes um ein festes Zentrum. Flächenintegrale u. Raumintegrale. Vektorfelder u. Plangrössenfelder. Die Umwandl. v. Flächenintegralen in Raumintegrale. Anwend. d. Umwandlungstheoreme. Die Umwandl. v. Randintegralen in Flächenintegrale. Einführung Krummliniger Koordinaten. Regeln f. d. Operator ∇. Anwend. auf d. Gravitationspotential. Der Greensche Satz. Der Zusammenhang zwischen ein. Vektorfelde u. seinem Wirbel. Scalares Potential, Vektorpotential u. Plangrössenpotential. — *Tensoren:* Die affine Transformation des Raumes. Konjugierte Tensoren. Die in sich transformierten Vektoren. Drehungstensoren. Zu sich selbst konjugierte od. symmetrische Tensoren. Zusammensetzung v. Tensoren. Zerlegung in Drehungstensor u. zu sich selbst konjugierten Tensor. Die Masszahlen u. Einheiten eines Tensors.

Tensoren aus weniger als drei Gliedern. Symmetrische u. antisymmetr. Tensoren. Reziproke Tensoren. Der Tensorbegriff. Umklappungen u. Drehungen. Tensorfelder. Tensorintegrale. Kogredienz u. Kontragredienz.

Macmilllan & Co. Ltd.

London W. C. 2 1918—1919.

Forsyth, A. R., Solutions of the examples in A Treatise on differential equations. — 249. pp. 8. 1918. 10 Sh. Cloth.

Goyen, P., Elementary mensuration, Constructive plane geometry and Numerical trigonometry. — 169 pp. 8. 1919, 3 sh. 6 d. Cloth.

Chapt. 1. Lines, surfaces, angles, drawing to scale, parallels. 2. Construct. a. area of rectangles. Carpeting floors a. papering walls. Rectangular prisms, their surface a. volume. 3. Bisect. of lines a. angles. Division of lines into equal parts. a. into parts in given proport. Circumscribing a circle ab. a triangle a. inscrib. a circle in a triangle. Construct. a. properties of parallelograms... Area of parallelograms a. right-angled triangles. 4. An import. property of the right-angl. triangle. Construct. of triangles... of a square... 5. Construct., properties, a. area of the rhombus... of a parallogram..., of a trapezium..., of a quadriliteral... 6. Polygons, irregulary bounded figures... 7. The circle... right circular cylindres... the ellipse, solid circular rings. 8. Pyramids..., cones, the wedge a. prismoid, irreg. solids, the sphere. 9. Proportionals. Similar figures..., solids..., segments... 10. Numerical trigonometry... Exercices. tables.

John Murray.

London 1919.

Report of the *British Association for the Advancement of Science. 1918.* — XX + 172 + 2. pp. 8. 1919.

Norstedt & Söner.

Stockholm 1918.

Kgl. Tekniska Högskolan, Stockholm. Historik och beskrivning rörande nybyggnaderna jämte avhandlingar och uppsatser av Högskolans lärare. (Skrifter utgivna med anledning av inflyttningen i de år 1917 färdiga nybyggnaderna.) — VIII+520 pp. 4. 1918.

Historik över tillkomsten av de under åren 1913—17 uppförda nybyggnaderna, av C. J. Magnell. Beskrivning över nybyggnaderna, av E. Lallerstedt. Vattenbyggnadslaboratoriet, av W. Fellenius. Förbränningsmotorlaboratoriet, av E. Hubendick. Kyltekniska laboratoriet, av E. Hubendick. Uppvärmnings- o. ventilationssystemet, av H. Theorell. Teknisk vetenskap o. ingenjörsutbildning, av C. J. Magnell. — Barthel, Chr., Kulturer av jäsningsorganismer i sterilis. jord. Berger, Fritz W., Bestämn. av normalspänningar för lut. måttband. Davidsson, W., Trafikfördeln. vid tvillinghissar.

Henriques, P., Den första svenska läroboken i perspektiv. Heuman, Carl, Elliptiska integraler i dynam. probl. — Bidrag t. teorien f. sfäriska pendeln. Holmberg, B., Alkal. sönderdeln. av halogensuccinamidsyror. Kreüger, H., Undersökn. rör. hållfasthet o. elasticitet hos koppartråd o. kopparlinor. Langlet, F., Om korrelat. syst., med tillämpn. på andragradsytor. Lindmark, T., Några synpktr vid beräkn. av avtappningsturbiner. Lundholm, O. E, Flygsäkerheten o. »lufthålen». Malmquist, J., Om singulära ställen t. diff. ekvationer av första ordn. Nordström, H. F., Randvärdesproblemet vid parabeln o. hyperbeln inom potentialteorien. Pleijel, H., Allm. egenskaper hos ett syst. parallela ledningar m. variabla konst. — En metod att beräkna egensk. hos sammansatta telegrafledn. Rosborg, A., Några riktlinjer f. anordn. av ekonom. ångpanneeldstäder. Schlyter, R. R:son, Undersökn. å dammbyggn. Sellergren, G., Torvfibern som spånadsämne. Sondén, K., Några tekn. uppgifter m. hygeniskt syfte, ett kapit. av »tillämpad hygien».

D. van Nostrand Company.

New York 1911—1917.

Baker, Arthur Latham, Quarternions as the result of algebraic operations. — IX + 92 pp. 8. 1911. Dol. 1: 25. Cloth.

Pref. Mathemat. operations upon discrete magnitudes. Idiographs. Space idiographs. Multiplicat. of unit vectors. Quaternions. Kinds of quatern. Quatern. operators. Products of quartern. Versors. Interpretation of vector equat. of the first degree. Applications. Appendix. Functional symbols.

Licks, H. E., Recreations in mathematics. With 60 illustr. — V + 155 pp. 8. 1917. Dol. 1: 25. Cloth.

Arithemetic. Algebra. Geometry. Trigonometry. Analyt. geometry. Calculus. Astronomy a. the calendar. Mechanics a. physics. Appendix.

The Open Court Publishing Company.

Chicago & London 1913—1916.

Barrow, Isaac, The geometrical lectures of Isaac Barrow, translated, with notes and proofs, and a discussion on the advance made therein on the work of his predecessors in the infinitesimal calculus, by J. M Child. (The Open Court Series of classics of science and philosophy, No. 3.) — XIV + 218 pp. 8. 1916. Dol. 1: 00. Cloth.

The work of Barrow's great predecessors. Life of Barrow, a. his connection with Newton. The works of Barrow. Estimate of Barrow's genius. The sources of Barrow's ideas. Mutual influence of Newton a. Barrow. Descript. of the book from which the translat. has been made. The prefaces. How B. made his construct. Analyt. equivalents of B's chief theorems. Translation of Lecture I—XIII. Extr. from stand. authorities. Solut. of a test question by B's method. Graph. integration by B's method. Reduced facsim. of B's pages a. fig. Index.

Boole, George, Collected logical works. Vol. 2: The laws of thought. (1854). — 448 pp. 8. Dol. 3: 50. 1916. Cloth.

An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, by George Boole. London 1854. — Preface. Nature and design of this work. Signs a. their laws. Derivations of the laws. Division of propositions. Principles of symbol. reasoning. Of interpretation. Of elimination. Of reduct. Methods of abbreviat. Conditions of a perfect method. Of secondary proposit. Methods in second. propositions. Clarke a. Spinoza. Example of analysis. Of the the aristotelian logic. Of the theory of probab. Gen. method in probab. Element. illustrat. Of statistical conditions. Probl. on causes. Probability of judgements. Constitution of the intellect.

Cantor, Georg, Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers. Translated, and provided with an introduction and notes, by Philip E. B. Jourdain. (The Open Court Series of Classics of Science and Philosophy, No. 1.) — 211 pp. 8. 1915. Dol. 1: 25. Cloth.

Preface. Table of contents. Introduction. Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers. Article I (1895). Art. II (1897). Notes. Index.

Carus, Paul, The principle of relativity in the light of the philosphy of science. With an appendix containing a letter from the Rev. James Bradley on the motion of the fixed stars, 1727. — 105 pp. 8. 1913. Dol. 1: 00 Cloth.

Introductory. On the absolute. Tricks of cognition. Comstock on relativity. The A Priori. On absolute motion. Absolute space. Ernst Mach. Objectivity. Primary concepts. Some physical problems of relativity. The principle of relativ. as a phase in the development of science. Conelusion. Append.

Morgan, Augustus de, Essays on the life and work of Newton. Edited with notes a. appendices by Philip E. B. Jourdain. — 198 pp. 8. Dol. 1: 25. 1914. Cloth.

Editor's preface. Newton (1846). A short account of some recent discoveries in England and Germany relat. to the controversy on the invention of fluxions (1852). Appendix on the manuscripts a. publicat. of Newton and Leibniz. Review of Brewster's »Memoirs of the life, writings, and discoveries of Sir Isaac Newton (1855)«. — De Morgan's view of Leibniz's character. Note by De Morgan on the character of Newton and on the actions of the Royal Society, written in 1858.

Richardson, Robert P., & Landis, Edward H., Numbers, variables and Mr. Russell's philosophy. — 59 pp. 8. 1915. — Reprinted from »The Monist« of july 1915.

Smith, David Eugene, & Mikami, Yoshio. A history of japanese mathematics. — V + 288 pp. 8. 1914. Dol. 3. Cloth.

Pref. The earliest period. The second period. The development of the soroban.

The sangi applied to algebra. The third period. Seki Kōwa. Seki's contemporaries a. possible western influences. The Yenri or circle principle. The eighteenth century. Ajima Chokuyen. The opening of the ninteenth century. Wada Nei. The close of the old Wasan. The introduct. of occidental mathematics. Index.

Rice Institute.

Houston, Texas.

Rice Institute, The book of the opening of the Rice Institute. Being an account in three volumes of an Academic Festival, held in celebration of the formal opening of the Rice Institute, a university of liberal and technical learning, founded in the City of Houston, Texas, by William Marsh Rice and dedicated by him to the advancement of letters, science, and art. Oct. 10—11, 1912. Vol. 1—3. — XII+VI+VI+1,100 pp. 4.

1. Inscription. List of delegates. Program. Addresses of welcome and responses at a luncheon given at the City Auditorium by the municipal government of the City of Houston. Programs of the concerts... Toasts and responses at the supper given by the trustees at the Residential Hall in honor of the inaugural lecturers. Formal exercices of dedication. Luncheon at the Institute Commons. Congratulatory greetings a. addresses. Religious services in the City Auditorium. Portraits of the Founder. Architectural plan. The invitation to the festival. Facsimiles of some of the letters received: The University of Paris, of Oxford, of Cambridge, of Rome, of Aberdeen, the Pontifical Gregorian University, University of Oviedo, Harvard University, University of Lemberg, The Royal Society of London, The R. Pruss. Academy of Sciences etc. etc.

2. The inaugurals lectures: The problem of the philosophy of history. The theory of civilization. The methods of extending civilization among the nations. Three inaug. lectures by Prof. R. Altamira y Crevea. — Molecular theories and mathematics. Aggregates of zero measure. Monogenic uniform nonanalytic functions: The theories of Cauchy, Weierstrass, and Riemann. Three inaug. lectures by Prof. Emile Borel. — The breviary of aesthetic, a monograph by Senator B. Croce. — Mutations in heredity. Geographical botany. Modern cytological problems. The ideals of an experiment garden. Four inaug. lectures by Prof. Hugo de Vries. — Philosophical landmarks, being a survey of the recent gains and the present problems of reflective thought. Three inaug. lectures by Sir Henry Jones. Photogravures of the above lecturers.

3. The introduction of western learning into Japan. An inaug. discourse by Privy Councilor Baron D. Kikuchi. — The study of poetry. An inaug. discourse by Prof. J. W. Mackail. — The system of the sciences. Principles of the theory of education. Two inaug. lectures by Prof. W. Ostwald. — Henri Poincaré. An inaug. memoir by Senator V. Volterra. — The electron as an element. Compounds of electrons. The disruption of the so-called elements. Three inaug. lectures by Sir W. Ramsay. — The corpuscular theory of aurora borealis. An inaug. lect. by Carl Störmer. — The gene-

ralization of analytic functions. On the theory of waves and Green's method. Three inaug. lectures by Senator V. Volterra. — Portraitures of the above lecturers and of Henri Poincaré.

B. G. Teubner.

Leipzig & Berlin 1911—1919.

Bloch, Werner, Einführung in die Relativitätstheorie. Mit 16 Fig. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd. 618.) — 100 pp. 8. 1918. M. 1:90 geb.

Einleit. Ueberleg. Die Bewegung u. das Koordinatensystem. Der Bewegungszustand d. Äthers. Aberration u. Dopplerprinzip. Die beid. Grundversuche. Die Relativitätstheorie. Ableit. d. Transformationsgleichungen. Physik. Bedeutung. d. Transformationsgl. u. d. ersten Folgerungen. Das Additionstheorem d. Geschwindigkeiten. Einige weit. wichtige Folgerungen aus d. Relativitätstheorie. Bedeut. d. Relativitätstheorie f. d. Physik u. Philosophie. Hist. Entwicklung d. Relativitätstheorie u. Ausblick auf d. allgem. Relativitätstheorie.

Bonola, Roberto, Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Autor. deutsche Ausgabe bes. von Heinrich Liebmann. 2 Aufl. (Wissenschaft und Hypothese. IV.) — 207 pp. 8. 1919. geh. M. 6:40, geb. M. 7:60.

Die Beweise d. V. euklidischen Postulats. Die Vorläufer d. nichteuklidischen Geometrie. Die klassische Zeit. d. nichteuklid. Geometrie. Nichteuklid.-hyperbolische Elementargeometrie. Neuere Wege u. Ziele. Einige Hauptformeln d. nichteuklid. (hyperbol.) Geometrie. Ueber einige Anwendungen d. absoluten (nichteuklid.) Geometrie auf die Lehre von d. Funktionen einer komplex. Veränderlichen. Namenreg.

Czuber, Emanuel, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Bd 2. Vierte, sorgfält. durchges. Aufl. Mit 119 Fig. XI+599 pp. 8. 1919. M. 20: — geb.

T. 2. Integralrechnung. Das bestimmte u. das unbest. Integral. Grundformeln u. Methoden d. Integralrechn. — Integration rationaler Funktionen. Integrat. irrationaler Funkt. Integrat. transzendenter Funkt. — Wertbestimmung u. Schätzung bestimmter Integrale. Erweiterung d. Integralbegriffs. Integration unendlicher Reihen. Differentiation durch Integrale definierter Funkt. Integrat. durch Integrale definierter Funkt. Das Doppelintegr. Drei- u. mehrfache Integrale. Kurvenintegrale. Integrale v. Funktionen einer komplex. Variablen. Analytische Anwendungen. — Quadratur ebener Kurven. Rektifikat. v. Kurven. Kubatur krummflächig begrenzter Körper. Komplanation krummer Flächen. Massen-, Moment- u. Schwerpunktbestimm. Die Sätze von Green. Das Potential. — Definition u. Haupteinteil. d. Differentialgleichungen. Differentialgleich. erster Ordnung. Allgemeines. Integrationsmethoden für Differentialgl. erst. Ordn. Singuläre Lösungen gewöhnl. Differentialgl. erst. Ordn. Geometrische Anwend. Systeme v. Differentialgl. Differentialgl. höherer Ordnung. Lineare Differentialgl.

Integration durch Reihen. Graphische Integration. Elemente d. Variationsrechn. Partielle Differentialgl. erst. Ordn. Part. Differentialgl. zweit. Ordn. Reg.

Dieck, W., Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene. Mit 12 Fig. (Math.-Physikal. Bibliothek, hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting. 31.) — 51 pp. 8. 1918. M. 1: —

Punkt u. Gerade i. d. Kugelebene. Die Beziehungen zwischen Punkt u. Gerade. Kongruenz u. Messung v. Strecken. Das Kugellineal. Der Winkelbegriff. Kongr. u. Mess. v. Winkeln. Ergänz.-, Neben- u. Gegenwinkel i. d. K-Ebene. Das Dreieck. Der Fundamentalsatz d. K-Geometrie. Das Parallelenaxiom. Merkw. Dreiecksreihen i. d. K-Ebene. Die Lehre v. K-Kreise. Flächenvergl. i. d. E- u. i. d. K-Ebene. Die Ähnlichkeit als Sondergut der E-Geometrie.

Hohenner, H., Der Hohennersche Präzisionsdistanzmesser und seine Verbindung mit einem Theodolit. Einrichtung u. Gebrauch d. Instrumentes für die verschiedenen Zwecke der Tachymetrie. Mit Zahlenbeispielen sowie Genauigkeitsversuchen. Mit 7 Abb. u. 1 Tafel. (Abhandlungen u. Vorträge a. d. Gebiete der Mathematik, Naturwiss. u. Technik. 4.) — 64 pp. 8. 1919. M. 3: 20 geh.

Kowalewski, G., Einführung in die Infinitesimalrechnung. 3:e verb. Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt, 197) — 100 pp. 8. 1919. M. 1: 60 kart.

Häufungswerte u. Grenzwerte. Differentialrechnung. Integralrechn. Historische Übersicht.

Meissner, Otto, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1—2. 2. Aufl. (Math.-physikal. Bibliothek, hrsg v. W. Lietzmann & A. Witting. 4 & 33.) — 1: 56 pp. 8. 1919. M. 1: —; 2: 52 pp. 8. 1919. M. 1: —.

1: *Grundlehren.* Einleit. Grundlehren d. Wahrscheinlichkeitsrechn. Verwickeltere Fälle u. Gesetzmässigkeiten. Die Anwendungsgebiete d. Wahrscheinlichkeitsrechn. Mathemat. Anhang. Antworten zu d. Fragen im Texte. Kurze geschichtl. Bemerk. üb. die im Texte erwähnten Mathematiker.

2: *Anwendungen.* Vorbemerk. Ausgleichungsrechn. Statistik. Kollektivmasslehre. Anw. d. Wahrscheinlichkeitsrechn. auf physikal. u. kosmolog. Fragen. Schlussw. Antw. zu d. Fragen im Texte.

Müller, Emil, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Technische Hochschulen. Bd. 2. H. 1. 2 Aufl. Mit 140 Fig. — VII + 129 pp. 8. 1919. M. 5: 40 geh.

Kotierte Projektion u. Dachausmittlung: Darstellung v. Punkten, Geraden u. Ebenen u. Lösung d. sie betreffenden Grundaufgaben. Die Geländefläche u. d. Lösung der sie betreff. Aufgaben. Dachausmitttlung. — Normale Achsonometrie: Zeichnen normalachsonometr. Bilder. Hauptsätze üb. Normalrisse rechtwinkl. Achsenkreuze. Lösung d. Grundaufgaben in normaler Achsonometrie u. Darstellung krummflächiger Körper.

Perry, John, Höhere Mathematik für Ingenieure. Autor. deutsche Bearb. von Robert Fricke und Fritz Süchting. 3. Aufl. — 450 pp. 8. 1919. geh. M. 20: —, geb. M. 22:

Einleit. Kap. I. x^n. Kap. II. e^x und sin x. — Schwierigere Aufgaben u. Lehrsätze.

I: Graphische Darstellungen u. Koordinaten. Begriff d. Funktion. Uebungen in Kurvenzeichnen. Gedämpfte Schwingungen. Analyt. Untersuchungen einfacher Mechanismen. Die Gerade als Darstellung einer Gleichung. Aufg. üb. die gerade Linie. Von d. Aufstellung empirischer Formeln. Berechnung d. Steigung einer Geraden. Begriff d. Differentialquotienten. Mittlere Geschwindigkeit, insb. bei freiem Fall. Grenzwert d. mittleren Geschwindigkeit. Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges. Begriff u. Bezeichn. d. Beschleunigung. Best. d. Beschleunigung durch Rechnung. Differentiation d. Funkt. $y = ax^2$. Zweimal. Different. u. Differentialquotient von ax^2. Gleichförm. beschleunigte Bewegung etc. etc,

II: Das Zinseszinsgesetz. Differentiationsregel d. Exponentialfunkt. Aufgaben zur Differentiation u. Integration von e^{ax}. Techn. u. andere Beispiele zur Exponentialfunkt. Barometrische Höhenmessungen. Harmon. Funkt. Differentiation u. Integration von sin x. Differentiation von cos x. Induzierte elektrische Spannung in einer im magnet. Felde rotierenden Metallschleife. Oberschwingungen in einer Wechselspannung. Drehende Schwingungen unter d. Einflusse einer Richtkraft. Aufgaben. Kreuzkopfbewegung einer Kolbenmaschine als Beispiel einer harmon. Funkt. etc. etc.

III. Differentiation einer Funkt. f(x), eines Produktes a.f(x) u. einer Summe. Differentialquotient eines Produktes von zwei Funktionen. Diff. quot. eines Quotienten von zwei Funkt. Differentiation zusammengesetzter Funktionen. Berechn. d. sekundlichen Wärmezufuhr aus d. Indikatordiagramm einer Gasmaschine. etc. etc.

Schudeisky, Albrecht, Geometrisches Zeichnen. Mit 172 Abb. (Aus Natur und Geisteswelt. Bd 568.) — 99 pp. 8. 1919. — kart. M. 1: 75, geb. M. 2: 15.

Vorbemerkungen. — Zirkelzeichnen: Grundlegende geometr. Zeichenaufgaben. Begrenzte u. unbegr. geradlinige Verzierungen. Zeichenaufgaben üb. d. Kreis. Kreisteilungen u. deren Anwend. beim Zeichnen regelmäss. Vielecke u. Zierformen. Begrentzte u. unbegr. krumm- u. gemischtlinige Verzierungen. Wichtige Bogenlinien, welche sich aus Kreisbogen zusammensetzen. Kegelschnittlinien. Rad- u. Spirallinien. — Masstabzeichnen: Einleit. Zeichn. von Masstäben. Verkleinern von Flächen m. Hilfe von verjüngten Masstäb. an Hand freihändiger Skizzen. Vergrössern bzw. Verkleinern v. Flächen mittels eines Quadratnetzes u. nach d. Drehpunktsmethode.

Stolz, Otto, & Gmeiner, J. A., Theoretische Arithmetik. 1. Abt.: Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen. 2. Aufl. Umgearb. von Anton Gmeiner. (Dritte Aufl. d. Abschnitte I—IV des 1. Teiles d. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz.) (B. G. Teubners Samml. von Lehrbüchern... Bd 4, 1.) — VI + 148 pp. 1911. M. 5: 20 geb.

Einleit. Begriff d. Grösse u. Zahl. Die natürlichen Zahlen. Analytische Theorie. d. rationalen Zahlen: Theorie d. Rechengesetze. Die rationalen Zahlen. — Synthetische Theorie d. ration. Zahlen. Die systematischen Brüche. Uebungen. Sachenverzeichn.

U. S. Naval Observatory.

Washington, D. C. 1917.

Astronomical Papers, prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Publ. by the Naut. Almanac Office, U. S. Naval Observatory... Vol. IX, Part II: New elements of Mars and Tables for correcting the heliocentric positions derived from Astronomical Papers, vol. VI, Part. IV, by Frank E. Ross. — 25 pp. 4. 1917.

University of California Press.

Berkeley 1918.

Lewis, C. I., A survey of symbolic logic. (Semicentennial Publications of the University of California.) — VI + 406 pp. gr. 8. 1918.

Preface. The development of symbolic logic: The scope of symbolic logic. Symbol. logic and logistic. Summary account of their development. Leibniz. From Leibniz to De Morgan and Boole. De Morgan. Boole. Jevons. Peirce. Developments since Peirce. — The classic, or Boole-Schröder algebra of logic: General character of the algebra. The postulates a. their interpretation. Element. theorems. Gen. properties of functions. Fundament. laws of the theory of equations. Fundament. laws of the theory of inequations. Note on the inverse operations, »subtraction« a. »division«. — Applications of the Boole-Schröder algebra: Diagrams for the logical relations of classes. The applicat. to classes. The applicat. to propositions. The applicat. to relations. — Systems based on material implication: The two-valued algebra. The calculus of proposit. functions. Funct. of one variable. Proposit. functions of two or more variables. Derivation of the logic of classes from the calculus of proposit. functions. The logic of relations. The logic of »Principia Mathematica«. — The system of strict implication: Primitive ideas, primit. propositions, a. immediate consequences. Strict relations a. material relat. The transformation $\{-/\sim\}$. Extens. of strict. implicat. The calculus of consistencies a. the calculus of ordin. inference. The meaning of »implies«. — Symbolic logic, logistic, a. mathematical method: Gen. character of the logist. method. The »orthodox« view. Two varieties of logist. method: Peano's *Formulaire* a. *Principia Mathematica*. The nature of logistic proof. A »heterodox« view of the nature of mathematics a. of logistic. The logist. method of Kempe a. Royce. Summary a. conclusion. — App. Two fragments from Leibniz. Bibl. Index.

The University of Chicago Press.

Chicago, Ill. 1917.

Blichfeldt, H. F., Finite collineation groups, with an introduction to the theory of groups of operators and substitution groups. (The University of Chicago Science Series.) — 194 pp. 8. 1917. Dol. 1:50. Cloth.

Elementary properties of linear groups. Groups of operators a. substitution groups. The linear groups in two variables. Advanced theory of lin. groups. The lin. groups in three variables. The theory of group characteristics. The lin. groups in four variables. On the history a. applications of lin. groups. Appendix.

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT | JOURNAL

HERAUSGEGEBEN | RÉDIGÉ

VON | PAR

G. MITTAG-LEFFLER

43

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.
1922

PARIS
J. HERMANN
6 RUE DE LA SORBONNE.

UPPSALA 1922
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

INHALTSVERZEICHNIS — TABLE DES MATIERES.

BAND 43. — 1922. — TOME 43.

SURFACE TRANSFORMATIONS AND THEIR DYNAMICAL APPLICATIONS.

By

GEORGE D. BIRKHOFF
of CAMBRIDGE, MASS., U. S. A.

A state of motion in a dynamical system with two degrees of freedom depends on two space and two velocity coördinates, and thus may be represented by means of a point in space of four dimensions. When only those motions are considered which correspond to a given value of the energy constant, the points lie in a certain three-dimensional manifold. The motions are given as curves in this manifold. One such curve passes through each point.

Imagine these curves to be cut by a surface lying in the manifold. As the time increases, a moving point of the manifold describes a half-curve and meets the surface in successive points, $P, P', \ldots$. In this manner a particular transformation of the surface into itself — namely that which takes any point P into the unique corresponding point P' — is set up.

This fundamental reduction of the dynamical problem to a transformation problem was first effected by POINCARÉ and later, more generally, by myself.[1] In order to take further advantage of it I consider such transformations at length in the following paper, which appears here by the kind invitation of Professors MITTAG-LEFFLER and NÖRLUND. The dynamical applications are made briefly in conclusion. These bear on the difficult questions of integrability, stability, and the classification and interrelation of the various types of motions.

Chapter I. Formal Theory of Invariant Points.

§ 1. Hypotheses.

For the present we shall confine attention to the consideration of a one-to-one, direct, analytic transformation T in the vicinity of an invariant point of

[1] *Dynamical systems with two degrees of freedom. Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 18, 1917.

the surface S undergoing transformation. Hence, if u, v be properly taken coördinates with the invariant point at $u = v = 0$, the transformation may be written

(1) $$u_1 = au + bv + \cdots, \qquad v_1 = cu + dv + \cdots,$$

where the right-hand members are real power series in u, v (i. e. with real coefficients), where u_1, v_1 are the coördinates of the transformed point, and where

(2) $$ad - bc \neq 0.$$

More generally, the notation (u_k, v_k) or P_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ will stand for the point obtained by applying the kth iterate (power) of T to (u, v) or P.

Furthermore it will be assumed that there exists a real analytic function $Q(u, v)$, not zero for $u = v = 0$, such that the double integral

$$\int\int Q(u, v)\, du\, dv$$

has the same value when extended over any region as over its image under T. Following a dynamical analogy such a transformation will be called *conservative*. Also Q will be termed a *quasi-invariant function of* T.

An explicit form for the condition that a quasi-invariant function must satisfy is well-known[1] and may be readily derived. If the double integral be expressed in terms of the new variables u_1, v_1, it takes the form

$$\int\int Q(u, v)\left[\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial v}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial v_1}\right] du_1\, dv_1,$$

where the integration extends over the image of the given region under T. Since the given region is arbitrary, and since by hypothesis the last written integral has the same value as $\int\int Q(u_1, v_1)\, du_1\, dv_1$ taken over the same region, we infer that the two integrands are equal. But the Jacobian of u, v as to u_1, v_1 is the reciprocal of the Jacobian of u_1, v_1 as to u, v. Hence we obtain

(3) $$Q(u, v) = Q(u_1, v_1)\left[\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} - \frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}\right].$$

[1] Cf. E. Goursat, *Sur les transformations ponctuelles qui conservent les volumes. Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 52, 1917.

Conversely, if $Q(u, v)$ is a real analytic function, not zero for $u = v = 0$, and if (3) is true, it follows at once that Q is a quasi-invariant function.

If there exists a second quasi-invariant function Q' not a constant multiple of Q, it is clear that the ratio $\frac{Q'}{Q}$ is an analytic *invariant function of* T, not zero for $u = v = 0$. Moreover, if any quasi-invariant function be multiplied by such an invariant function, the product is clearly a quasi-invariant function.

When a conservative transformation T has an analytic invariant function (not a constant), the transformation will be said to be *integrable*.[1]

A transformation T remains conservative under a change of variables, say from u, v to $\bar{u}$, $\bar{v}$. The quasi-invariant function Q is thereby modified to a function $\bar{Q}$ obtained by multiplying Q by the Jacobian of u, v as to $\bar{u}$, $\bar{v}$.

§ 2. Preliminary Classification of Invariant Points.

We first make an evident and well-known preliminary classification of invariant points which is wholly based on the nature of the linear terms in the power series for u_1, v_1. Under real linear change of variables these first degree terms are transformed among themselves without reference to terms of higher degree. Consequently the theory of linear transformations applies to these terms. According to this theory the classification depends largely upon the nature of the roots of the quadratic equation in ϱ,

$$\varrho^2 - (a + d)\varrho + ad - bc = 0.$$

In the case at hand this equation is a reciprocal quadratic equation, i. e.

$$ad - bc = 1. \tag{4}$$

For, if $u = v = 0$, we have $Q = Q_1 \neq 0$ and also

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = a, \ \frac{\partial u_1}{\partial v} = b, \ \frac{\partial v_1}{\partial u} = c, \ \frac{\partial v_1}{\partial v} = d.$$

Thus from (3) the stated equation (4) follows. The roots of this reciprocal equation will be designated as ϱ and $\frac{1}{\varrho}$.

[1] It should be observed that the definition refers to the vicinity of an invariant point.

There are the following three cases to consider. First, ϱ may be real with a numerical value not unity; T can then be taken in the normal form

I.
$$\begin{cases} u_1 = \varrho u + \sum_{m+n=2}^{\infty} \varphi_{mn} u^m v^n, & (\varrho \neq \pm 1), \\ v_1 = \frac{1}{\varrho} v + \sum_{m+n=2}^{\infty} \psi_{mn} u^m v^n. \end{cases}$$

We subdivide this case according as ϱ is positive (case I′) or negative (case I″). Secondly, ϱ may be complex and so of modulus 1. With this case we group that case $\varrho = \pm 1$ in which the two elementary divisors are distinct. Here T may be taken in the normal form

II.
$$\begin{cases} u_1 = u \cos \theta - v \sin \theta + \sum_{m+n=2}^{\infty} \varphi_{mn} u^m v^n, & (\varrho = e^{\sqrt{-1}\theta}), \\ v_1 = u \sin \theta + v \cos \theta + \sum_{m+n=2}^{\infty} \psi_{mn} u^m v^n. \end{cases}$$

It is convenient to subdivide case II into the *irrational* case II′ when $\frac{\theta}{2\pi}$ is irrational, and the *rational* cases II″ when $\theta = 0$, and II‴ when $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q}$ with $\frac{p}{q}$ not an integer. Case II″ yields the case $\varrho = 1$; and II‴, the case $\varrho = -1$. Thirdly, we have that case in which the two elementary divisors are not distinct; here T may be taken in the normal form

III.
$$\begin{cases} u_1 = \pm u + \sum_{m+n=2}^{\infty} \varphi_{mn} u^m v^n, & (\varrho = \pm 1), \\ v_1 = \pm v + du + \sum_{m+n=2}^{\infty} \psi_{mn} u^m v^n, & (d \neq 0). \end{cases}$$

We subdivide this case according as $\varrho = 1$ (case III′) or $\varrho = -1$ (case III″).

If only linear terms are present in u_1, v_1 we obtain the linear transformations:

I. $$u_1 = \varrho u,\ v_1 = \frac{1}{\varrho} v, \qquad (\varrho \neq \pm 1),$$

II. $$u_1 = u \cos \theta - v \sin \theta,\ v_1 = u \sin \theta + v \cos \theta,$$

III. $$u_1 = \pm u,\ v_1 = \pm v + du, \qquad (d \neq 0).$$

These may be regarded as furnishing a first approximation to the corresponding general types. According to our definition all three linear transformations are conservative with $Q = 1$ a quasi-invariant function since areas are left invariant. Furthermore these cases are integrable with invariant functions uv, u^2+v^2, u^2 respectively.

In the first case a point P will move on a hyperbola $uv = \text{const.}$ upon successive application of T or T_{-1} (u, v being taken as rectangular coördinates); in the third case P will move along a pair of parallel lines $u^2 = \text{const.}$ Unless the point P lies on the degenerate hyperbola $uv = 0$ in the first case, or on the pair of coincident straight lines $u^2 = 0$ in the third, P will recede to infinity upon successive application of T or T_{-1}. When P lies on the degenerate hyperbola in the first case, it will approach the invariant point $(0, 0)$ upon successive application of T or else of T_{-1}, and recede to infinity upon application of the inverse transformation. In the third case all points of the line $u = 0$ are invariant or are reflected into points of the same line on the other side of $(0, 0)$, according as the $+$ or $-$ sign is used.

On the other hand, in the second case the transformation is a rotation about $(0, 0)$ through an angle θ, and every point P remains at a fixed distance from $(0, 0)$ upon successive application of T or T_{-1}.

The essence of the distinction here existing is brought out clearly by means of the following fundamental definition: if a neighborhood of an invariant point can be so taken that points arbitrarily near the invariant point leave this neighborhood upon successive application of T (or of T_{-1}), the invariant point is *unstable;* in the contrary case the invariant point is *stable.*[1]

Thus the linear transformations I, III are unstable in this sense, while those of type II are stable.

§ 3. An auxiliary Lemma.

Before proceeding to the consideration of formal series for u_k, v_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), we will establish the following obvious but useful lemma:

Lemma. The linear difference equation of the first order in $y(k)$,

$$y(k+1) - \sigma y(k) = c\lambda^k k^\mu,$$

[1] See T. Levi-Civita, *Sopra alcuni criteri di instabilità. Annali di Matematica,* Ser. III vol. 5, 1901.

(σ, c, λ real, and μ a positive integer or zero) admits a solution

$$\lambda^k \text{(real polynomial in } k \text{ of degree } \mu)$$

if $\lambda \neq \sigma$, and otherwise a solution

$$\lambda^k \text{(real polynomial in } k \text{ of degree } \mu + 1).$$

Suppose first that $\lambda \neq \sigma$. Let us make the substitution $y = \lambda^k w$, when the difference equation takes the form

$$w(k+1) - \frac{\sigma}{\lambda} w(k) = \frac{c}{\lambda} k^\mu .$$

If we write

$$w = w^{(0)} k^\mu + w^{(1)} k^{\mu-1} + \cdots + w^{(\mu)},$$

we find that w will be a solution if the following conditions are satisfied

$$\left(1 - \frac{\sigma}{\lambda}\right) w^{(0)} = \frac{c}{\lambda},$$

$$\mu w^{(0)} + \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda}\right) w^{(1)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w^{(0)} + w^{(1)} + \cdots + \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda}\right) w^{(\mu)} = 0.$$

On account of the assumption made, we see at once that these equations determine real quantities $w^{(0)}$, $w^{(1)}, \ldots,$ $w^{(\mu)}$ in succession, and lead to a solution of the kind specified.

If $\lambda = \sigma$ a slightly modified argument applies. Here we write $y = \lambda^k w$ as before, and then

$$w = w^{(0)} k^{\mu+1} + w^{(1)} k^\mu + \cdots + w^{(\mu+1)}.$$

The conditions on the coefficients take the form

$$(\mu + 1) w^{(0)} = \frac{c}{\lambda},$$

$$\frac{(\mu+1)\mu}{1 \cdot 2} w^{(0)} + \mu w^{(1)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w^{(0)} + w^{(1)} + \cdots + w^{(\mu)} = 0.$$

These equations determine real quantities $w^{(0)}$, $w^{(1)}, \ldots,$ $w^{(\mu)}$ in succession but leave $w^{(\mu+1)}$ undetermined, although it is to be taken real.

§ 4. Formal Series for u_k, v_k. Case I.

By iteration one can obtain convergent series for u_k, v_k in terms of u, v. In case I the linear terms of these series are evidently $\varrho^k u$, $\varrho^{-k} v$ respectively. This fact suggests that higher degree terms may be similarly given an explicit form in k, and we shall show this to be the fact.

If u_1, v_1 are real series of the form I with $\varrho > 0$ (case I'), u_k, v_k may be represented for all integral values of k in the form

$$\mathrm{I}'_k. \qquad \begin{cases} u_k = \varrho^k u + \sum_{m+n=2}^{\infty} \varphi_{mn}^{(k)} u^m v^n, \\ v_k = \varrho^{-k} v + \sum_{m+n=2}^{\infty} \psi_{mn}^{(k)} u^m v^n, \end{cases}$$

where $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ are real polynomials in ϱ^k, ϱ^{-k}, k of degree at most $m+n$ in these variables.

Let us consider first the quadratic terms in the series for u_k, v_k.

If in u_k, v_k we replace u, v by u_1, v_1 respectively, we obtain u_{k+1}, v_{k+1} by definition. By comparison of coefficients in I'_k above, this leads to the equations

$$\varphi_{20}^{(k+1)} = \varrho^k \varphi_{20} + \varrho^2 \varphi_{20}^{(k)}, \quad \varphi_{11}^{(k+1)} = \varrho^k \varphi_{11} + \varphi_{11}^{(k)}, \quad \varphi_{02}^{(k+1)} = \varrho^k \varphi_{02} + \varrho^{-2} \varphi_{02}^{(k)},$$

$$\psi_{20}^{(k+1)} = \varrho^{-k} \psi_{20} + \varrho^2 \psi_{20}^{(k)}, \; \psi_{11}^{(k+1)} = \varrho^{-k} \psi_{11} + \psi_{11}^{(k)}, \; \psi_{02}^{(k+1)} = \varrho^{-k} \psi_{02} + \varrho^{-2} \psi_{02}^{(k)}.$$

The first three of these equations are obtained by comparing the coefficients of u^2, uv, v^2 respectively in $u_{k+1}(u, v)$ and $u_k(u_1, v_1)$; the second three are found by a like comparison of $v_{k+1}(u, v)$ and $v_k(u_1, v_1)$.

By considering $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ with $m+n=2$ as undetermined functions of the index k, it is clear that these six equations constitute six difference equations of the type treated in the lemma of § 3.

Moreover these equations suffice to determine these six functions fully for all integral values of k if their value is known for any particular k. In the case at hand we have of course $\varphi_{mn}^{(0)} = \psi_{mn}^{(0)} = 0$ for all m and n, since $u_0 = u$, $v_0 = v$.

According to the lemma we can find explicit solutions of these difference equations of a very simple type, namely constant multiples of ϱ^k for the first three equations, and of ϱ^{-k} for the second three equations. Also the six reduced

homogeneous equations obtained by removing the first term on the right in the six equations admit the following respective particular solutions:

$$\varrho^{2k},\ 1,\ \varrho^{-2k};\ \varrho^{2k},\ 1,\ \varrho^{-2k}.$$

By adding real constant multiples of these solutions to the respective solutions of the non-homogeneous equations, we find a new set of particular solutions vanishing for $k = 0$ as desired.

In this way we obtain the explicit values of $\varphi^{(k)}_{mn}$, $\psi^{(k)}_{mn}$ for $m+n=2$:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi^{(k)}_{20} = \frac{\varphi_{20}(\varrho^k - \varrho^{2k})}{\varrho - \varrho^2}, \quad \varphi^{(k)}_{11} = \frac{\varphi_{11}(\varrho^k - 1)}{\varrho - 1}, \quad \varphi^{(k)}_{02} = \frac{\varphi_{02}(\varrho^k - \varrho^{-2k})}{\varrho - \varrho^{-2}}, \\ &\psi^{(k)}_{20} = \frac{\psi_{20}(\varrho^{-k} - \varrho^{2k})}{\varrho^{-1} - \varrho^2}, \quad \psi^{(k)}_{11} = \frac{\psi_{11}(\varrho^{-k} - 1)}{\varrho^{-1} - 1}, \quad \psi^{(k)}_{02} = \frac{\psi_{02}(\varrho^{-k} - \varrho^{-2k})}{\varrho^{-1} - \varrho^{-2}}. \end{aligned}\right.$$

We proceed to show that explicit expressions for $\varphi^{(k)}_{mn}$, $\psi^{(k)}_{mn}$ of the type stated exist also for $m+n=3$, $m+n=4, \ldots$ in succession.

To begin with, we write the equations obtained by a comparison of the coefficients of $u^m v^n$ in $u_{k+1}(u, v)$, $u_k(u_1, v_1)$ and $v_{k+1}(u, v)$, $v_k(u_1, v_1)$ in the respective abbreviated forms:

$$\varphi^{(k+1)}_{mn} = \varrho^k \varphi_{mn} + \varrho^{m-n}\varphi^{(k)}_{mn} + P_{mn},$$

$$\psi^{(k+1)}_{mn} = \varrho^{-k} \psi_{mn} + \varrho^{m-n}\psi^{(k)}_{mn} + Q_{mn}.$$

The expansions of $\varrho^k u_1$ and $\varrho^{-k} v_1$ in $u_k(u_1, v_1)$ and $v_k(u_1, v_1)$ respectively yield the first terms on the right in these equations. The second terms arise from the expansion of $\varphi^{(k)}_{mn} u_1^m v_1^n$ and $\psi^{(k)}_{mn} u_1^m v_1^n$ in the same functions. The last terms arise from the expansion of $\varphi^{(k)}_{\alpha\beta} u_1^\alpha v_1^\beta$ and $\psi^{(k)}_{\alpha\beta} u_1^\alpha v_1^\beta$ respectively, with $\alpha+\beta < m+n$; thus P_{mn} and Q_{mn} are linear and homogeneous in $\varphi^{(k)}_{\alpha\beta}$, $\psi^{(k)}_{\alpha\beta}$ respectively, with real coefficients, polynomial in ϱ, ϱ^{-1}, $\varphi_{\mu\nu}$, $\psi_{\mu\nu}$ $(\mu+\nu < \alpha+\beta)$.

Suppose now that we take $m+n=3$ and assume that the explicit expressions for $\varphi^{(k)}_{\alpha\beta}$ $(\alpha+\beta=2)$ are substituted in P_{mn}, Q_{mn}. The above equations become linear difference equations in $\varphi^{(k)}_{mn}$, $\psi^{(k)}_{mn}$. Furthermore, it is clear that these equations, together with the fact that $\varphi^{(0)}_{mn}$, $\psi^{(0)}_{mn}$ vanish, determine these variables completely for all integral values of k.

By a similar process to that employed in the case $m+n=2$ we may arrive now at explicit expressions for $\varphi^{(k)}_{mn}$, $\psi^{(k)}_{mn}$ in the case $m+n=3$.

In this new case we have a non-homogeneous part composed of more than one term. But each term is of the form $c\lambda^k k^\mu$ occurring on the right-hand side of the equation of the lemma (§ 3), since the non-homogeneous part is a polynomial in ϱ^k, ϱ^{-k} of degree at most 2.

If we add together the various particular solutions corresponding to each of these terms, as given by the lemma, we obtain a solution of each difference equation for $m+n=3$ in the form of a real polynomial in ϱ^k, ϱ^{-k}, k, of at most the third degree in these variables.

The corresponding homogeneous reduced equation has a solution $\varrho^{(m-n)k}$. If a suitable real constant multiple of this solution is added to the above particular solution of the non-homogeneous equation, a new particular solution is obtained which vanishes for $k=0$. Solutions of this type are real polynomials in ϱ^k, ϱ^{-k}, k of degree at most 3 in these variables, and form the desired expressions.

Proceeding indefinitely in this way we establish the truth of the italicized statement for $m+n=3$, $m+n=4, \ldots$.

It is obvious that the coefficients in the polynomials $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ are themselves real polynomials in the coefficients of the series u_1, v_1, save for divisors of the form $\varrho^\alpha - \varrho^\beta$ where α and β are unequal integers.

In the later discussion it is convenient to bring back the case I'' ($\varrho < 0$) to the case I' by means of the following remark:

If u_1, v_1 are real series of the form I with $\varrho < 0$ (case I''), then u_2, v_2 are of the form I' treated above.

§ 5. Formal series for u_k, v_k. Case II.

Next let us consider series of type II in the general case when θ is incommensurable with 2π.

If u_1, v_1 are real series of the form II with $\frac{\theta}{2\pi}$ irrational (case II'), u_k, v_k may be represented for all integral values of k in the form

$$\text{II}'_k. \qquad \begin{cases} u_k = u\cos k\theta - v\sin k\theta + \sum_{m+n=2}^{\infty} \varphi_{mn}^{(k)} u^m v^n, \\ v_k = u\sin k\theta + v\cos k\theta + \sum_{m+n=2}^{\infty} \psi_{mn}^{(k)} u^m v^n, \end{cases}$$

where $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ are real polynomials in $\cos k\theta$, $\sin k\theta$, k of degree at most $m+n$ in these variables.

Let us introduce new variables $\bar{u}$, $\bar{v}$, namely

$$\bar{u} = u + \sqrt{-1}\,v,\quad \bar{v} = u - \sqrt{-1}\,v.$$

The equations II give series for $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$ in terms of $\bar{u}$, $\bar{v}$, which are of the form I with $\varrho = e^{\sqrt{-1}\,\theta}$.

Now the lemma of § 3 can evidently be extended to the case when σ, c, λ are complex constants. Here of course the polynomial factors in the solutions are no longer real in general. Hence the same formal treatment of $\bar{u}_k$, $\bar{v}_k$ is posssible as was made in case I' for u_k, v_k; in fact for the case at hand none of the divisors $\varrho^\alpha - \varrho^\beta$ are 0 so that the solutions are precisely of the same form. Thus $\bar{u}_k$, $\bar{v}_k$ can be expressed as power series in $\bar{u}$, $\bar{v}$ with coefficients $\bar{\varphi}_{mn}^{(k)}$, $\bar{\psi}_{mn}^{(k)}$ of $\bar{u}^m \bar{v}^n$ respectively, polynomial in ϱ^k, ϱ^{-k}, k of degree not more than $m+n$.

Recalling the simple relation between u, v and $\bar{u}$, $\bar{v}$, and utilizing the trigonometric form of ϱ^k, ϱ^{-k} we arrive at series u_k, v_k of the desired type, save that the reality of the polynomials $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ is not established.

Although an inspection of the actual formulas employed would establish this reality, it suffices to note that, since u_k, v_k are real power series, the real parts of $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ constitute real polynomials of the type required.

In the rational case II, $\theta = 0$, series of type II are also of type I with $\varrho = 1$. Consequently the method of § 4 leads at once to the conclusion:

If u_1, v_1 are real series of the form II with $\theta = 0$ (case II''), u_k, v_k may be represented for all integral values of k in the form

$$\text{II}''_k. \qquad \begin{cases} u_k = u + \sum_{m+n=2}^{\infty} \varphi_{mn}^{(k)} u^m v^n, \\ v_k = v + \sum_{m+n=2}^{\infty} \psi_{mn}^{(k)} u^m v^n, \end{cases}$$

where $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ are real polynomials in k of degree at most $m+n-1$.[1]

The rational case $\theta \neq 0$ can be brought back to the case $\theta = 0$:

If u_1, v_1 are real series of the form II with $\dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{p}{q}$ (case II'''), then u_q, v_q are of the form II''.

There are series similar to II'_k in the general rational case, but we do not need to use them.

[1] This fact has been noted by C. L. Bouton, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 23, 1916, p. 73. See also A. A. Bennett, *A case of iteration in several variables*, *Annals of Mathematics*, vol. 17, 1915—1916.

§ 6. Formal series for u_k, v_k. Case III.

Finally we have to consider case III:

If u_1, v_1 are real series of the form III with $\varrho = 1$ (case III′), u_k, v_k may be represented for all integral values of k in the form

$$\text{III}'_k. \qquad \begin{cases} u_k = u + \displaystyle\sum_{m+n=2}^{\infty} \varphi_{mn}^{(k)} u^m v^n, \\ v_k = v + k d u + \displaystyle\sum_{m+n=2}^{\infty} \psi_{mn}^{(k)} u^m v^n, \end{cases}$$

where $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ are real polynomials in k of degree at most $2m+n-1$.

We propose to deal with this case by reducing it to the case II″ as follows. Write

$$u = \bar{u}\bar{v}, \quad v = \bar{v},$$

and let us make this change of variables in the given transformation. We obtain

$$\bar{u}_1 \bar{v}_1 = \bar{u}\bar{v} + \sum_{m+n=2}^{\infty} \varphi_{mn} \bar{u}^m \bar{v}^{m+n},$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + d\bar{u}\bar{v} + \sum_{m+n=2}^{\infty} \psi_{mn} \bar{u}^m \bar{v}^{m+n}.$$

Now the right-hand member of each of these equations contains $\bar{v}$ as a factor. Hence, dividing the first equation, member for member, by the second, we find the equivalent equations

$$\bar{u}_1 = \bar{u} + \sum_{m+n=2}^{\infty} \bar{\varphi}_{mn} \bar{u}^m \bar{v}^n,$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \sum_{m+n=2}^{\infty} \bar{\psi}_{mn} \bar{u}^m \bar{v}^n,$$

which is formally of the type II″. Hence by our result in § 5 we may write for all integral values of k

$$\bar{u}_k = \bar{u} + \sum_{m+n=2}^{r} \bar{\varphi}_{mn}^{(k)} \bar{u}^m \bar{v}^n,$$

$$\bar{v}_k = \bar{v} + \sum_{m+n=2}^{r} \bar{\psi}_{mn}^{(k)} \bar{u}^m \bar{v}^n,$$

where $\bar{\varphi}_{mn}^{(k)}$, $\bar{\psi}_{mn}^{(k)}$ are real polynomials in k of degree at most $m+n-1$.

Multiplying these two equations together, member for member, we get

$$\bar{u}_k \bar{v}_k = \bar{u}\bar{v} + \sum_{m+n=2}^{r} \bar{\chi}_{mn}^{(k)} \bar{u}^m \bar{v}^n,$$

where $\bar{\chi}_{mn}^{(k)}$ is a real polynomial in k of degree at most $m+n-2$. Compare this equation with that for u_k as a power series in u, v, and so in $\bar{u}$, $\bar{v}$. The two series must be identical so that the exponent of $\bar{v}$ must be at least as great as that of $\bar{u}$ in every term. Hence $\bar{\chi}_{mn}^{(k)}$ vanishes identically for $n < m$. Consequently, if we write

$$\varphi_{mn}^{(k)} = \bar{\chi}_{m,\,m+n}^{(k)},$$

we have u_k expressed in the stated form.

Likewise, if we compare the series for $\bar{v}_k$ with that for v_k, we are led to see that $\bar{\psi}_{mn}^{(k)}$ vanishes identically for $n < m$ and to write

$$\psi_{mn}^{(k)} = \bar{\psi}_{m,\,m+n}^{(k)},$$

so that v_k is of the stated form.

It may be observed that all of the series employed converge for $\bar{u}$, $\bar{v}$ sufficiently small in absolute value. This fact justifies the method of formal comparison employed.

The case III with $\varrho = -1$ is taken care of by the following remark:

If u_1, v_1 are real series of the form III with $\varrho = -1$ (case III″), u_2, v_2 are of the form II″.

§ 7. Uniqueness of series for u_k, v_k.

The following is easily proved:

Lemma. Unless ϱ is a root of unity, a polynomial in ϱ^k, ϱ^{-k}, k, ϱ^l, ϱ^{-l}, l, ... cannot vanish for all integral values of k, l, ..., without vanishing identically.

If possible, suppose that the lemma is not true when there is a single variable k, i. e. suppose that there exists a polynomial in ϱ^k, ϱ^{-k}, k which vanishes for all integral values of k without vanishing identically, although ϱ is not a root of unity.

In the first place we cannot have $|\varrho| > 1$. For in this case divide the hypothetical polynomial by the highest power of ϱ^k which appears explicitly. Let k take on larger and larger integral values. All of the terms of the modified polynomial tend to zero save the term formed by the coefficient of this highest power, inasmuch as ϱ^k becomes infinite more rapidly than any power of k. This coefficient is itself a polynomial in k which is not identically 0. Hence it cannot approach 0 as k becomes positively infinite. But, since the hypothetical polynomial vanishes for all integral k, this is absurd.

The possibility $|\varrho| < 1$ is disposed of similarly by dividing through by the highest power of ϱ^{-k} which appears.

Hence we have $|\varrho| = 1$ and may write $\varrho = e^{\sqrt{-1}\,\theta}$ where θ is real. Here we fix upon the coefficient of the highest power of k which appears in the hypothetical polynomial. An argument like that made above shows that this coefficient must approach 0 as k becomes infinite through integral values. However, this coefficient is a polynomial in $\cos k\theta$, $\sin k\theta$; and $\frac{\theta}{2\pi}$ is irrational since ϱ is not a root of unity. Hence $k\theta$ can be made to differ from an integral multiple of 2π by nearly any assigned quantity t for large integral k. Thus the coefficient polynomial must vanish when $k\theta$ is replaced by the arbitrary real variable t. This is impossible.

A similar proof disposes of the case when two or more variables enter.

An application of the lemma shows at once:

The polynomials $\varphi_{mn}^{(k)}$, $\psi_{mn}^{(k)}$ of §§ 4, 5, 6 are unique.

In fact it is clear that the difference of two such polynomials with the same subscripts m, n vanishes for all integral k. But these polynomials are of the type dealt with in the lemma, and must therefore coincide.

§ 8. The formal group for T.

The various integral powers of the transformation T combine according to the rule $T_k T_l = T_{k+l}$, where k and l are any integers whatever.

In the preceding sections we have been led to real *formal* series giving T_k *for all integral values of* k in the cases I', II', II'', III', to which all other cases were reduced.

The formulas

$$u_k(u_l, v_l) = u_{k+l}(u, v), \quad v_k(u_l, v_l) = v_{k+l}(u, v) \tag{6}$$

hold for all real values of k and l.

The content of this statement is wholly formal of course.

In the cases II'', III' its truth is at once obvious. The equations (6) stand for an infinite number of ordinary polynomial relations between the coefficients $\varphi_{mn}^{(k)}, \psi_{mn}^{(k)}, \varphi_{mn}^{(l)}, \psi_{mn}^{(l)}, \varphi_{mn}^{(k+l)}, \psi_{mn}^{(k+l)}$ which are known to hold for all integral values of k and l. Since these coefficients are themselves ordinary polynomials in k, l, these relations hold identically. Similar reasoning, based on the lemma of § 7, shows that the statement is also true in cases I', II'.

From the italicized statement thus established it appears that we have to deal with a one-parameter continuous group of formal transformations and that k is an additive parameter for the group.[1] In treating of its properties we need a few of the general formal ideas for such groups.

We shall write formally

$$\delta u = \left.\frac{\partial u_k}{\partial k}\right|_{k=0}, \quad \delta v = \left.\frac{\partial v_k}{\partial k}\right|_{k=0}, \tag{7}$$

so that we have the following table:

$$\begin{cases} (\mathrm{I}'), & \delta u = u \log \varrho + \cdots, \quad \delta v = -v \log \varrho + \cdots, \\ (\mathrm{II}'), & \delta u = -\theta v + \cdots, \quad \delta v = \theta u + \cdots, \\ (\mathrm{II}''), & \delta u = \varphi_{20} u^2 + \cdots, \quad \delta v = \psi_{20} u^2 + \cdots, \\ (\mathrm{III}'), & \delta u = \left(\varphi_{20} - \frac{d}{2}\varphi_{11} + \frac{d^2}{6}\varphi_{02}\right) u^2 + \cdots, \quad \delta v = d u + \cdots. \end{cases} \tag{8}$$

The series δu, δv are real formal power series in u, v.

The series u_k, v_k satisfy the formal differential equations

$$\frac{du_k}{dk} = \delta u(u_k, v_k), \quad \frac{dv_k}{dk} = \delta v(u_k, v_k), \tag{9}$$

and the initial conditions $u_0 = u$, $v_0 = v$; conversely u_k, v_k are formally determined by these equations and conditions.

[1] C. L. Bouton observed these facts in case II'', loc. cit.

To begin with, by differentiating the first equation (6) formally as to k and noting symmetry, we find

$$\frac{d}{dk}u_k(u_l, v_l) = \frac{d}{dk}u_{k+l}(u, v) = \frac{d}{dl}u_l(u_k, v_k).$$

Putting $l = 0$ and recalling the definition of δu we obtain the first of the differential equations (9). The second equation may be deduced in like manner.

The initial conditions $u_0 = u$, $v_0 = v$ are clearly satisfied.

Conversely, if we write u_k, v_k as power series in u, v without constant term and with coefficients which are undetermined functions of k, and substitute in the differential equations, we get at each step linear differential equations of the first order in these coefficients. When joined with the condition that all of these coefficients are 0 for $k = 0$, save the coefficients of u in u_0 and of v in v_0 which are 1, these equations successively determine the coefficients.

These facts explain the complete analogy between the classification of transformations T near an invariant point and the classification of differential equations of type (9) at a point $\delta u = \delta v = 0$. This analogy was noted by POINCARÉ.[1]

§ 9. The invariant operator $L(w)$.

We shall now define the invariant operator $L(w)$:

$$L(w) = \delta u \frac{\partial w}{\partial u} + \delta v \frac{\partial w}{\partial v}. \tag{10}$$[2]

It is clear the $L(w(u, v))$ is the formal derivative of $w(u_k, v_k)$ as to k for $k = 0$. Consequently $L(w)$ is unaltered (formally) by a change of variables. The fundamental property of this operator is expressed in the following statement:

The necessary and sufficient condition that a formal series F be invariant under T is that $L(F) = 0$.

First, this condition is necessary. In fact, if F is an invariant series we have $F(u_k, v_k) = F(u, v)$ for all integral values of k. Hence, by the lemma of

---

[1] *Sur les courbes définies par les équations différentielles, Journal de mathématiques*, ser. 3, vols. 7—8, 1881—1882 and ser. 4, vols. 1—2, 1885—1886. The analogy was explained partially by means of a limiting process by S. LATTÈS, *Sur les équations fonctionelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation, Annali di Matematica*, ser. 3, vol. 13, 1907.

[2] This is the »symbol of the infinitesimal transformation» in the terminology of LIE.

§ 7, this relation holds for all values of k. Differentiating as to k and taking $k=0$, we find $L(F)=0$.

Secondly, this condition is sufficient. For if $L(F)=0$ we find, using (9),

$$\frac{d}{dk}F(u_k, v_k)=\frac{\partial F(u_k, v_k)}{\partial u_k}\frac{du_k}{dk}+\frac{\partial F(u_k, v_k)}{\partial v_k}\frac{dv_k}{dk}$$
$$=L(F(u_k, v_k))=0.$$

Hence we infer that $F(u_k, v_k)$ is a power series with coefficients independent of k. Putting $k=0$ we get $F(u_k, v_k)=F(u, v)$, and in particular $F(u_1, v_1)=F(u, v)$. That is, F is invariant under T.

§ 10. Existence of invariant series.

In §§ 2—9 the fact that T was assumed conservative did not enter, save that we made use of the equation (4). We shall now prove the following:

Any conservative transformation T of the form I', II', II'' or III' leaves invariant a real formal series F^* defined by the equations

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial F^*}{\partial v}=Q\delta u,\quad \frac{\partial F^*}{\partial u}=-Q\delta v.$$

By multiplying together the equation (3) for u, v, for $u=u_1, v=v_1, \ldots$, for $u=u_{k-1}, v=v_{k-1}$, we obtain

$$(3_k) \qquad Q(u, v)=Q(u_k, v_k)\begin{vmatrix}\frac{\partial u_k}{\partial u} & \frac{\partial u_k}{\partial v}\\ \frac{\partial v_k}{\partial u} & \frac{\partial v_k}{\partial v}\end{vmatrix}$$

for any positive integral value of k. We employ the familiar rule for the combination of Jacobians in obtaining this result. Likewise (3_k) holds for $k=0$ and also for negative integral values of k, as is easily seen.

Hence this relation (3_k) will hold identically when the formal series for u_k, v_k are substituted. This follows from the lemma of § 7.

Differentiating with respect to k and setting $k=0$, we find

$$\text{(12)} \qquad 0=\frac{\partial}{\partial u}(Q\delta u)+\frac{\partial}{\partial v}(Q\delta v).$$

Here we have employed the definitions (7) of $\delta u, \delta v$ and we have made use of the fact that the Jacobian determinant reduces to

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

for $k=0$. Now consider the terms of a particular degree in $Q\delta u$ and $-Q\delta v$. These homogeneous polynomials p and q have the property

$$\frac{\partial p}{\partial u}=\frac{\partial q}{\partial v},$$

deduced from (12). Hence there exists a homogeneous polynomial r of degree one higher such that

$$p=\frac{\partial r}{\partial v}, \quad q=\frac{\partial r}{\partial u}.$$

The sum of the polynomials r of all degrees ($\geqq 2$) is the formal series F^* required.

From the equations (11) we have immediately $L(F^*)=0$, so that by § 9 the series F^* is formally invariant under T.

If a change of variables from u, v to U, V be made, the series F^* for the new variables can be obtained by direct substitution. For, from the equations (11) we find

$$\frac{\partial F^*}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial v}+\frac{\partial F^*}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial v}= Q\left[\frac{\partial u}{\partial U}\delta U+\frac{\partial u}{\partial V}\delta V\right],$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{\partial F^*}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial u}=-Q\left[\frac{\partial v}{\partial U}\delta U+\frac{\partial v}{\partial V}\delta V\right].$$

Multiplying the first of these equations by $\frac{\partial v}{\partial V}$, and the second by $\frac{\partial u}{\partial V}$, and adding, we find

$$\frac{\partial F^*}{\partial V}=Q\left[\frac{\partial u}{\partial U}\frac{\partial v}{\partial V}-\frac{\partial u}{\partial V}\frac{\partial v}{\partial U}\right]\delta U.$$

But the quasi-invariant function for the new variables is the product of $Q(u, v)$ and the Jacobian of u, v as to U, V (§ 1). Hence the equation last written shows that $F^*(u, v)$, regarded as a formal series in U, V, satisfies the first equation (11) for the new variables. Similarly the second equation (11) is seen to hold in these variables.

From the equations (8) and (11) the explicit forms of the series F^* are immediately evident:

$$(13)\quad \begin{cases} (\mathrm{I}'), & F^* = uv \log \varrho + \cdots, \\ (\mathrm{II}'), & F^* = -\frac{\theta}{2}(u^2+v^2) + \cdots, \\ (\mathrm{II}''), & F^* = -\frac{1}{3}\psi_{20} u^3 + \cdots, \\ (\mathrm{III}'), & F^* = -\frac{d}{2} u^2 + \cdots. \end{cases}$$

It is apparent that any formal power series in F^* furnishes an invariant series.

In order to determine to what extent the existence of formally invariant series for a transformation I′, II′, II″, III′ is characteristic of conservative transformations we need to make a digression.

§ 11. Factorization of formal series.[1]

We consider formal series without constant terms. Such a series will be called *prime* when it cannot be expressed as the product of two others. Since the lowest degree of any term in a product is the sum of the lowest degrees for any terms in the factors, any formal series can be decomposed into prime factors in at least one way, and the number of such factors cannot exceed the degree of the initial terms of that series.

Two factors, either of which can be obtained from the other by multiplication by a formal series with constant term, are regarded as essentially equivalent. Since products and quotients of formal series with constant terms yield series of the same type, the propriety of this convention is obvious.

By a linear change of variables any series $G(u, v)$ can be given the form $cv^n + \cdots$, $c \neq 0$, where the indicated terms are of degree at least n. Any possible factor of G is readily seen to have the same prepared form. Also Weierstrass's factorization theorem holds formally, i. e., we may write $G = EH$ where E is a power series with constant term c and H is a power series, $v^n + \cdots$, in which v does not occur with an exponent as large as n after the first term.

Now let us determine the formal series $S\left(u^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ in powers of $u^{\frac{1}{\alpha}}$ which satisfy the equation $H = 0$, and let us proceed at each step of this determination pre-

[1] Cf. W. F. Osgood, *Factorization of analytic functions of several variables, Annals of Mathematics*, vol. 19, 1917—1918.

cisely as though $H(u, v)$ were a polynomial in u, v. The well-known method for doing so yields higher and higher terms of such series, with $\Sigma\alpha = n$.

At first sight it might seem conceivable that this process breaks down at some point so that it is not possible to proceed further. But, since the process used involves only a finite set of terms of H at each stage, the same difficulty would necessarily arise if H were broken off at some advanced term. This is absurd since then we are dealing with a polynomial. Thus we obtain a contradiction. Consequently we can obtain formal series of the stated type in $u^{\frac{1}{\alpha}}$ which, when substituted for v, reduce H to 0. The initial terms in these power series are at least of the first degree in u.

Let ω be any αth root of 1 and consider

$$\prod_{\alpha}\Big[\prod_{\omega}\big(v - S\big(\omega u^{\frac{1}{\alpha}}\big)\big)\Big].$$

This product is precisely H, at least if H is a polynomial in u as well as in v. By breaking off H at an advanced term and employing a limiting process, we infer that the same is always true.

The bracketed products involve only integral powers of u as well as of v, and are prime factors of G. Indeed, if such a product P is not prime, its component factors are of prepared form and may be decomposed as G has been. But any new series S so obtained must fail to reduce P to 0 when we write $v = S$. This is absurd.

For a similar reason it appears that, if a prime series divides a product, the series must divide one of the factors.

It follows that, *as far as the fundamental theorems of decomposition are concerned, the situation for convergent series carries over directly to divergent series.*

§ 12. Condition for conservativeness.

We are now in a position to prove the following:

A necessary and sufficient condition that a transformation T given by real series I', II', II'', III' (but otherwise unrestricted) be conservative is (1) that there exists a real invariant series F of lowest terms one degree higher than those of $\delta u, \delta v$ and containing each common prime factor of $\delta u, \delta v$ to precisely one power higher than it appears as a common factor in $\delta u, \delta v$, and (2) that the formal power series given by the equal ratios

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{\delta u} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\delta v}$$

converges.

Before entering upon the proof, it may be observed that an inspection of $\delta u, \delta v$ as given by (8) shows that, in the cases I′, II′, δu and δv have no common factor. In these cases the condition (1) reduces to the condition merely that there exists a formal series F with lowest terms of the second degree. It will appear later that δu and δv admit of a common factor only in the extraordinarily special cases II″, III′ when there exist curves through (0, 0) made up of invariant points.

We first prove the conditions *necessary*.

We take $F = F^*$. The equations (11) show that this invariant series has lowest terms of degree one higher than the terms in $\delta u, \delta v$ of least degree, inasmuch as Q possesses a constant term.

From the equations (11) it follows also that the ratio series of the italicized statement converges to Q. It remains to show that F^* contains the common prime factors of $\delta u, \delta v$ to a power one higher than these occur as common factors of $\delta u, \delta v$.

Let P^k be the highest power of any such prime P occurring in $\delta u, \delta v$. By (11) we have

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} = P^k a, \ \frac{\partial F^*}{\partial v} = P^k b$$

where either a or b is prime to P.

If F^* contains P to higher than the $(k+1)$th power, $\frac{\partial F^*}{\partial u}$ and $\frac{\partial F^*}{\partial v}$ will contain P to higher than the kth power. This is in manifest contradiction with the equations last written.

If F^* contains P to a power m with $0 < m < k+1$, and if we write $F^* = P^m G$, we find

$$mG\frac{\partial P}{\partial u} + P\frac{\partial G}{\partial u} = P^{k+1-m}a,$$

$$mG\frac{\partial P}{\partial v} + P\frac{\partial G}{\partial v} = P^{k+1-m}b.$$

Hence, since G is prime to P, both $\frac{\partial P}{\partial u}$ and $\frac{\partial P}{\partial v}$ are divisible by P. At least

one of these partial derivatives is possessed of initial terms of lower degree than P, so that this possibility is likewise excluded.

The statement under consideration is certainly true then unless, perchance, F^* is not divisible by the prime factor P. We have merely to eliminate this possibility.

It was seen in the preceding section that we can write

$$P = E\prod_{\omega}\left(v - S\left(\omega u^{\frac{1}{n}}\right)\right),$$

when E is a formal power series with constant term, where S in an ascending power series in its argument, and where ω stands for any nth root of I.

Now introduce the variable $t = u^{\frac{1}{n}}$ instead of u. We have

$$\frac{\partial F^*}{\partial t} = n t^{n-1}\frac{\partial F^*}{\partial u},$$

while $\frac{\partial F^*}{\partial v}$ is unaltered. Hence the partial derivatives $\frac{\partial F^*}{\partial t}$ and $\frac{\partial F^*}{\partial u}$ are divisible by $v - S(t)$. Let us effect a further change of variables from v, t to w, z where $w = v - S(t)$, $z = t$. Evidently one has

$$\frac{\partial F^*}{\partial w} = \frac{\partial F^*}{\partial v}, \quad \frac{\partial F^*}{\partial z} = \frac{\partial F^*}{\partial t} + \frac{\partial F^*}{\partial v}\frac{dS}{dt},$$

so that $\frac{\partial F^*}{\partial w}$ and $\frac{\partial F^*}{\partial z}$ are divisible by w.

The fact that $\frac{\partial F^*}{\partial z}$ is divisible by w shows that F^* contains no terms in z alone and is divisible by w.

Passing back to the variables v, t, we infer that F^* expressed as a power series in v, t is divisible by $v - S(t)$. It follows that $F^*(u, v)$ is divisible by $v - S\left(u^{\frac{1}{n}}\right)$ and by P of course. This completes the proof that the conditions stated are necessary.

It remains to prove them *sufficient*.

We may assume that an invariant series F^* exists for which (II) holds in which Q is a convergent power series with constant term I. These equations follow at once from the second part of the italicized statement under consideration. Our aim is to show that T is conservative.

By direct differentiation and use of the formal differential equations (9) we obtain

$$\frac{d}{dk}\left\{Q(u_k, v_k)\begin{vmatrix}\frac{\partial u_k}{\partial u} & \frac{\partial u_k}{\partial v}\\ \frac{\partial v_k}{\partial u} & \frac{\partial v_k}{\partial v}\end{vmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\partial Q(u_k, v_k)}{\partial u_k}\delta u(u_k, v_k) + \frac{\partial Q(u_k, v_k)}{\partial v_k}\delta v(u_k, v_k)\right\}\begin{vmatrix}\frac{\partial u_k}{\partial u} & \frac{\partial u_k}{\partial v}\\ \frac{\partial v_k}{\partial u} & \frac{\partial v_k}{\partial v}\end{vmatrix} +$$

$$+ Q(u_k, v_k)\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial\delta u(u_k, v_k)}{\partial u} & \frac{\partial\delta u(u_k, v_k)}{\partial v}\\ \frac{\partial v_k}{\partial u} & \frac{\partial v_k}{\partial v}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\frac{\partial u_k}{\partial u} & \frac{\partial u_k}{\partial v}\\ \frac{\partial\delta v(u_k, v_k)}{\partial u} & \frac{\partial\delta v(u_k, v_k)}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}.$$

But the first determinant in the final brace is the Jacobian of $\delta u(u_k, v_k)$, v_k with respect to u, v. This determinant may be broken up into the product of the Jacobian of $\delta u(u_k, v_k)$, v_k as to u_k, v_k $\left(\text{which is } \frac{\partial\delta u(u_k, v_k)}{\partial u_k}\right)$ and the Jacobian of u_k, v_k as to u, v. Likewise the second determinant in the same brace may be expressed as the product of $\frac{\partial\delta v(u_k, v_k)}{\partial v_k}$ and the Jacobian of u_k, v_k as to u, v. Hence we find that the right-hand member of the above equations reduces to

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u_k}[Q(u_k, v_k)\,\delta u_k] + \frac{\partial}{\partial v_k}[Q(u_k, v_k)\,\delta v_k]\right\}\begin{vmatrix}\frac{\partial u_k}{\partial u} & \frac{\partial u_k}{\partial v}\\ \frac{\partial v_k}{\partial u} & \frac{\partial v_k}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

The first factor vanishes identically by (11). Hence the left-hand member of the above equation vanishes identically in k. Integrating formally we obtain (3_k). For $k = 1$ this becomes (3), which is precisely the condition that T be conservative with a quasi-invariant function Q.

It is natural to call a transformation T of types I′, II′, II″, III′ *formally conservative* if there exists a formal series F satisfying the conditions in part (1) of the italicized statement.

We may inquire precisely what condition the existence of formally invariant series lays upon transformations T of these types. The ratio Q of the

italicized statement may or may not be convergent. If it is convergent, then $\int\int Q(u, v)\,du\,dv$ is invariant under T. If the ratio is not convergent, the double integral is only formally invariant.

These considerations bring out the vitally close connection between conservativeness and formally invariant series.

§ 13. The formal vanishing of the Jacobian.

To complete our treatment of formally invariant series we need to establish the formal extension of a well-known property of Jacobians:

The Jacobian of two formal series in u, v without constant terms vanishes identically if and only if either can be expressed as a power series in the other or in fractional powers of the other.[1]

It is immediately apparent that, if two functions A, B are so expressible one in terms of the other, their Jacobian will vanish identically.

Suppose, conversely, that A and B are power series in u, v with vanishing Jacobian:

$$\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial B}{\partial u} = 0.$$

Both A and B are exact powers of base series for which it suffices to establish the functional relation. But the Jacobian for the bases also vanishes. Consequently we may confine attention to the case in which neither A nor B is an exact power other than the first.

We begin by showing that A and B have the same prime factors.

If this is not the case, suppose that A is divisible by a prime series P, while B is not. After a suitable preliminary change of variables, P is expressible as a product of series $v - S\left(u^{\frac{1}{n}}\right)$ (§ 11). Now take new variables

$$w = v - S\left(u^{\frac{1}{n}}\right), \quad t = u^{\frac{1}{n}}.$$

The series A and B are power series in these variables without constant terms, and their Jacobian as to w, t is 0 by direct reckoning:

[1] The presence of fractional powers means that the root indicated is to be formally extracted.

$$\frac{\partial A}{\partial w}\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial w}=0.$$

But A is divisible by w, and $\frac{\partial A}{\partial t}$ is divisible by w to a power at least as high. Also $\frac{\partial A}{\partial w}$ is divisible by w to a power at least one lower than A. Hence $\frac{\partial B}{\partial t}$ is divisible by w. From this it follows that B is divisible by w.

Proceeding to the original variables we infer that B is divisible by the prime factor P, contrary to hypothesis.

Suppose that a prime factor P is contained p times in A and q times in B, and choose that factor for which $\frac{p}{q} \neq 0$ is as small as possible, and thus smaller than for some other factor unless $\frac{p}{q}$ is the same throughout. Except in this case, $\frac{A^q}{B^p}$ will yield a power series without constant term and not containing P. But the Jacobian of this series and A is easily verified to be 0 also. This is not possible by the argument used above, since $\frac{A^q}{B^p}$ has not the prime factor P which A admits.

We are thus forced to the conclusion that the power series $\frac{A^q}{B^p}$ starts off with a constant term. But A and B are not exact powers so that we must have $p=q$. Consequently the prime factors of A and B occur with the same multiplicity in A and B.

Now consider

$$A = B\,(c + C), \qquad (c \neq 0),$$

where C is a power series without constant term. It is readily inferred that the Jacobian of C, B is 0, and thence that, if C is an exact qth power, $\frac{C^{\frac{1}{q}}}{B}$ is a power series with constant term. Hence we may write

$$C = B^q\,(d + D), \qquad (d \neq 0),$$

where D is a power series without constant term. Proceeding in this way indefinitely we find

$$A = c\,B + d\,B^q + \cdots.$$

This establishes the statement.

§ 14. The totality of invariant series.

We may now prove the following:

If F^* is a qth power the most general invariant series is an arbitrary power series in $F^{*\frac{1}{q}}$. The integer q is 1 unless all the prime factors of F^* are common to δu, δv.

The results of § 13 assure us that the most general invariant series can be represented as stated if the Jacobian of F^* and any invariant series F vanishes. But we have $L(F^*) = 0$, $L(F) = 0$, whence it appears that the Jacobian does vanish.

If $q \neq 1$ we may write $F^* = G^q$, and (11) gives

$$qG^{q-1}\frac{\partial G}{\partial v} = Q\delta u, \quad qG^{q-1}\frac{\partial G}{\partial u} = -Q\delta v,$$

so that all of the factors of G (and hence of F^*) are common to δu and δv.

§ 15. Conditions for Formal Conservativeness.

At the very outset of the paper the condition (4) was obtained as a consequence of the fact that T was assumed to be conservative. There exist an infinite set of similar conditions on the coefficients of higher degree terms in the power series u_1 and v_1. These conditions may be found by use of the existence of invariant formal series. We illustrate the method in case I'.

Since F^* begins with a term $uv \log \varrho$ in this case, an invariant series F, also with first degree term $uv \log \varrho$, can be written down without any other terms having equal exponents in u, v:

$$F = uv \log \varrho + \sum_{m+n=3}^{\infty} F_{mn} u^m v^n, \qquad (m \neq n).$$

This series F may be obtained by writing $F = F^* + cF^{*2} + \cdots$, and choosing the arbitrary coefficients so as to eliminate terms with equal exponents.

Moreover, it is easy to see that there is only one such series, since any invariant series can be expressed as in a power series in F^* (§ 14).

Now, when coefficients of $u^m v^n$ are compared, the formal relation $F(u_1, v_1) = F(u, v)$ gives a series of equations

$$F_{mn}(\varrho^{m-n}-1)=P_{mn}, \qquad (m+n\geqq 3).$$

Here P_{mn} is a linear expression in the quantities $F_{\alpha\beta}$ with $\alpha+\beta<m+n$. Thus we determine F_{mn} for $m+n=3$; $m+n=4,\ldots$, as polynomials in the coefficients φ_{mn}, ψ_{mn} of the series for u_1, v_1. For $m=n$ we have $P_{mn}=0$.

In the case I' the polynomials P_{nn} in $\varphi_{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha\beta}$ $(\alpha+\beta<2n)$ vanish for $n=2, 3, \ldots$.

Conversely, if these vanish we have a formally invariant series F, and formal conservativeness of T in consequence.

Similar conditions for formal conservativeness can be found in the other cases.

§ 16. Invariant formal curves.

Let f and g be two formal power series in a parameter t, without constant terms and not both identically 0. Then we shall regard the equations

$$u=f(t),\quad v=g(t),$$

as furnishing a *formal curve through the point* (0, 0). If the series f, g converge for $|t|$ small we have an analytic curve.

Two curves of this sort will be regarded as identical if one can be obtained from the other by change of parameter $t=l(\tau)$ where l is a formal power series in τ or a fractional power thereof.

A formal curve is regarded as real if the coefficients in f and g can be taken real.

By means of T a formal curve of this sort is regarded as carried over into the formal curve

$$u=u_1(f(t), g(t)),\quad v=v_1(f(t), g(t)).$$

If this transformed curve is identical with the given curve $u=f(t)$, $v=g(t)$ then the given curve is said to be *formally invariant* under T.

The determination of the formally invariant curves is essential for our purpose. A fundamental division of types of invariant points will be made according as there do or do not exist curves of this sort given by real series. In cases I', II', II'', III' the transformation T will be called *hyperbolic* if real formally invariant curves exist, and *elliptic* in the contrary case. In cases II''' or III'', T is *hyperbolic* or *elliptic* according as T_q or T_2 (of type II'') is one or the other.

If t_1 denotes the power series in t or a fractional power thereof along the transformed invariant curve which relates its parameter and t, we have

$$f(t_1) = u_1(f(t), g(t)), \quad g(t_1) = v_1(f(t), g(t)).$$

In virtue of the fact that the determinant of the coefficients of the first degree terms in u_1, v_1 is not 0 (see (4)) we can show that the power series t_1 starts off with a first degree term in t. For suppose it commences with a term of higher degree. The initial term of one of the two right-hand members above will be α, where α is the lowest degree of any term in f or g. But the left-hand members will start off with higher degree terms, which is impossible. Similarly we may rule out the possibility that the initial term in t is of lower degree than the first, by making use of the inverse equations

$$f(t) = u_{-1}(f(t_1), g(t_1)), \quad g(t) = v_{-1}(f(t_1), g(t_1)).$$

Hence t_1 is a power series in t or a fractional power thereof beginning with a term of the first degree.

If α is the degree of the lowest term in f or g (say in f), then from the corresponding equation (the first) we obtain on the left a series in t_1, $at_1^\alpha + \cdots$, and on the right a similar series in t commencing with a term of degree not less than α and therefore of degree precisely α by the above. Extracting αth roots we conclude finally that t_1 can be expressed as an ordinary power series in t with first degree term:

$$t_1 = \varrho^* t + \cdots.$$

Having this explicit form of t in mind, let us compare anew the two members of each of the pair of equations first written. We write

$$f(t) = pt^\alpha + \cdots, \quad g(t) = qt^\alpha + \cdots,$$

so that $|p| + |q| \neq 0$, and obtain

$$p\varrho^{*\alpha} = ap + bq, \quad q\varrho^{*\alpha} = cp + dq.$$

It follows at once that $\varrho^{*\alpha}$ is a root of the characteristic equation, i. e. that $\varrho^{*\alpha} = \varrho$.

If $(0, 0)$ is an 'ordinary point' of the formal curve we have $\alpha = 1$, $\varrho = \varrho^*$.

By successive transformation of the invariant curve by T, we obtain not only t_1 but parameters $t_2, t_3, \ldots$. Likewise by the inverse transformation we obtain parameters $t_{-1}, t_{-2}, \ldots$. These can all be obtained from the series for t_1 by iteration.

§ 17. The formal series for t_k and the formal group.

Since the constant ϱ^* is an αth root of ϱ, it is clear that, if we write $\tau_1(\tau) = t_\alpha(\tau)$, then we have $\tau_1 = \varrho\tau + \cdots$. By iteration τ_k may be defined for all integral values of k. Moreover, the methods used in § 4 serve at once to show that

$$\tau_k = \varrho^k \tau + \sum_{m=2}' \varphi_m^{(k)} \tau^m$$

where $\varphi_m^{(k)}$ is a polynomial in ϱ^k of degree at most m if $\varrho \neq 1$, and a polynomial in k of degree at most $m - 1$ if $\varrho = 1$.

For all integral values of k and l we have obviously

$$\tau_k(\tau_l) = \tau_{k+l}.$$

Therefore, by the lemma of § 7, this holds formally for all real values of k and l.

We write

$$\delta\tau = \frac{d\tau_k}{dk}\Big|_{k=0},$$

and can then show (compare with § 8) that the formal differential equation

$$\frac{d\tau_k}{dk} = \delta\tau(\tau_k)$$

is satisfied, and, together with the initial condition $\tau_0 = \tau$, wholly determines the series for τ_k.

§ 18. The invariant operator $L(u, v)$.

We shall define a second invariant differential operator:

$$L(u, v) = \delta u\, dv - \delta v\, du. \tag{14}$$

It can be immediately verified that, if the variables u, v are changed to $\bar{u}, v$, then $L(u, v)$ becomes $L(\bar{u}, \bar{v})$ multiplied by the Jacobian of $\bar{u}, \bar{v}$ as to u, v. It is also obvious that, if $u = f(t)$, $v = g(t)$ is a formal curve, then $L(u, v)$ is independent of the particular parameter chosen for the curve.

The necessary and sufficient condition for the invariance of a formal curve $u = f(t)$, $v = g(t)$ under T is $L(u, v) = 0$.

By definition of invariance we have for such an invariant curve

$$f(t_1) = u_1(f(t), g(t)), \quad g(t_1) = v_1(f(t), g(t)),$$

and thence for integral values of k

$$f(t_k) = u_k(f(t), g(t)), \quad g(t_k) = v_k(f(t), g(t)).$$

If we take k as an integral multiple $k'\alpha$ of α (§ 17) and write $t = \tau$, $\tau_1 = t_\alpha(\tau)$ (§ 17), we have in particular

$$f(\tau_{k'}) = u_{k'\alpha}(f(\tau), g(\tau)), \quad g(\tau_{k'}) = v_{k'\alpha}(f(\tau), g(\tau)),$$

for integral values of k'.

Let the general series for $u_{k'\alpha}$, $v_{k'\alpha}$, $\tau_{k'}$, be substituted in the last equations. All the coefficients are either polynomials in $\varrho^{k'}$, $\varrho^{-k'}$, k' (case I'), or in $\cos k'\theta$, $\sin k'\theta$, k' (case II'), or in k' (cases II'', III'). Hence, by the lemma of § 7, these equations are identically true from a formal standpoint.

Differentiating formally as to k' and setting $k' = 0$, we get

$$\frac{df}{d\tau}\delta\tau = \alpha\,\delta u(f, g), \quad \frac{dg}{d\tau}\delta\tau = \alpha\,\delta v(f, g),$$

whence at once $L(u, v) = 0$.

Conversely, let us assume that $L(u, v)$ is 0 for a formal curve $u = f(t)$, $v = g(t)$, and let us show that the curve is invariant under T.

In this case we have

$$\varkappa(t)\frac{df}{dt} = \delta u(f, g), \quad \varkappa(t)\frac{dg}{dt} = \delta v(f, g),$$

where $\varkappa$ is the sum of a polynomial in $\frac{1}{t}$ and a power series in t. Now, since δu, δv begin with terms of the first degree or of higher degree, both right-hand members have initial terms of degree at least as high as f or g. On the other hand $\frac{df}{dt}$ and $\frac{dg}{dt}$ are of degree one less than f and g respectively. Hence $\varkappa(t)$ cannot contain negative powers of t or even a constant term. Thus $\varkappa(t)$ is an ordinary power series in t without constant term.

Define t_k by the differential equation

$$\frac{d t_k}{d k} = \varkappa(t_k),$$

and the initial condition $t_0 = t$. Thus t_k is formally determined as a power series in t with coefficients analytic in k.

For example in case I′, δu and δv are given by (see (8))

$$\delta u = u \log \varrho + \cdots, \quad \delta v = - v \log \varrho + \cdots.$$

Hence an inspection of the above equations introducing $\varkappa(t)$ shows that this function possesses a first degree term in t, $\frac{\log \varrho}{\alpha} t$, α an integer.

Write then

$$t_k = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^{(k)} t^m, \quad \varkappa(t) = \frac{\log \varrho}{\alpha} t + \sum_{m=2}^{\infty} \varkappa^{(m)} t^m,$$

and the differential equation gives

$$\frac{d \varphi_1^{(k)}}{d k} = \frac{\log \varrho}{\alpha} \varphi_1^{(k)},$$

$$\frac{d \varphi_2^{(k)}}{d k} = \frac{\log \varrho}{\alpha} \varphi_2^{(k)} + \varkappa^{(2)} [\varphi_1^{(k)}]^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on comparison of terms in $t, t^2, \ldots$ Remembering the initial conditions $\varphi_1^{(0)} = 1$, $\varphi_2^{(0)} = 0, \ldots$, we find

$$\varphi_1^{(k)} = \varrho^{\frac{k}{\alpha}}, \quad \varphi_2^{(k)} = \frac{\varkappa^{(2)} \alpha}{\log \varrho} \left(\varrho^{\frac{2k}{\alpha}} - \varrho^{\frac{k}{\alpha}} \right), \ldots.$$

Thus the successive coefficients are polynomials of increasing degree in $\varrho^{\frac{k}{\alpha}}$.

Likewise in case II′ these coefficients are polynomials of increasing degrees in $\cos \frac{k\theta}{\alpha}$, $\sin \frac{k\theta}{\alpha}$; and in cases II″, III′, polynomials in k only, since here $\varkappa(t)$ starts out with a term of the second degree or higher.

Consider now the formal series $f(t_k)$ and $g(t_k)$. Differentiating and using the definition of t_k, we find

$$\frac{df(t_k)}{dk} = \frac{df(t_k)}{dt_k}\varkappa(t_k) = \delta u(f(t_k), g(t_k)),$$

$$\frac{dg(t_k)}{dk} = \frac{dg(t_k)}{dt_k}\varkappa(t_k) = \delta v(f(t_k), g(t_k)),$$

These series $f(t_k)$ and $g(t_k)$ reduce to $f(t)$ and $g(t)$ for $k = 0$.

Consider next the formal series $u_k(f(t), g(t))$, $v_k(f(t), g(t))$. Differentiating and using (9) we find

$$\frac{d}{dk}[u_k(f(t), g(t))] = \delta u[u_k(f(t), g(t)), \quad v_k(f(t), g(t))],$$

$$\frac{d}{dk}[v_k(f(t), g(t))] = \delta v[u_k(f(t), g(t)), \quad v_k(f(t), g(t))].$$

Also these series reduce to $f(t), g(t)$ for $k = 0$.

Hence, if either pair of series in t be denoted by $p_k(t)$, $q_k(t)$, the differential equations

$$\frac{dp_k}{dk} = \delta u(p_k, q_k), \quad \frac{dq_k}{dk} = \delta v(p_k, q_k),$$

and the initial conditions $p_0 = f(t)$, $q_0 = g(t)$ will be satisfied.

But, just as in an analogous situation earlier, these equations and conditions uniquely determine the series. Hence the two solutions coincide:

$$f(t_k) = u_k(f(t), g(t)), \quad g(t_k) = v_k(f(t), g(t)).$$

Taking $k = 1$, we conclude that the given formal curve is invariant under T.

§ 19. Existence of invariant formal curves.

When a formal power series in u, v without constant term is resolved into its prime factors in the sense of § 11, each such factor evidently corresponds to a formal curve $u = t^n$, $v = S(t)$ where S is a power series in t. When the coördinates of this curve are substituted in the given formal series in u, v, it vanishes identically. Conversely, if the coördinates of a formal curve render such a series equal to 0, then it renders one and only one of the prime factors equal to 0, and this formal curve must be the one corresponding to the factor.

With these facts in mind we may prove:

The totality of formally invariant curves for a conservative transformation T is given by the equation $F = 0$, where F is any invariant series under T.

First, let us take any curve for which $F=0$. Now we have $F(u_k, v_k) = F(u, v)$, and thence, by formal differentiation as to k and taking $k=0$,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial v}\delta v = 0.$$

But we have also

$$\frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0.$$

Combining these equations we find $L(u, v) = 0$. By the preceding paragraph the formal curve is invariant.

Conversely, for any invariant formal curve $u=f(t)$, $v=g(t)$ we have

$$f(t_k) = u_k(f(t), g(t)), \quad g(t_k) = v_k(f(t), g(t)),$$

as we have seen. Hence it follows that

$$F(f(t_k), g(t_k)) = F[u_k(f(t), g(t)), \quad v_k(f(t), g(t))] = F(f(t), g(t)).$$

Now, taking $k=k'\alpha$, $t_\alpha = \tau$, we may regard this equation as holding for all k' (§ 17). Differentiating as to k' and taking $k'=0$, we find

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u}\frac{df}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dg}{d\tau}\right]\delta\tau = 0.$$

Unless $\delta\tau = 0$ we infer that $\frac{dF}{dt} = 0$. But $F(f(t), g(t))$ is a power series in t without constant term. Hence except in this case we have $F(f(t), g(t)) = 0$, as we desire to prove.

However, if we take the equations which state that $u=f$, $v=g$, and its iterates under T coincide (as written above), and differentiate as to k' ($k=k'\alpha$), we find for $k'=0$

$$\frac{df}{d\tau}\delta\tau = \delta u(f, g), \quad \frac{dg}{d\tau}\delta\tau = \delta v(f, g).$$

Hence $\delta\tau$ vanishes formally if and only if $\delta u(f, g)$, $\delta v(f, g)$ vanish. In other words the given curve corresponds to a common factor of δu, δv. But it has been proved (§ 12) that such factors occur to a one higher power in F. Hence we have $F(f(t), g(t)) = 0$ in this case also.

Applying the above condition to F^* (see (13)), we perceive that in case I′ we have two real formally invariant curves so that T is hyperbolic, while in case II′ we have a pair of conjugate imaginary formally invariant curves so that T is elliptic.

§ 20. Invariant point curves.

In an extremely special case the invariant point (0, 0) may not be isolated but may lie on one or more analytic curves of invariant points passing through (0, 0). These curves can be determined as the solutions of the ordinary equations

$$u_1(u, v) = u, \quad v_1(u, v) = v.$$

By iteration we get

$$u_k(u, v) = u, \quad v_k(u, v) = v,$$

which holds along these curves. Differentiating as to k, as we have often done, and setting $k = 0$, we find

$$\delta u = 0, \quad \delta v = 0,$$

along the invariant point curve. In other words the invariant point curves correspond to common factors of δu, δv. According to § 12 this means that the curve corresponds to a multiple factor of F^*.

Conversely, let us assume that F^* has a multiple factor corresponding to a formal curve $u = f(t)$, $v = g(t)$, so that $\delta u = \delta v = 0$ along the curve. By formal integration we get $u_k(f, g) = f$, $v_k(f, g) = g$, and the formal curve is an invariant point curve.

There exist formally invariant point curves if and only if F^* has a multiple factor, and these curves are then analytic curves given by the equations $u_1 = u$, $v_1 = v$.

§ 21. Normal form. Case I′.

Under a formal change of variables from u, v to U, V such as

$$(15) \qquad U = u + \sum_{m+n=2}^{\infty} U_{mn} u^m v^n, \quad V = v + \sum_{m+n=2}^{\infty} V_{mn} u^m v^n,$$

transformations of the type I′, II′, II″, III′ evidently maintain their type, and also remain formally conservative if they are so at the outset.

We propose to develop a normal form for the transformation T' in the cases I', II'. In the other cases there appear to be an infinite number of invariants, and a similar normal form does not exist.

By a formal change of variables (15), *a formally conservative transformation of type I' may be given either the normal form*

$$U_1 = \varrho U e^{cU^l V^l}, \quad V_1 = \frac{1}{\varrho} V e^{-cU^l V^l}, \qquad (c \neq 0), \tag{16}$$

or the form

$$U_1 = \varrho U, \quad V_1 = \frac{1}{\varrho} V. \tag{16'}$$

We propose first to choose U, V so that

$$\delta U = U[1 + f(UV)] \log \varrho, \quad \delta V = -V[1 + g(UV)] \log \varrho,$$

where f and g are power series in their argument UV. More explicitly written, these equations take the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u} \delta u + \frac{\partial U}{\partial v} \delta v &= U[1 + f(UV)] \log \varrho, \\ \frac{\partial V}{\partial u} \delta u + \frac{\partial V}{\partial v} \delta v &= -V[1 + g(UV)] \log \varrho; \end{aligned} \tag{17}$$

recall the equations

$$\delta U = \left.\frac{dU_k}{dk}\right|_{k=0}, \quad U_k = U(u_k, v_k),$$

and similar equations in V.

By the first equation (8) the first degree terms on both sides of the above equations are the same.

Equating coefficient of $u^m v^n$ in these equations, we find

$$(m - n - 1) U_{mn} = P_{mn}, \qquad (m \neq n + 1),$$

$$(m - n + 1) V_{mn} = Q_{mn}, \qquad (n \neq m + 1),$$

$$0 = P_{n+1,n} + f_{2n+1},$$

$$0 = Q_{n,n+1} + g_{2n+1},$$

where P_{mn}, Q_{mn} are polynomials in $U_{\alpha\beta}, V_{\alpha\beta}, f_\gamma, g_\gamma$ with $\alpha+\beta < m+n, \gamma < m+n$, and where f_{2k+1}, g_{2k+1} are the coefficients of $(UV)^k$ in f and g respectively. These equations are manifest as soon as the explicit series for U, V are substituted in (17).

Let us compare second degree terms, so that $m+n=2$. The first two equations determine U_{mn}, V_{mn} for $m+n=2$ uniquely.

Next let us compare third degree terms so that $m+n=3$. Here the quantities U_{mn}, V_{mn}, excepting U_{21}, V_{12}, are determined by the first two equations while f_3, g_3 are determined by the second two equations.

Continuing in this way we determine in succession U_{mn}, V_{mn}, f_p, g_p, save for $U_{21}, V_{12}, U_{32}, V_{23}, \ldots$ which can be taken arbitrarily.

Therefore it is possible to determine formal series U, V so that (17) holds. In order to avoid complexity in our notation let us call these new variables u, v. It may be observed that the set of changes of variables (15) form a group. Accordingly, in accomplishing the desired normalization, we can compound any number of such changes of variables. With this understanding we may write

$$\delta u = u[1+f(uv)] \log \varrho, \quad \delta v = -v[1+g(uv)] \log \varrho.$$

If Q denotes the formal quasi-invariant function, we have by (12)

$$\frac{d}{du}[Qu(1+f)] = \frac{d}{dv}[Qv(1+g)]$$

on substituting in the above values of $\delta u, \delta v$. Here f and g are series in the product uv.

It follows from the equation just written that Q must also be a series in the product uv. Suppose if possible that this is not the case, and let $du^m v^n$ be a term in Q of minimum degree for which $m \neq n$. A term $(m+1)du^m v^n$ will then appear on the left of the equation written. But no other term of equal or lower degree in which the exponents of u, v are unequal can occur on the left inasmuch as terms with unequal exponents are not present in f. A similar term $(n+1)du^m v^n$ will occur on the right. If then the above identity holds we must have $d=0$, contrary to hypothesis.

Thus if we write $z=uv$, and use accents to denote differentiation with respect to z we have easily

$$[Qz(1+f)]' = [Qz(1+g)]'$$

By formal integration we get then $f = g = h$, where h a formal power series in z without constant term. Consequently we have

$$\delta u = u[1 + h(uv)] \log \varrho, \quad \delta v = -v[1 + h(uv)] \log \varrho.$$

When use is made of this fact, the formal differential equations (9) for u_k, v_k take the form

$$\frac{du_k}{dk} = u_k[1 + h(u_k v_k)] \log \varrho, \quad \frac{dv_k}{dk} = -v_k[1 + h(u_k v_k)] \log \varrho.$$

Hence, if we consider the product series $u_k v_k$, we have $\frac{d(u_k v_k)}{dk} = 0$. Noting that we have $u_0 = u$, $v_0 = v$, we conclude $u_k v_k = uv$.

If we substitute this value for $u_k v_k$ in the differential equations, these become

$$\frac{du_k}{dk} - u_k[1 + h(uv)] \log \varrho = 0, \quad \frac{dv_k}{dk} + v_k[1 + h(uv)] \log \varrho = 0.$$

If we multiply these two equations by

$$\varrho^{-(1+h(uv))k}, \quad \varrho^{(1+h(uv))k}$$

respectively, the left-hand members become exact formal derivatives. Integrating formally we find

$$\varrho^{-(1+h(uv))k}\, u_k = \text{const.}, \quad \varrho^{(1+h(uv))k}\, v_k = \text{const.},$$

where the constants are power series in u, v with coefficients independent of k. Employing the initial conditions $u_0 = u$, $v_0 = v$, we get the following explicit formulas

$$u_k = \varrho^k u e^{h(uv)k}, \quad v_k = \varrho^{-k} v e^{-h(uv)k},$$

for the given transformation after the change of variables determined earlier.

If h vanishes identically, a reduction to the normal form (16′) has been effected.

In the contrary case we may write

$$h(uv) = cu^l v^l + \cdots.$$

Dividing by $c \neq 0$ and extracting lth root, we find

$$\sqrt[l]{\frac{h(uv)}{c}} = uvp(uv)$$

when $p(uv)$ is a power series in uv with constant term 1. If we define a further change of variables (15)

$$U = u\sqrt{p(uv)}, \quad V = v\sqrt{p(uv)},$$

we obtain immediately the first normal form (16).

The normal forms are clearly of integrable type with UV invariant.

It is apparent that, if T is given by real series, the normalizing series U, V can also be taken real.

§ 22. Generality of normal form. Case I'.

The normalizing series U, V were not uniquely determined. The most general set U^*, V^* of such series is related to any particular set U, V as follows:

The most general normalizing variables U^*, V^* in case I' have the explicit form

$$U^* = U e^{\lambda(UV)}, \quad V^* = V e^{-\lambda(UV)}, \tag{18}$$

where λ is an arbitrary power series in UV without constant term, and U, V are any particular set of normalizing series.

Clearly we can pass directly from U, V to U^*, V^* by a change of variables (15). Since the invariant curves $U = 0$, $V = 0$ are carried into $U^* = 0$, $V^* = 0$, we infer further

$$U^* = U(1 + \cdots), \quad V^* = V(1 + \cdots).$$

Now the products UV, U^*V^* are invariant under T. Hence (§ 14) U^*V^* is given by a power series in UV, whose initial term is UV of course. By the aid of this result we may conclude that in the series for U^*, V^* only terms in UV occur in the parentheses.

In fact, if we replace U, V, U^*, V^* by U_1, V_1, U_1^*, V_1^* respectively, the first of these equations gives

$$\varrho U^* e^{c^* U^{*l^*} V^{*l^*}} = \varrho U e^{c U^l V^l} (1 + \cdots).$$

On the left the exponential factor is a power series in UV with constant term 1 inasmuch as $U^* V^*$ is given by a power series in UV without constant term. Suppose if possible that a term $d\, U^{m+1} V^n\, (m \neq n)$ occurs in the series for U^* and let this term be of the minimum degree. On the left of the equation last written the corresponding term of this type is $\varrho\, d\, U^{m+1} V^n$, whereas on the right it is $\varrho^{m+1-n} d\, U^{m+1} V^n$. The two terms to be compared cannot be equal so that a contradiction results. In this way the parenthesis in the series for U^*, and likewise that in the series for V^*, are seen to only contain terms in UV.

We may now write

$$U^* = U(1+\lambda'(UV)), \quad V^* = V(1+\lambda''(UV)),$$

where λ', λ'' are power series without constant terms.

Replacing U, V, U^*, V^* by U_1, V_1, U_1^*, V_1^* respectively here, we get

$$\varrho\, U^* e^{c^* U^{*l^*} V^{*l^*}} = \varrho\, U e^{c U^l V^l}[1 + \lambda'(UV)],$$

and also a companion equation. Bearing in mind the form of U^*, we conclude at once $c^* = c$, $l^* = l$ and then $U^* V^* = UV$. This yields the relation stated between U^*, V^* and U, V, as well as the additional result:

The integer l and constant c are independent of the normalizing series employed.

Thus l and c are the only invariants. In the case of the normal form (16′) we write $l = \infty$, $c = 0$ for convenience.

Conversely, it is at once shown that any change of variables from U, V to U^*, V^* yields normalizing variables.

§ 23. Normal form. Case II′.

It has appeared earlier that cases I′ and II′ are of the same formal character in the complex domain. This is evident if variables

$$\bar{u} = u + \sqrt{-1}\, v, \quad \bar{v} = u - \sqrt{-1}\, v$$

are introduced in case II′, when we have

$$\bar{u}_1 = \varrho \bar{u} + \cdots, \quad \bar{v}_1 = \frac{1}{\varrho} \bar{v} + \cdots, \quad (\varrho = e^{\sqrt{-1}\,\theta}).$$

Moreover in case II′ we have $\varrho^k \neq 1$ for any integer $k \neq 0$. Consequently the same formal manipulation of the variables $\bar{u}, \bar{v}$ is possible as for u, v. Moreover

changes of variables (15) of u, v yield changes of variables (15) of $\bar{u}, \bar{v}$. Keeping these facts in mind, we deduce without difficulty the following important result:

By a formal change of variables (15), a formally conservative transformation of type II' may be given either the normal form

$$(19)\qquad \begin{aligned} U_1 &= U \cos(\theta + c(U^2+V^2)^l) - V \sin(\theta + c(U^2+V^2)^l), \\ V_1 &= U \sin(\theta + c(U^2+V^2)^l) + V \cos(\theta + c(U^2+V^2)^l), \end{aligned}$$

or the form

$$(19')\qquad U_1 = U\cos\theta - V\sin\theta, \quad V_1 = U\sin\theta + V\cos\theta.$$

Also, on account of the possibility of preserving the conjugate relation of the series $\bar{u}, \bar{v}$ employed at every step of the formal work (so that u, v are real series), we conclude that, if T is given by real series, the normalizing series U, V can also be taken real.

§ 24. Generality of normal form. Case II'.

Likewise in analogy with § 22 for case I' we find:

The most general normalizing variables U^*, V^* in case II' have the explicit form

$$(20)\qquad \begin{aligned} U^* &= U\cos\lambda(U^2+V^2) - V\sin\lambda(U^2+V^2), \\ V^* &= U\sin\lambda(U^2+V^2) + V\cos\lambda(U^2+V^2), \end{aligned}$$

where λ is an arbitrary power series in U^2+V^2 without constant term, and U, V are any particular set of normalizing series.

§ 25. The integrable case.

The formal series u_k, v_k used in the preceding part of the paper may converge. Suppose that these series converge uniformly for $|u|, |v|, |k|$ sufficiently small. By the definition of $\delta u, \delta v$ as derivatives of u_k, v_k respectively as to k for $k=0$, we see that in this case $\delta u, \delta v$ are given as convergent series. Consequently the formal differential equations (9) are of the ordinary type with δu, δv analytic functions of u, v vanishing for $u=v=0$. It follows that u_k, v_k converge uniformly for $|k| \leq K$, an arbitrary positive quantity, if $|u|, |v|$ are sufficiently small. It is then that we speak of u_k, v_k as convergent series.

A necessary and sufficient condition for the convergence of the series u_k, v_k (as specified) is that the corresponding conservative transformation T be integrable.

The fact that the integrability of T is necessary is proved at once. In the convergent case the formal differential equations are of the ordinary type as noted above. Consequently the formally invariant function F^* defined by means of the equations (11) is an actual invariant function. That is, T is integrable.

To prove the sufficiency is not such an easy task. Let F' be the given invariant analytic function. Every invariant series can be expressed as a power series in F' or in fractional powers thereof (§ 14). In the latter case F' is an exact formal qth power if the qth root is to be extracted. And furthermore this root is of course also given by a convergent invariant series. Hence, without loss of real generality, we may assume that the invariant formal series F^* is a formal power series in F' i. e. $F^* = \varphi(F')$.

Now write

$$Q(u'_k, v'_k)\frac{du'_k}{dk} = \frac{\partial F'(u'_k, v'_k)}{\partial v'_k}, \quad Q(u'_k, v'_k)\frac{dv'_k}{dk} = -\frac{\partial F'(u'_k, v'_k)}{\partial u'_k},$$

where Q is a quasi-invariant function belonging to the conservative transformation T. The differential equations so defined, joined with the initial conditions $u'_0 = u'$, $v'_0 = v'$ determine convergent power series u'_k, v'_k which converge uniformly for $|k| < K$ (K arbitrary) if $|u'|$, $|v'|$ are sufficiently small. These functions define a conservative, integrable transformation T'.

Furthermore, T' will be of the same type I', II', II'' or III' as T, except possibly that when T is of type II'', T' may be of types I', II' or III'. For example, if T is of type I' then F^* has an initial term $uv \log \varrho$ (see (8)) of the second degree. Hence F' begins with terms of at most the second degree. But the initial terms cannot be of the first degree because of the relation $F^* = \varphi(F')$. Hence we have $F' = cuv + \cdots$, and, by introducing a constant factor in F', we may take $c = \log \varrho$. An inspection of the initial terms of the transformation T' shows then that $u'_1 = \varrho u' + \cdots$, $v'_1 = \frac{1}{\varrho} v' + \cdots$, as desired. An entirely similar argument holds in the cases II', III'.

In all cases it is clear that either we can take the initial terms of F^* to coincide exactly with those of F', or these terms are of higher degree in F^* than in F'. In the first case $\frac{d\varphi}{dF'} = 1$ for $F' = 0$, while in the second case $\frac{d\varphi}{dF'} = 0$ for $F' = 0$.

Consider the formal series

$$u'_{k'}(u', v'), \quad v'_{k'}(u', v'),$$

where $k' = k\frac{d\varphi}{dF'}$. It is necessary to elaborate further what is meant.

Take case I' for example. Here u'_k, v'_k are power series in u', v' with coefficients polynomial in $\varrho^k, \varrho^{-k}, k$. Since

$$\frac{d\varphi}{dF'} = 1 + aF' + \cdots,$$

we have

$$\varrho^{k'} = \varrho^k(1 + aF'k\log\varrho + \cdots).$$

That is, $\varrho^{k'}$ can be written as ϱ^k multiplied by a power series in u', v' with coefficients polynomial in k. A similar remark is true of $\varrho^{-k'}$ and k'. When these series are substituted in $u'_{k'}(u', v'), v'_{k'}(u', v')$, and the finite number of terms of any particular degree in u', v' are collected, new power series in u', v' with coefficients polynomial in $\varrho^k, \varrho^{-k}, k$ are formed. It is these series which we designate by $u'_{k'}(u', v'), v'_{k'}(u', v')$.

Similarly in all of the other cases the new series $u'_{k'}, v'_{k'}$ are of the same form as the series for u_k, v_k.

Now we have evidently

$$\frac{du'_{k'}}{dk} = \frac{du'_{k'}}{dk'}\frac{d\varphi}{dF'}$$

by a rule of formal differentiation which evidently applies to each constituent element of $u'_{k'}$ and thus to the entire series. A similar result holds for $v'_{k'}$. Making use of these results, and also of the defining differential equations for $u'_{k'}, v'_{k'}$ we find

$$Q\frac{du'_{k'}}{dk} = \frac{\partial F'}{\partial v'_{k'}}\frac{d\varphi}{dF'}, \quad Q\frac{dv'_{k'}}{dk} = -\frac{\partial F'}{\partial u'_{k'}}\frac{d\varphi}{dF'},$$

where the arguments in Q, F' are understood to be $u'_{k'}, v'_{k'}$. But, from the relation $F^* = \varphi(F')$, it is clear that these differential equations for $u'_{k'}, v'_{k'}$ are the same as those for u_k, v_k. Also these two pairs of functions reduce to u', v' and u, v respectively for $k = 0$.

Since such formal differential equations and conditions determine a unique power series in u, v with coefficients functions of k of the stated type, we obtain

the formal identities

$$u'_{k'}(u, v) = u_k(u, v), \quad v'_{k'}(u, v) = v_k(u, v).$$

In particular, the above relation holds for $k = 1$ and gives

$$u'_{k'}(u, v) = u_1(u, v), \quad v'_{k'}(u, v) = v_1(u, v),$$

where now $k' = \dfrac{d\varphi}{dF'}$.

The noteworthy feature of these equations is that the only possible divergent element appearing is k'.

Now write $k' = \dfrac{d\varphi(0)}{dF'} + k''$. Then $u'_{k'}(u, v)$, $v'_{k'}(u, v)$ become convergent power series in u, v, k'' for sufficiently small values of these variables. A formal power series in u, v without constant term satisfying the two equations above is $k'' = \dfrac{d\varphi(F')}{dF'} - \dfrac{d\varphi(0)}{dF'}$. Since these equations are of the ordinary analytic type, k'' is a convergent power series. Consequently $\dfrac{d\varphi(F')}{dF'}$ is a convergent series, and, since F' is also, it follows that $\dfrac{d\varphi(z)}{dz}$ is a convergent power series in z. Finally then φ is a convergent series.

It follows that F^* is given by a convergent series in the integrable case and thus, by the differential equations (9), that the series u_k, v_k are convergent.

The simplicity of the integrable case is sufficiently evident from the following fact:

In the integrable case explicit formulas for u_k, v_k are at hand, namely

$$(21) \qquad F^*(u_k, v_k) = F^*(u, v), \quad k = \int_{u,v}^{u_k, v_k} \frac{Q\,du}{\frac{\partial F^*}{\partial v}} = -\int_{u,v}^{u_k, v_k} \frac{Q\,dv}{\frac{\partial F^*}{\partial u}},$$

where the integrals are taken along the curve $F^* = const.$

The normal forms (16), (16′) and (19), (19′), for cases I′ and II′ respectively, are integrable. If these normal forms can be obtained by means of a change of variables (15) in which the series U, V are convergent, the given transformation T is integrable.

Conversely, suppose T to be integrable and of type I′. The series F^* converges and by (8) can be written $UV \log \varrho$, where U, V are convergent series

of the form (15). If we introduce these new variables, which we call u, v for brevity, then uv is an invariant function.

For the integrable transformation T in these variables, the convergent series $\delta u, \delta v$ must be of the forms $up \log \varrho$ and $-vp \log \varrho$, where p is a convergent series with constant term 1. In fact $v\delta u + u\delta v$ vanishes and the initial terms of δu and δv are $u \log \varrho$ and $-v \log \varrho$ respectively.

If a further actual change of variables (15) can be made which gives T the form

$$U_1 = \varrho U e^{h(UV)}, \quad V_1 = \frac{1}{\varrho} V e^{-h(UV)},$$

then an additional actual change of variables as in § 21 yields the desired normal form. But U_1, V_1 have this form if and only if

$$\delta U = U(\log \varrho + h(UV)), \quad \delta V = -V(\log \varrho + h(UV)),$$

i. e. if

$$\left(u\frac{\partial U}{\partial u} - v\frac{\partial U}{\partial v}\right) p \log \varrho = \ U \ (\log \varrho + h(UV)),$$

$$\left(u\frac{\partial V}{\partial u} - v\frac{\partial V}{\partial v}\right) p \log \varrho = - V(\log \varrho + h(UV)).$$

We have then to find convergent series U, V, h which satisfy this pair of equations, in order to establish the proposition under consideration.

It is sufficient to satisfy the equations

$$\left(u\frac{\partial U}{\partial u} - v\frac{\partial U}{\partial v}\right) p \log \varrho = \ U \ (\log \varrho + \varphi(uv)),$$

$$\left(u\frac{\partial V}{\partial u} - v\frac{\partial V}{\partial v}\right) p \log \varrho = - V(\log \varrho + \varphi(uv)),$$

with convergent series U, V, φ, provided that U and V have initial terms u and v respectively. For, multiplying the first equation by V, the second by U, adding and integrating, we conclude that UV is a function of the product uv alone. Hence we have $UV = uv + \cdots$. Therefore uv can be expressed inversely as a power series in UV, and $\varphi(uv) = h(UV)$ where h is convergent.

But, by the same equations, U and V contain no terms in v and u alone respectively, since p has a constant term 1. Consequently we may write

$$U = u e^{M}, \quad V = v e^{-N},$$

where M and N are convergent power series in u, v without constant terms. The equations above take the form

$$u \frac{\partial M}{\partial u} - v \frac{\partial M}{\partial v} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{\varphi(uv)}{\log \varrho}\right) - 1\,.$$

$$u \frac{\partial N}{\partial u} - v \frac{\partial N}{\partial v} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{\varphi(uv)}{\log \varrho}\right) - 1\,.$$

If convergent power series solutions M, N and φ without constant terms can be found our proof will be complete.

We observe in the first place that there are no terms in u, v with equal powers of u and v on the left. Hence, for any conceivable solution, the series development of

$$\frac{1}{p}\left(1 + \frac{\varphi(uv)}{\log \varrho}\right) - 1$$

contains no similar terms. But this property of a series is not modified if it is multiplied by a series in uv only but having a constant term. Hence

$$\frac{1}{p} - \frac{\log \varrho}{\log \varrho + \varphi(uv)}$$

is a similar series. The second term must consist precisely of those terms $p'(uv)$ in uv alone found in $\frac{1}{p}$, and we have

$$\varphi = \frac{1 - p}{p} \log \varrho\,.$$

Thus the only possible formal series φ is convergent.

When this particular φ is substituted, the right-hand members above become power series in u, v without terms having equal exponents. Write then

$$M = N = \sum_{m+n=1}' P_{mn} u^{m} v^{n}, \qquad (m \neq n).$$

The equations for the formal determination of the coefficients P_{mn} show that these are uniquely determined and not greater numerically than the corresponding coefficients in the right-hand members. Thus the desired convergent solution M, N, φ is obtained.

An entirely similar discussion can be made in case II'.

In the integrable cases I', II', and then only, the normal forms (16), (16') *and* (19), (19') *can be obtained by a change of variables* (15), *where U, V are convergent series.*

§ 26. The non-integrable case and the integrable case.

Let two transformations T and T' be said to *osculate to the μth order if* $u_1 - u'_1$ and $v_1 - v'_1$ are given by series beginning with terms of at least the $(\mu + 1)$th degree; T_k and T'_k will also osculate to the μth order for any integral value of k. It is clear that the formal series for $\delta u, \delta v$ and $\delta u', \delta v'$ agree to terms of the $(\mu + 1)$th degree. Conversely, if $\delta u, \delta v$ and $\delta u', \delta v'$ agree out to terms of the $(\mu + 1)$th degree, then T and T' osculate to the μth order.

Let T be a given conservative transformation of types I', II', II'' or III' with a quasi-invariant function Q and a formally invariant series F^*. If $\bar{Q}$ and $\bar{F}^*$ are convergent series agreeing with Q and F^* to terms of the $(\mu + 1)$th and $(\mu + 2)$th degrees respectively, then there will exist a corresponding integrable transformation $\bar{T}$ with a quasi-invariant function $\bar{Q}$ and an invariant function $\bar{F}^*$, which T osculates to the μth order.

The transformation $\bar{T}$ is evidently that defined by the equations

$$\bar{Q}\frac{du_k}{dk} = \frac{\partial \bar{F}^*}{\partial v_k}, \quad \bar{Q}\frac{dv_k}{dk} = -\frac{\partial \bar{F}^*}{\partial u_k},$$

with initial conditions $u_0 = u,\ v_0 = v$.

Chapter II. Hyperbolic invariant points.

§ 27. The analytic invariant curves in case I'.

In the non-integrable as well as in the integrable case I' the two real formally given invariant curves correspond to actual curves. A proof of this fact was first given by Poincaré (loc. cit.) and later by Hadamard.[1] Our proof will be of a different character, and involves the hypothesis that T is conservative. A similar method will be used later by us in treating more general cases.

[1] *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles, Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 29, 1901.

The two formally invariant curves in case I' may either be obtained from the equation $F^* = 0$ or from the equations $U = 0$, $V = 0$ where U, V are the normalizing variables of § 21. In fact, when the transformation is in the normal form, these equations yield the formally invariant curves.

In case I' the two real formally invariant curves give two analytic invariant curves through the invariant point.

We commence our proof by choosing variables which osculate the normalizing variables U, V to the μth order ($\mu \geq 2$). According to § 21 we have then

$$u_1 = \varrho u e^{cu^l v^l} + \omega(u, v), \quad v_1 = \frac{1}{\varrho} v e^{-cu^l v^l} + \eta(u, v),$$

where ω, η are convergent power series beginning with terms of the $(\mu + 1)$th degree or of higher degree.

Our proof will consist of the following three steps:

(1) the limits $\lim_{k=\infty} u_k(\varrho^{-k}t, 0)$, $\lim_{k=\infty} v_k(\varrho^{-k}t, 0)$ exist as formal power series $u^*(t)$, $v^*(t)$, and yield a formally invariant curve;

(2) $u_k(\varrho^{-k}t, 0)$, $v_k(\varrho^{-k}t, 0)$ are dominated by fixed convergent power series in t for all k;

(3) and hence these series converge uniformly to limiting functions of t for $|t|$ sufficiently small, namely to u^*, v^* respectively, which are thus the coordinates of the invariant curve $V = 0$.

A similar treatment of the invariant curve $U = 0$ can be based on the inverse transformation T_{-1}.

Proof of (1).

We have directly

$$u_k = \varrho^k u e^{ku^l v^l} + \omega(u, v, k), \quad v_k = \varrho^{-k} v e^{-ku^l v^l} + \eta(u, v, k),$$

where $\omega(u, v, k)$, $\eta(u, v, k)$ are convergent power series beginning with terms of the $(\mu + 1)$th or higher degree. Furthermore, the first term on the right-hand side of either equation has evidently the property that when expanded in power series in u, v the coefficient of a term of the mth degree is linear in ϱ^k or ϱ^{-k} and polynomial in k of degree less than the degree of the term. But u_k, v_k have the property that the coefficient of $u^m v^n$ is a polynomial in ϱ^k, ϱ^{-k}, k of degree at most $m + n$ (§ 4). Therefore the same is true of $\omega(u, v, k)$, $\eta(u, v, k)$.

Thus we obtain at once

$$u_k(\varrho^{-k}t, 0) = t + \sum_{n=\mu+1}^{\infty} p^{(n)}(\varrho^{-k}, k) t^n, \quad v_k(\varrho^{-k}t, 0) = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} q^{(n)}(\varrho^{-k}, k) t^n,$$

where $p^{(n)}, q^{(n)}$ are polynomials in ϱ^{-k}, k, and where every term involving k is affected with a multiplier ϱ^{-k} raised to a positive power.

It is thus seen that, inasmuch as $\varrho > 1$, each coefficient of the series for $u_k(\varrho^{-k}t, 0)$ and $v_k(\varrho^{-k}t, 0)$ approaches a limiting value as k becomes infinite. In other words there exist limiting formal series u^*, v^*. Clearly u^* is given by a series with first term t and following terms of degree at least $\mu + 1$, while v^* begins with a term of degree not less than $\mu + 1$.

Now we have the formal identities symbolized by

$$T(u_k(\varrho^{-k}t, 0), v_k(\varrho^{-k}t, 0)) = (u_{k+1}(\varrho^{-k-1}t', 0), v_{k+1}(\varrho^{-k-1}t', 0)),$$

where t' stands for ϱt. By allowing k to become infinite we obtain the identities symbolized by

$$T(u^*(t), v^*(t)) = (u^*(\varrho t), v^*(\varrho t)).$$

This is precisely the condition that $u = u^*(t)$, $v = v^*(t)$ be a formally invariant curve under T. The parameter t on the curve goes over into ϱt.

Proof of (2).

To establish (2) we begin by observing that, inasmuch as $u_k(u, v), v_k(u, v)$ are computed by successive substitutions, every coefficient in these series will certainly become positive, and as large numerically as it is originally, if u_1, v_1 are replaced by any series in u, v with each coefficient positive or zero and as large numerically as the like coefficient in u_1, v_1. Such series can be taken of the form

$$\varrho u + \frac{K(u+v)^2}{1 - L(u+v)}, \quad \varrho v + \frac{K(u+v)^2}{1 - L(u+v)},$$

provided that K and L are sufficiently large positive constants.[1]

Hence when we compute $u_k(u, v), v_k(u, v)$ for $u = \varrho^{-k}t$, $v = 0$, taking u_1, v_1 to be these modified series, we obtain power series in t which have positive coefficients greater than originally and so dominate the earlier series. Again these series will certainly be dominated by the sum

$$u_k(\varrho^{-k}t, 0) + v_k(\varrho^{-k}t, 0),$$

where u_1, v_1 are the dominating series exhibited above.

[1] The linear terms taken are clearly large enough. The coefficients of $u^m v^n$ $(m + n \geq 2$ in either series is at least as large as KL^{m+n-2}, which evidently exceeds numerically the coefficient of $u^m v^n$ in u_1 or v_1 if K, L be chosen sufficiently large to begin with.

The sum $\sigma_k = u_k + v_k$ obeys the law of formation

$$\sigma_{k+1} = \varrho \sigma_k + \frac{K \sigma_k^2}{1 - L \sigma_k}$$

with $\sigma_0 = \sigma = u + v$.

But the sequence σ_k is itself obtained by the method of successive substitution. Therefore the dominating series σ_k is increased if we take

$$\sigma_1 = \frac{\varrho \sigma}{1 - M \sigma},$$

provided we take M to be positive and as large as $\frac{K}{\varrho}$ and L.

Under these circumstances we get the following general formula for σ_k:

$$\sigma_k = \frac{\varrho^k \sigma}{1 - M \frac{\varrho^k - 1}{\varrho - 1} \sigma}.$$

The corresponding series in t is then

$$\frac{t}{1 - M \frac{1 - \varrho^{-k}}{\varrho - 1} t},$$

which is dominated for all k by the convergent series

$$\frac{t}{1 - \frac{M t}{\varrho - 1}}.$$

Hence this same series dominates the original series $u_k(\varrho^{-k} t, 0)$, $v_k(\varrho^{-k} t, 0)$ for all positive integral values of k. Q. E. D.

Proof of (3).

With the aid of (1) and (2), established above, we can at once show that the power series $u_k(\varrho^{-k} t, 0)$, $v_k(\varrho^{-k} t, 0)$ must be approaching a limiting pair of functions uniformly for $|t|$ sufficiently small.

To this end we choose k so large that all of the coefficients up to the mth in both series (m arbitrary) differ by less than an arbitrarily assigned positive ε from their limiting values, which exist by our result (1). The sum of these m terms never varies for greater k by more than a fixed ε' if $|t|$ be restricted.

But the remaining terms cannot exceed the sum of the corresponding terms of the fixed dominating series with t replaced by $|t|$. Hence the sum of these terms is arbitrarily small if m is sufficiently large.

The fact of uniform convergence is evident.

Thus $u^*(t)$, $v^*(t)$ are not only formal series but these series converge to actual analytic functions which we denote by $u^*(t)$, $v^*(t)$. Consequently we have an analytic invariant curve $u = u^*(t)$, $v = v^*(t)$. Since $u^*(t)$ begins with a term t while $v^*(t)$ begins with a term of degree at least $\mu + 1$, this invariant curve has contact of order μ at least with the u-axis at the invariant point, and corresponds to the invariant curve $V = 0$. The parameter change under T along the curve is $t_1 = \varrho t$.

Evidently the existence of these two analytic invariant curves $U = 0$, $V = 0$ establishes the fact that the invariant point is unstable in case I'.

§ 28. A general property in case I'.

Introduce new variables of the type (15)

$$U = u - \varphi(v), \quad V = v - \psi(u),$$

where $u = \varphi(v)$ and $v = \psi(u)$ are the analytic invariant curves of the preceding section. In the UV-plane the invariant curves are the axes. For the sake of brevity of notation we will let u, v denote any set of variables which make the axes and the invariant curves coincide.

When such variables have been selected it is clear that $u_1 = 0$ if $u = 0$, and that $v_1 = 0$ if $v = 0$. Hence we have

$$u_1 = u\,(\varrho + \cdots), \quad v_1 = v\left(\frac{1}{\varrho} + \cdots\right).$$

From this form of T we infer at once

$$\varrho - \varepsilon < \frac{u_1}{u} < \varrho + \varepsilon, \quad \frac{1}{\varrho} - \varepsilon < \frac{v_1}{v} < \frac{1}{\varrho} + \varepsilon$$

for points near $(0, 0)$. Here ε is an arbitrarily small positive quantity. Thus u increases numerically and v decreases numerically upon iteration of T, in such wise that the following result is obvious.

If the invariant curves are taken as the axes in case I' by means of a preliminary choice of variables (15), *every point of the region* $u^2 + v^2 \leq \delta^2$ *with* $u \neq 0$ *is*

carried out of the region by iteration of T, while every point $v \neq 0$ is carried out of the region by iteration of T_{-1}. The excluded points of the axes approach (0, 0) *under the same conditions.*

These considerations show that there can exist no further invariant curves through (0, 0) besides the two analytic curves above obtained.

§ 29. On the invariant series in case I′.

The treatment of invariant points in case I′ as given above is sufficient for the later parts of the paper. Nevertheless, there remains open the question of the actual existence of divergent formal series F^* in case I′. Unfortunately I have not been able to answer this question. In the present paragraph upper limits for the coefficients of a particular invariant formal series are obtained.

If the invariant curves are taken as the axes in case I′ by means of a preliminary choice of variables (15) *and if F denotes the invariant formal series having no terms with equal exponents in u, v save uv* $\log \varrho$, *then the coefficient of $u^m v^n$ in F does not numerically exceed $C_{mn}\varrho^{2mn}$, where $C_{mn} > 0$ is the coefficient of $u^m v^n$ in a convergent power series.*

Before entering upon the proof of this statement, we note that *in a series F with coefficients so restricted the terms in any power of u or of v form a convergent series.*

There exists such an invariant series F, for, by forming $\varphi(F^*)$ as a power series in F^* beginning with a term F^*, we can eliminate the terms with equal exponents in F. Since the most general invariant series is a power series in F^* in case I′, it follows that this particular series F is uniquely determined by the given condition.

In order to effect a proof of the italicized statement we first write the equation $F(u_1, v_1) = F(u, v)$ in the form

$$F\left(u_1\left(\frac{u}{\varrho}, \varrho v\right),\ v_1\left(\frac{u}{\varrho}, \varrho v\right)\right) = F\left(\frac{u}{\varrho}, \varrho v\right),$$

obtained by replacing u, v by $\frac{u}{\varrho}$, ϱv respectively. We have

$$u_1\left(\frac{u}{\varrho}, \varrho v\right) = up, \quad v_1\left(\frac{u}{\varrho}, \varrho v\right) = vq,$$

where p and q are convergent power series in u and v with constant term 1. The equation above may be written

$$F\left(\frac{u}{\varrho}, \varrho v\right) = F(up, vq).$$

Likewise from the equation $F(u_{-1}, v_{-1}) = F(u, v)$ we obtain an equation

$$F\left(\varrho u, \frac{v}{\varrho}\right) = F(ur, vs),$$

where r and s are convergent power series in u, v with constant term 1.

If F_{mn} denotes the coefficient of $u^m v^n$ in F so that $F_{11} = \log \varrho$, $F_{20} = F_{02} = 0$, there results, by a comparison of coefficients in these two equations,

$$F_{mn}(\varrho^{n-m} - 1) = P_{mn}, F_{mn}(\varrho^{m-n} - 1) = Q_{mn},$$

where P_{mn}, Q_{mn} are linear homogeneous expressions in $F_{\alpha\beta}$ with $\alpha \leq m$, $\beta \leq n$, $\alpha + \beta < m + n$. The coefficients of $F_{\alpha\beta}$ in P_{mn} are polynomials in the coefficients of the series p, q with positive integral coefficients, while the coefficients of $F_{\alpha\beta}$ in Q_{mn} are similar polynomials in the coefficients of the series r, s. Combining the above equations we obtain

$$F_{mn}(\varrho^{n-m} + \varrho^{m-n} - 2) = P_{mn} + Q_{mn}.$$

For $m \neq n$ the coefficient of F_{mn} is positive.

Suppose that p, q, r, s are replaced by a single dominating series, say

$$\frac{1}{1 - A(u+v)}.$$

Then P_{mn}, Q_{mn} takes a common form R_{mn}, and the modified equations

$$F_{mn}(\varrho^{n-m} + \varrho^{m-n} - 2) = 2R_{mn}, \qquad (m \neq n),$$

define new positive quantities F_{mn} for $m \neq n$, at least as large as before in absolute magnitude.

Along with these equations we consider the equations

$$G_{mn}(\varrho^{m+n} - 1) = R_{mn}, \qquad (m + n > 3),$$

in which the arguments F in R_{mn} are replaced by G. These equations determine G_{mn} for $m+n=3$, $m+n=4, \ldots$, in succession, provided that we take $G_{11}=\log \varrho$, $G_{20}=G_{02}=0$. These differ from the equations determining the modified values F_{mn} only in that the divisors $\frac{1}{2}(\varrho^{n-m}+\varrho^{m-n}-2)$ are replaced by the larger divisors $\varrho^{m+n}-1$. Consequently we have

$$\frac{F_{mn}}{G_{mn}} < \prod \frac{\varrho^{m'+n'}-1}{\frac{1}{2}(\varrho^{n'-m'}+\varrho^{m'-n'}-2)}.$$

where the values m', n' written are for all the divisors explicitly entering into some one term of the complete expression for F_{mn}.

Now take these divisors in order beginning with $m'=m$, $n'=n$. The next divisor has $m' \leqq m$, $n' \leqq n$, $m'+n' < m+n$, and in general m', n' do not increase while $m'+n'$ decreases by at least unity at each stage.

For $m' > n'$ we have

$$\frac{\varrho^{m'+n'}-1}{\varrho^{n'-m'}+\varrho^{m'-n'}-2} = \frac{\varrho^{m'+n'}-1}{\varrho^{m'-n'}(1-\varrho^{m'-n'})^2} < \frac{\varrho^{2n'}}{\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^2},$$

and there is a symmetrical inequality which holds for $n' > m'$. Let us replace the factors above by these larger factors. If $m > n$ a superior limit for the product Π is therefore obtained by making m' diminish by unity successively and keeping $n'=n$ until we have $m'=n+1$, and thereafter decreasing n' and m' alternately by 1. Hence the product of the factors is less than

$$2^{m+n}\frac{\varrho^{2n(m-n)}\varrho^{2(n-1)}\varrho^{2(n-2)}\cdots 1}{\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^{2(m+n)}}$$

and thus less than

$$\frac{2^{m+n}\varrho^{2nm}}{\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^{2(m+n)}}.$$

Thus we have

$$|F_{mn}| < \frac{2^{m+n}G_{mn}}{\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^{2(m+n)}}\varrho^{2nm}$$

for $m > n$, with the same inequality holding for $n > m$.

It is clear therefore that $|F_{mn}|$ is restricted by an inequality of the type stated if the series

$$G = \sum G_{mn} u^m v^n,$$

converges.

The coefficients G_{mn} and G_{nm} are equal so that $G_{mn} + R_{mn}$ is the coefficient of $u^m v^n$ in either

$$G\left(\frac{u}{1 - A(u+v)}, \frac{v}{1 - A(u+v)}\right) \text{ or } G\left(\frac{v}{1 - A(u+v)}, \frac{u}{1 - A(u+v)}\right).$$

Moreover, it follows also from the equations of definition of G_{mn} that the difference

$$G(\varrho u, \varrho v) - \frac{1}{2}\left[G\left(\frac{u}{1 - A(u+v)}, \frac{v}{1 - A(u+v)}\right) + G\left(\frac{v}{1 - A(u+v)}, \frac{u}{1 - A(u+v)}\right)\right],$$

considered as a formal series, has no terms in $u^m v^n$ for $m + n \geqq 3$, and so reduces to

$$(\varrho^2 - 1)\, uv \log \varrho.$$

Furthermore, G is determined formally by this property.

If we replace this last difference by

$$\frac{1}{2}(\varrho^2 - 1)(u+v)^2,$$

which dominates it, a modified G series is obtained, satisfying the equation

$$G(\varrho u, \varrho v) = \frac{1}{2}\left[G\left(\frac{u}{1 - A(u+v)}, \frac{v}{1 - A(u+v)}\right) + G\left(\frac{v}{1 - A(u+v)}, \frac{u}{1 - A(u+v)}\right)\right] + \\ + \frac{1}{2}(\varrho^2 - 1)(u+v)^2,$$

and certainly dominating the former G series. This functional equation wholly determines the new series.

But the functional equation

$$f(\varrho z) = f\left(\frac{z}{1 - Az}\right) + \frac{1}{2}(\varrho^2 - 1) z^2$$

admits of an analytic solution, namely

$$\frac{\varrho^2-1}{2\varrho^2} z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^{2n}}{\left(1-\frac{1-\varrho^{-n}}{\varrho-1} A z\right)^2}.$$

It follows that $G(u, v) = f(u+v)$ gives the solution of the modified equation for G, and thus that the original G series converges. Consequently the proposition under consideration is fully established.

§ 30. The case I''.

This case is easily disposed of inasmuch as T_2 is of the type I' treated above.

If we choose formal normalizing variables, T_2 becomes precisely

$$u_2 = \varrho^2 u \varepsilon^{c u^l v^l}, \quad v_2 = \frac{1}{\varrho^2} v e^{-c u^l v^l}.$$

This is possible by § 21.

We have $u_2 v_2 = uv$. In case $u_1 v_1 \neq uv$, write

$$u_1 v_1 = uv + \varphi(u, v) + \cdots$$

where φ is a homogeneous polynomial in u, v of least the third degree in u, v. This gives

$$u_2 v_2 = u_1 v_1 + \varphi(u_1, v_1) + \cdots = uv + \varphi(u, v) + \varphi\left(\varrho u, \frac{1}{\varrho} v\right) + \cdots.$$

Hence $\varphi(u, v) + \varphi\left(\varrho u, \frac{1}{\varrho} v\right)$ vanishes identically. This is impossible for any polynomial not identically 0 since $\varrho \neq -1$. Thus we conclude that $u_1 v_1 = uv$, and accordingly that u_1 and v_1 are divisible by u and v respectively.

We may now write

$$u_1 = \varrho u g(u, v), \quad v_1 = \frac{v}{\varrho g(u, v)}.$$

Here $g(u, v)$ is a power series in u, v with initial term 1.

The first of these equations gives $u_2 = \varrho^2 u g(u, v)\, g(u_1, v_1)$ whence, by comparison with the normal form,

$$g(u, v)\, g(u_1, v_1) = e^{cu^l v^l}.$$

Replacing u, v by u_1, v_1 in this equation, we have

$$g(u_1, v_1)\, g(u_2, v_2) = e^{cu^l v^l}$$

so that, by a comparison, $g(u_2, v_2) = g(u, v)$, i. e. $g(u, v)$ is an invariant function under T_2, and must be a function of the product uv only (§ 14), namely $e^{\frac{c}{2}u^l v^l}$.

The form of the transformation T is now fully determined.

In the case I″ by the aid of a formal change of variables (15) *the transformation T may be reduced to the form*

$$U_1 = \varrho U e^{\frac{1}{2}cu^l v^l}, \quad V_1 = \frac{1}{\varrho} V e^{-\frac{1}{2}cu^l v^l},$$

where we may have $c = 0$, $l = \infty$ as in case I′.

This same reduction shows that the formally invariant curves under T and T_2 coincide.

In case I″ there is a formally invariant function F^* and two analytic invariant curves through the invariant point, these being the same as for T_2.

We can at once infer that *the same property holds in case I″ as is given in case I′ by the italicized statement of § 28.* Hence there are no further invariant curves through (0, 0).

In the integrable case these normal forms can be obtained by means of ordinary changes of variables (§ 25).

§ 31. An example in the hyperbolic case II″.

There are of course no real invariant formal curves in case II′ inasmuch as F^* is of the form $-\frac{1}{2}\theta(u^2 + v^2)$ by (13). Thus the case I′ treated above may be regarded as the general hyperbolic case, while II′ is the general elliptic case. The cases II″, III′ may be either hyperbolic or elliptic.

In the hyperbolic case II″ we can set up an example showing that the formal series F^* may diverge and also illustrating other significant features.

The transformation T is the following

$$u_1 = \frac{u}{1+u}, \quad v_1 = (1+u)^2(v+u^2).$$

This is evidently of type II'' at the invariant point (0, 0). Moreover, since the Jacobian of u_1, v_1 as to u, v is 1, areas are preserved, and T is conservative with quasi-invariant function $Q = 1$.

By direct iteration we find

$$u_k = \frac{u}{1+ku}, \quad v_k = (1+ku)^2\left[v + u^2\left(1 + \frac{1}{(1+u)^4} + \cdots + \frac{1}{(1+(k-1)u)^4}\right)\right]$$

for all integral values of k. The expression for u_k is of the type given in § 5. To express v_k in such a form we introduce the well-known function $\psi(z) = \frac{d \log \Gamma(z)}{dz}$.[1]

We have, by means of the functional equation for $\Gamma(z)$

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z),$$

so that

$$\psi'''(z+1) = \frac{-6}{z^4} + \psi'''(z),$$

where ψ''' stands for the third derivative of ψ as to z. Hence we have

$$\psi'''\left(\frac{1}{u}+1\right) = -6u^4 + \psi'''\left(\frac{1}{u}\right), \quad \psi'''\left(\frac{1}{u}+2\right) = \frac{-6u^4}{(1+u)^4} + \psi'''\left(\frac{1}{u}+1\right), \cdots,$$

whence, by addition,

$$\psi'''\left(\frac{1+ku}{u}\right) - \psi'''\left(\frac{1}{u}\right) = -6\sum_{m=0}^{k-1} \frac{u^4}{(1+mu)^4}.$$

Thus we may write for positive integral values of k, and likewise for k a negative integer or 0,

$$v_k = (1+ku)^2\left[v - \frac{1}{6u^2}\left(\psi'''\left(\frac{1+ku}{u}\right) - \psi'''\left(\frac{1}{u}\right)\right)\right].$$

[1] For a simple development of the properties of $\psi(z)$ used here, see K. P. Williams, *The asymptotic form of the function* $\psi(x)$. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 19, 1912 1913.

Now $\psi(z)$ is given asymptotically by the series

$$\log z - \frac{1}{2z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{2n z^{2n}}$$

in the right half of the complex z-plane, in which B_n denotes the nth Bernoullii number. By differentiating three times[1] we infer that $\psi'''(z)$ is given by an asymptotic series,

$$\frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)(2n+2) B_n}{z^{2n+3}}$$

in the right half of the complex z-plane. This series satisfies formally the functional equation for $\psi'''(z)$ given above, although the series diverges of course.

If replace ψ''' by this divergent series in the expression for v_k found above, v_k becomes a power series in u, v with coefficients polynomial in k. Moreover, for $k = 1, 2, 3, \ldots$ the series involved must converge. In fact v_k is then a function analytic at $u = 0$, and therefore its asymptotic series is its power series expansion. Hence we have here the unique formal series for v_k of the type considered in § 5.

By direct formal differentiation of these series for u_k, v_k and setting $k = 0$, we obtain

$$\delta u = -u^2, \quad \delta v = 2uv - \frac{1}{6u^2} \psi^{(4)}\left(\frac{1}{u}\right).$$

Moreover, since $Q = 1$, we have for the invariant series F^* by formula (11)

$$\frac{\partial F^*}{\partial v} = -u^2, \quad \frac{\partial F^*}{\partial u} = -2uv + \frac{1}{6u^2} \psi^{(4)}\left(\frac{1}{u}\right),$$

whence we get immediately

$$F^* = -u^2 v - \frac{1}{6} \psi'''\left(\frac{1}{u}\right).$$

This of course is a *divergent* formal power series in u, v. But it was seen in § 25 that the series for F^* converges in the integrable case.

[1] See J. F. Ritt, *On the differentiability of asymptotic series. Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 24, 1917—1918, for a discussion of such differentiation.

Thus T is of non-integrable type.

We note the very significant fact that if ψ''' be regarded as a function and not as a formal series, we have here an actual invariant function, real and analytic for $u > 0$, and asymptotically given by the formal series for F^* for u small, so that this function is continuous together with all of its derivatives for $u \geq 0$.

At first sight this seems to leave available no similar function for $u \leq 0$. Such a function is readily furnished as follows. The function $\psi(1-z)$ satisfies the same functional equation as $\psi(z)$, is analytic in the left half of the complex z-plane, and is given asymptotically by the same divergent series as ψ. Hence a similar invariant function F^* can be obtained by replacing the function $\psi'''(z)$ by the function $-\psi'''(1-z)$.

If the invariant functions for the two halves of the uv-plane are united we obtain a real invariant function, analytic save for $u=0$, continuous together with its partial derivatives, and given asymptotically by F^* at $(0, 0)$.

It is this general type of invariant function which probably exists in all cases.

In the case I′, I can prove the existence of a real invariant function, continuous with all of its derivatives and asymptotically given by F^* at $(0, 0)$. But this discussion is omitted since the existence of an *analytic* invariant function is highly probable in the general hyperbolic case.

We come now to the question of formally invariant curves. These are obtained by factorization of F^* (§ 19). Since $\psi'''\left(\frac{1}{u}\right)$ has an initial term $2u^3$, the curves are at once seen to be the curve $u=0$ taken doubly, and the formal curve $v = -\frac{1}{6u^2}\psi'''\left(\frac{1}{u}\right)$. The latter curve also gives an invariant curve, analytic for $u \neq 0$ such that v is continuous together with its derivatives of all orders in u at $u=0$. Half of this curve $(u \geq 0)$ is that arising when by $\psi(z)$ we understand the function $\psi(z)$ introduced above. For $u \leq 0$ we get of course the other half of the invariant curve $v = \frac{1}{6u^2}\psi'''\left(1-\frac{1}{u}\right)$.

The analytic invariant curve $u^2 = 0$ corresponds to a multiple factor of F^*, and accordingly is an invariant point curve (§ 20). This is readily verified from the explicit formulas for u_1, v_1.

It is also worthy of note that, for any point (u, v) not on either invariant curve and with $u > 0$, u_k increases for $k = -1, -2, \ldots$ Also for $k = 1, 2, \ldots$, we note that

$$F^* = -u_k^2\left[v_k + \frac{1}{6u_k^2}\psi'''\left(\frac{1}{u_k}\right)\right] = c \neq 0.$$

Hence as u_k diminishes the expression in brackets increases. In other words any such point (u, v) leaves the vicinity of $(0, 0)$, both upon indefinite iteration of T_{-1} and of T. A similar argument shows that the same is true for a point (u, v) with $u < 0$.

§ 32. Preliminary normalization in the hyperbolic case II″.

We will consider first what may be termed the non-specialized case II″. The characteristic feature of the case II″ is that the invariant formal series for F^* begins with terms of higher than the second degree. In general then we have

$$F^* = a_{30}u^3 + a_{21}u^2v + a_{12}uv^2 + a_{03}v^3 + \cdots,$$

where the roots of the cubic in s,

$$a_{30} + a_{21}s + a_{12}s^2 + a_{03}s^3 = 0,$$

are distinct and at least one of these roots is real. To each such real root s corresponds a real formally invariant curve $v = su + \cdots$. In general therefore case II″ is of hyperbolic type. We consider any such real formally invariant curve C.

By a linear change of variables C can be taken tangent to a new u-axis. That is, we can make $s = 0$ in this way. The equation of C is now of the form $v = \varphi(u)$, where $\varphi(u) = au^2 + \cdots$. By a further formal change of variables (15), $U = u$, $V = v - \varphi(u)$, the formal curve C can be taken into the U-axis. It is to be observed that any such linear change of variables as well as a change of variables (15) leaves T of the same type II″. Since $V = 0$ is the equation of the invariant curve, both V_1 and F^* are divisible by V.

If we do not make the above formal change of variables but make an actual change to variables which are the same to arbitrarily high degree $\mu + 1$, u_1, v_1 are unaltered to terms of degree $\mu + 1$, Q to terms of degree μ, and thus, by (11), F^* is unaltered to terms of degree $\mu + 1$. Consequently we may write

$$v_1 = v[1 + \cdots] + \omega(u, v),$$

$$F^*(u, v) = v[a_{21}u^2 + a_{12}uv + a_{03}v^2 + \cdots] + \eta(u, v).$$

where the brackets are polynomials in u, v of degree at most $\mu - 1$ and where ω, η are power series with initial terms of degree at least $\mu + 1$.

Under our hypotheses a_{21} is not 0, for in that case $s = 0$ would be a double root of the equation in s.

By direct iteration of the formal series in their original form (§ 2) we find

$$u_k = u + k(\varphi_{20} u^2 + \varphi_{11} uv + \varphi_{02} v^2) + \cdots,$$

$$v_k = v + k(\psi_{20} u^2 + \psi_{11} uv + \psi_{02} v^2) + \cdots.$$

Hence we find, on differentiating as to k and taking $k = 0$,

$$\delta u = \varphi_{20} u^2 + \varphi_{11} uv + \varphi_{02} v^2 + \cdots,$$

$$\delta v = \psi_{20} u^2 + \psi_{11} uv + \psi_{02} v^2 + \cdots.$$

Using the equations (11) and bearing in mind the fact that Q commences with a constant term 1, we see that

$$\varphi_{20} = a_{21}, \; \varphi_{11} = \;\; 2a_{12}, \; \varphi_{02} = \; 3a_{03},$$

$$\psi_{20} = \; 0, \; \psi_{11} = -2a_{21}, \; \psi_{02} = -a_{12},$$

These results may be summarized as follows:

Let T be a conservative transformation of type II'' for which there are three formally invariant curves with ordinary points and distinct tangents at (0, 0). *If variables u, v are properly chosen, any real formal curve of this sort can be made to osculate the v-axis to any order $\mu > 2$. Under these circumstances we have*

$$u_1 = u + a_{21} u^2 + 2a_{12} uv + \cdots, \qquad (a_{21} \neq 0),$$

$$v_1 = v[1 - 2a_{21} u - a_{12} v + \cdots] + \omega(u, v),$$

$$F^*(u, v) = v[a_{21} u^2 + a_{12} uv + a_{03} v^2 + \cdots] + \eta(u, v),$$

where the bracketed expressions are polynomials of degree at most $\mu - 1$ and ω, η are power series with initial terms of degree at least $\mu + 1$.

§ 33. Some inequalities in the hyperbolic case II''.

Let us take variables u, v as above. We will take $\mu > 5$ and also $a_{21} > 0$. Furthermore u, v are taken to be complex, of small moduli, and such that

(22) $$\Re(u) > 0, \quad |v| < |u|^2,$$

where $\Re(u)$ designates the 'real part of u'.

The series for u_1 gives us at once

(23) $$|u_1 - u - a_{21} u^2| < E^{(1)} |u|^3,$$

where $E^{(1)}$ is a definite positive constant. If we introduce a new variable $z = \frac{1}{u}$, (23) can be given the essentially equivalent but more convenient form

(23′) $$|z_1 - z + a_{21}| < E^{(2)} |z|^{-1}.$$

Suppose now that we take $v = 0$, $\Re(z) > R$, R a large positive quantity; in this case the inequalities (22) are satisfied. By iteration of T we obtain (z_1, v_1), (z_2, v_2), ... Let us assume for the present that $\Re(z_l) > R$, $|v_l| < |z_l|^{-2}$ for $l = 0, 1, \ldots, n-1$ with $n > 0$.

From the inequalities (23′) for $z, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ we infer

$$|z_l - z_{l-1} + a_{21}| < E^{(2)} R^{-1}, \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

These inequalities show that the real part of z_l diminishes by approximately a_{21} as l increases by 1, while the imaginary component varies slowly. By combination we obtain

$$|z_l - z_j + (l-j) a_{21}| < (l-j) E^{(2)} R^{-1}, \qquad (0 \leq j < l),$$

and thence

$$|z_j| > |z_l + (l-j) a_{21}| - (l-j) E^{(2)} R^{-1}.$$

But, since z_l has a positive real part, we have

$$|z_l + (l-j) a_{21}| > (l-j) a_{21},$$

whence

$$l - j < \frac{1}{a_{21}} |z_l + (l-j) a_{21}|.$$

Replacing $l - j > 0$ by this greater value in the negative term of the inequality for $|z_j|$ we find

$$|z_j| > \left(1 - \frac{E^{(2)} R^{-1}}{a_{21}}\right) |z_l + (l-j) a_{21}|.$$

The polynomial of degree μ, $F = F^* - \eta$, has the same terms as those of the formal series F^* out to terms of degree $\mu + 1$. Consequently if (22) holds we have

$$|F_1 - F| < E^{(3)} |z|^{-\mu-1}.$$

Thus, under the above hypotheses, we have

$$|F_l - F_{l-1}| < E^{(3)} |z_{l-1}|^{-\mu-1}, \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Moreover $F = 0$ since F is divisible by v. By combination we therefore obtain

$$|F_l| < E^{(3)} \sum_{j=0}^{l-1} |z_j|^{-\mu-1}.$$

Using the preceding inequality for $|z_j|$ we find

$$|F_l| < E^{(4)} \sum_{j=0}^{l-1} |z_l + (l-j) a_{21}|^{-\mu-1}$$

$$< E^{(4)} \sum_{j=1}^{\infty} |z_l + j a_{21}|^{-\mu-1}.$$

But this sum is less than

$$\int_0^\infty \frac{dn}{|z_l + n a_{21}|^{\mu+1}} = \frac{1}{|z_l|^\mu} \int_0^\infty \frac{dt}{\left|\frac{z_l}{|z_l|} + t a_{21}\right|^{\mu+1}},$$

where we have written $n = |z_l| t$. The final integral which appears has evidently as greatest value

$$\int_0^\infty \frac{dt}{|1 + t a_{21}|^{\mu+1}}$$

inasmuch as z_l has a positive real part. Thus finally we obtain

(24) $$|F_l| < E^{(5)} |z_l|^{-\mu}, \qquad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

where $E^{(5)}$ is a definite positive constant which does not increase as R increases.

Furthermore, from the explicit form of F we have

$$|F_1| \, |z_1|^2 > E^{(6)} |v_1|$$

so long as (22) holds for (z, v). Thus we obtain

$$|v_l| < \frac{|F_l|\,|z_l|^2}{E^{(6)}}, \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Combining this inequality with (24) there results

$$|v_l| < \frac{E^{(5)}}{E^{(6)}} |z_l|^{-\mu+2}, \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Since $\mu - 2 > 3$ the second inequality (22) continues to hold until $\Re(z_l) \leq R$.

Our main result may be formulated as follows:

If $\mu > 5$, $a_{21} > 0$, $\Re\left(\frac{1}{u}\right) > R > 0$, *and if* $v = 0$, *then we have*

(25) $$|v_l| < E^{(7)} |u_l|^{\mu-2} < |u_l|^2$$

for $l = 1, 2, \ldots,$ *until* $\Re\left(\frac{1}{u_l}\right) \leq R$.

It is evident that $\Re\left(\frac{1}{u_l}\right)$ ultimately becomes less than R.

§ 34. Further inequalities in the hyperbolic case II''.

The inequalities of § 33 are not sufficient for our purposes. It is necessary to evaluate u_l more precisely than we have done.

To this end we write

$$w = \frac{1}{u} + \alpha \log u + \beta u + \cdots + \varkappa u^k,$$

where k is arbitrarily large. Also let $\bar{u}$ stand for the series formed by the terms in u_1 which involve u only. We propose to determine real quantities $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ so that

$$|w(\bar{u}) - w(u) + a_{21}| < K |u|^{k+1}.$$

This condition will be met if

$$\left[\frac{1}{u}\left(\frac{u}{\bar{u}} - 1\right) + a_{21}\right] + \alpha \log \frac{\bar{u}}{u} + \beta(\bar{u} - u) + \cdots + \varkappa(\bar{u}^k - u^k)$$

is of the $(k+1)$th order in u. The term in brackets is a convergent power series in u without constant term. The following term is a similar series beginning with a linear term $\alpha a_{21} u$; hence α can be so chosen that the first two terms form a power series without constant or first degree term. The third term is a similar series with leading term $2\beta a_{21} u^2$; hence β can be so chosen that the first three terms form a power series beginning with terms of the third degree or higher. Continuing in this way we arrive at a determination of $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ which yields an expression w with the desired property.

Suppose now that we introduce the variable w instead of the similar variable $z = \frac{1}{u}$ (§ 33), taking $\Re\left(\frac{1}{u}\right) > R$ and choosing the principal value of $\log u$ in the expression w. It is clear that $\Re(w)$ is large when $\Re(z)$ is large and that the region $\Re(z) > R$ corresponds to a region of similar character in the w-plane, with nearly vertical tangent throughout and crossing the w-axis far to the right of the origin in the w-plane. Hence, by Darboux's well-known theorem, the correspondence between these regions in the w-plane and z-plane is one-to-one and conformal. Moreover, in this part of the w-plane $\frac{w}{z}$ is nearly 1.

From the definition of $\bar{u}$ it appears that

$$|u_1 - \bar{u}| < E^{(8)} |v|,$$

and thence from the explicit expression for F,

$$|u_1 - \bar{u}| < E^{(9)} |\bar{F}| \, |u|^{-2}$$

when (22) holds. Further, we have

$$|u_1 - \bar{u}| < E^{(7)} E^{(8)} |u|^{\mu-2},$$

when (25) holds, from which

$$|w(u_1) - w(\bar{u})| < E^{(10)} |u|^{\mu-4}.$$

If we recall the defining property of $w(u)$ and take $k \leq \mu - 5$, we get finally

$$|w(u_1) - w(u) + a_{21}| < E^{(11)} |u|^{k+1}.$$

Applying this inequality successively for the sequence of values (u, v) of § 34 (when (22), (25) hold), we obtain

$$|w_1 - w + a_{21}| < E^{(12)} |w|^{-k-1},$$

$$|w_2 - w_1 + a_{21}| < E^{(12)} |w_1|^{-k-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|w_n - w_{n-1} + a_{21}| < E^{(12)} |w_{n-1}|^{-k-1}.$$

Thus in the complex w-plane each point $w, w_1, \ldots, w_n$ in the region $R(w) > R'$ falls approximately at a distance a_{21} to the left of its predecessor. By the method used in § 33 it is apparent that the sum

$$\frac{1}{|w_l|^{k+1}} + \frac{1}{|w_{l-1}|^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{|w|^{k+1}}$$

and $|w_l - w + la_{21}|$ are of the order $|w_l|^{-k}$. Hence we have:

Assume $\mu > 5$, $k < \mu - 5$, $a_{21} > 0$, $\Re\left(\frac{1}{u}\right) > R$, *and* $v = 0$. *Write*

$$w = \frac{1}{u} + \alpha \log u + \beta u + \cdots + \varkappa u^k,$$

where $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ *are suitably determined constants. Then we have*

$$(26) \qquad |w_l - w + la_{21}| < E^{(13)} |w - la_{21}|^{-k}$$

for $l = 1, 2, \ldots,$ *until* $\Re\left(\frac{1}{u_l}\right) \leqq R$.

§ 35. The invariant curves in the hyperbolic case II′.

With the facts deduced in §§ 33, 34 in mind, we can readily prove the existence of an invariant curve.

Let us take w, v as our variables where w is restricted to the region of the w-plane which corresponds to $\Re\left(\frac{1}{u}\right) > R$.

Consider the two sequences of functions of w:

$$w,\ w_1(w + a_{21}, 0),\ w_2(w + 2a_{21}, 0), \ldots,$$

$$0,\ v_1(w + a_{21}, 0),\ v_2(w + 2a_{21}, 0), \ldots.$$

According to the inequalities (26), (25), we have

$$|w_l(w + la_{21}, 0) - w| < E^{(13)} |w|^{-k},$$
$$|v_l(w + la_{21}, 0)| \qquad < E^{(14)} |w|^{-\mu+2},$$

inasmuch as $\frac{w}{z}$ approaches 1.

Thus, for $\Re(w)$ sufficiently large and positive, the sequences w_l, v_l remain bounded and define a closed set Σ of limiting functions $w^*(w)$, $v^*(w)$ analytic within the same w domain,[1] and restricted by the inequalities

$$|w^*(w) - w| < E^{(13)} |w|^{-k}, \; |v^*(w)| < E^{(14)} |w|^{-\mu+2}.$$

Now we have

$$T(w_l(w + la_{21}, 0), v_l(w + la_{21}, 0)) = (w_{l+1}(w + la_{21}, 0), v_{l+1}(w + la_{21}, 0)).$$

Thus the transformed sequences of functions have as limiting functions

$$w^*(w - a_{21}), \; v^*(w - a_{21}).$$

In other words the totality Σ is carried over itself by T, the change of parameter being $w_1 = w - a_{21}$.

Now let us suppose w and v to be real, with w sufficiently large and positive. The transformation from (w, v) to (w_1, v_1) is then a real analytic transformation, and the totality of curves specified above are analytic with the positive w-axis as asymptotes. In fact these curves Σ have contact of order $\mu - 2$ at least with the w-axis at ∞.

Let us return now to the prepared real uv-plane of § 32. The relation between w and u shows that in the real uv-plane the curves Σ are defined for u sufficiently small and positive, and are analytic curves with contact of order $\mu - 2$ at least with the u-axis at $(0, 0)$. On account of the mode of definition of the curves in the complex domain the inequality $|v| < E^{(15)} |u|^{\mu-2}$ holds uniformly for all of these curves.

It follows that the totality Σ consists of only one curve.

In fact, consider the region $u > 0$ bounded by these curves and the line $u = d$. If there were more than a single such curve, such a region would necessarily arise and lie within the region

$$0 < u < d, \; |v| < E^{(15)} |u|^{\mu-2}.$$

[1] Cf. W. F. Osgood, *On the uniformisation of algebraic functions*, *Annals of Mathematics*, vol. 14, 1912—1913, pp. 152—154.

By the transformation T we have

$$u_1 = u + a_{21}u^2 + \cdots.$$

We see at once that this region goes into another which includes it. For, the upper and lower boundaries of the region bounded by the Σ curves are carried into themselves (the totality Σ being invariant), while the line $u = d$ is moved to the right. This is impossible since $\int\int Q du dv$ is invariant under T.

Passing back to the original uv-plane, we infer the existence of an analytic invariant curve ending at the invariant point and having contact of order of $\mu - 2$ with the corresponding formally invariant curve. When the curve is represented in the form $v = \varphi(u)$ say, φ is continuous together with its derivatives of the first $\mu - 2$ orders for $u = 0$.

Now μ is an arbitrarily large integer. By increasing μ we cannot obtain further invariant curves, as is seen at once by a repetition of the above argument as applied to the region between such curves. Therefore, the invariant curve when represented in the form $v = \varphi(u)$ say yields a function φ analytic for $u \neq 0$, continuous together with its derivatives of all orders for $u = 0$, and formally coinciding with the formally invariant curve.

All of the above only applies if $a_{21} > 0$. But if $a_{21} < 0$ then the analogous quantity for T_{-1} is $-a_{21}$. Hence we can arrive at the same conclusion if $a_{21} < 0$ by considering T_{-1} instead of T.

Clearly we can deal with the case $u < 0$ by merely rotating the axes in the prepared uv-plane through the angle π.

Let us call a real function $f(t)$ of a real variable t *hypercontinuous* for $t = t_0$ if $f(t)$ is analytic for $t \neq t_0$, $|t - t_0| \leq \delta > 0$, and continuous together with all of its derivatives for $t = t_0$. Similarly a curve is *hypercontinuous* at a point if its coördinates can be expressed as hypercontinuous functions of a parameter t. With these definitions we can summarize our results as follows:

In the case II'' when there are three formally invariant curves with ordinary points and distinct tangents, one or all three of these will be real. To each such real formal curve corresponds a unique hypercontinuous curve through the invariant point which is invariant under T and has the corresponding asymptotic representation at the invariant point.

It is clear that the method above is not essentially limited to the discussion of real invariant curves but these are all we need to consider.

§ 36. Extension to the general hyperbolic case II″, II‴.

It is easy to see that the above work admits of an extension to the most general case II″.

Suppose first we fix attention on any real formally invariant curve C in the case II″ which has an ordinary point at (0, 0).

We can begin as before (§ 32) by taking a prepared uv-plane in which this curve osculates the u-axis to order μ.

The series for u_1 can be taken to contain a term cu^p of least degree $p > 1$, where p does not increase indefinitely with μ. Otherwise, when the u-axis is made the invariant curve by a formal change of variables, it will be an invariant point curve, and such a curve has previously been observed to be analytic.

The series in v_1 is divisible by v out to terms of degree $\mu + 1$ as before.

The formal series F^* consists of a polynomial of degree at most μ divisible by v with a leading term cvu^p and a formal series with initial terms of degree at least $\mu + 1$.

Let us assume $c > 0$ and take

$$\Re(u) > 0, \ |v| < |u|^p.$$

Further let us introduce the variable $z = u^{-p+1}$. We find easily that, for $\Re(z) > R$,

$$|z_1 - z + (p-1)c| < E|z|^{-\frac{1}{p-1}},$$

where E is a suitable positive constant, and we can carry through a discussion analogous to that contained in §§ 33, 34.

Introducing next a variable w,

$$w = \frac{1}{u^{p-1}} + \frac{\alpha}{u^{p-2}} + \cdots + \lambda \log u + \cdots + \sigma u^{k+1-p},$$

we can determine $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ so that

$$|w(\bar{u}) - w(u) + (p-1)c| < E' |u|^{k+1}$$

as in § 34, and can generalize the results there obtained.

The existence of a unique invariant curve can then be proved as in § 35.

When the real formally invariant curve has a 'cusp' at (0, 0), this can be reduced to an 'ordinary point' by a succession of changes of variables of the

type $u = \bar{u}\bar{v}$, $v = \bar{v}$, and then an argument may be made like that carried through in §§ 33—35.

We will not stop to enter into details, but merely state the conclusion:

In any case II'' to every real formally invariant curve corresponds a unique hypercontinuous invariant curve with the corresponding asymptotic representation.

In the hyperbolic case II''', T_q is of type II''. Hence we infer:

In the hyperbolic case II''', $\theta = \frac{2p\pi}{q}$, the invariant curves under T_q are of type II'' and their images are invariant as a set under T.

§ 37. A general property in case II''.

In case II'' under the restrictions of § 35 every point of the region $u^2 + v^2 \leq \delta^2$ not on one of the real invariant curves is carried out of the region by iteration of T or T_{-1}, while every point on one of these curves approaches the invariant point (0, 0) by iteration of T and is carried out of the region by iteration of T_{-1}, or vice versa.[1]

There may be either three real invariant curves, or a single such curve.

Let us consider the first of these subcases. Here the neighborhood of (0, 0) in the plane is divided into six parts, bounded by arcs of the invariant analytic curves. These six regions evidently go over into themselves under T or T_{-1}. Let us consider a particular one of these regions, and let us first take tangents to the corresponding arcs of the two invariant curves at (0, 0) as axes. The hypercontinuous invariant curves have equations $v = \varphi(u)$, $u = \psi(v)$ referred to these axes.

Make the further change of variables

$$U = u - \psi(v), \quad V = v - \varphi(u).$$

The right-hand members of these equations are continuous together with their partial derivatives of all orders in u, v, analytic except for $u = 0$ or $v = 0$. In the new variables the invariant curves appear as the U- and V-axis, while the region under consideration becomes the first quadrant in the UV-plane.

[1] It is apparent from this result that no other invariant curves through the invariant point can exist.

Levi-Civita (loc. cit.) proved that certain nearly points are carried away from the invariant point in this and other hyperbolic cases, showing that the point is unstable.

See also A. R. Cigala, *Sopra un criterio di instabilità, Annali di Matematica*, ser. 3, vol. 11, 1905.

This further change of variables is formally of the type (15) so that we have (see § 32)

$$U_1 = U[1 + a_{21} U + 2a_{12} V + \cdots], \quad V_1 = V[1 - 2a_{21} U - a_{12} V + \cdots].$$

The factors in brackets are analytic for $U > 0$, $V > 0$ of course. We can readily show that these factors are continuous together with all of their partial derivatives for $U \geq 0$, $V \geq 0$.

In fact consider

$$\lim \frac{U_1}{U},$$

as a point (u, v) approaches the invariant curve $U = 0$. By the ordinary rule for the evaluation of an indeterminate form the limit will be given by

$$\lim \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} - \frac{d\psi(v_1)}{dv_1} \frac{\partial v_1}{\partial u} \right)$$

at the point in question. Hence the first bracket, and likewise the second bracket, are continuous functions for $U \geq 0$, $V \geq 0$. By successive steps of like nature all of the partial derivatives of the brackets may be shown continuous.

In the subcase under consideration there is a third real invariant curve in the second and fourth quadrants obtained by factoring formally

$$F^* = UV[a_{21} U + a_{12} V + \cdots].$$

We see that a_{21} and a_{12} are of the same sign (say positive), for this third invariant curve is given by

$$a_{21} U + a_{12} V + \cdots = 0.$$

Returning to the explicit form of U_1, V_1 above, we infer that $U(V)$ increases and $V(U)$ diminishes under iteration of $T(T_{-1})$ for any point in the first quadrant. If (U, V) approaches a definite point (U, V) with $U > 0 \, (V > 0)$ within the region $U^2 + V^2 < \delta^2$, this point is necessarily invariant under T. But, inasmuch as there are no multiple factors of F^* and thus no invariant point curves in the case at hand, there will be no invariant point in this region except $(0, 0)$. Thus the first part of the italicized statement holds in this case.

The part of the statement which deals with the behavior of points on the invariant curves is obviously true in all cases. If it was not we should have

isolated invariant points on these invariant curves lying arbitrarily near to (o, o), and this is impossible.

We have next to discuss the subcase where there is a single real formally invariant curve. Let us take this curve into the U-axis by a transformation like that made above. We have then

$$U_1 = U + a_{21} U^2 + 2a_{12} U V + 3a_{03} V^2 + \cdots,$$
$$V_1 = V[1 - 2a_{21} U - a_{12} V + \cdots],$$

where the brackets stand for a type of functions similar to those in brackets above.

Here one has

$$F^* = V[a_{21} U^2 + a_{12} U V + a_{03} V^2 + \cdots].$$

The quadratic form in brackets is definite since there are a pair of conjugate formally invariant curves with distinct conjugate directions.

We find

$$U_1 V - V_1 U = V[3(a_{21} U^2 + a_{12} U V + a_{03} V^2) + \cdots].$$

This equation renders it apparent that $\tau = \tan^{-1}\frac{V}{U}$ varies continually in one sense under indefinite iteration of T or of T_{-1} as long as a point and its iterates remain near (o, o). If $\lim \tau = 0$ or π, $\left|\frac{V}{U}\right|$ approaches o, and the formulas for U_1, V_1 show that $|U|$ and $|V|$ vary in opposite senses. In this case $|U|$ increases and the point cannot remain near (o, o).

Moreover the point cannot remain near (o, o) in the contrary case. If $\lim \tau = \bar{\tau} \neq 0, \pi$ the above equation shows that V approaches o; in fact the variation in τ is of the first order in V. The variable U must likewise tend to o. But the geometry of the figure in the plane makes it clear that $\frac{V_1 - V}{U_1 - U}$ must approach $\tan\bar{\tau}$ indefinitely often, at the same time. If we recall that $\frac{V}{U}$ approaches this value also and employ the formulas for U_1, V_1, we find readily

$$\frac{-2a_{21}\tan\bar{\tau} - a_{12}\tan^2\bar{\tau}}{a_{21} + 2a_{12}\tan\bar{\tau} + 3a_{03}\tan^2\bar{\tau}} = \tan\tau$$

whence

$$3\tan\bar{\tau}(a_{21} + a_{12}\tan\bar{\tau} + a_{03}\tan^2\bar{\tau}) = 0,$$

which is impossible.

§ 38. Extension to a more general case II″.

The same property holds in the most general hyperbolic case.

The kernel of the method of proof employed in § 37 depends on the use of a function which increases or decreases upon iteration of T. This method can be applied to a somewhat more general case than has been treated above, namely that in which all the real directions of formally invariant curves at (0, 0) are distinct. It is this case which we treat first. In dealing with the most general case (§ 39), however, we are obliged to employ less direct means.

Suppose that the property fails to hold, so that there are real points not on an invariant arc which remain in an arbitrarily small neighborhood of (0, 0) under indefinite iteration of T (or of T_{-1}, if not of T).

There will then exist such points in some one of the regions into which the invariant arcs divide the vicinity of (0, 0), and it is upon such a region that we fix attention. For the present we assume there is more than a single real invariant curve.

By a change of variables $U = u - \psi(v)$, $V = v - \varphi(u)$ (§ 37), the region between the invariant boundary arcs may be taken into the first quadrant, in such wise that the invariant arcs become the U- and V-axes. The variables U, V are analytic in u, v, save for $u = 0$ or $v = 0$ when U, V are continuous together with all of their partial derivatives. Furthermore we have

$$U_1 = U\left[1 + \left(H + V\frac{\partial H}{\partial V}\right) + \cdots\right], \quad V_1 = V\left[1 - \left(H + U\frac{\partial H}{\partial U}\right) + \cdots\right],$$

where UVH is the homogeneous polynomial of lowest degree $m \geqq 3$ in F^*, and where the brackets stand for functions analytic for $U \neq 0$, $V \neq 0$, and continuous together with all of their partial derivatives. The factors U, V in UVH correspond to the invariant axes. The factors of H are either real linear factors $\alpha U + \beta V$ $(\alpha\beta > 0)$ or complex linear factors, since there are no real invariant curves in the first quadrant of the UV-plane. Hence H is of one sign, say positive, near (0, 0) and of the order $m - 2$ in $\sqrt{U^2 + V^2}$.

From the above equations and the facts stated we have

$$U_1 V - V_1 U = UV[mH + \cdots] > 0;$$

in consequence $\tau = \tan^{-1}\frac{V}{U}$ varies continually in one sense upon iteration of T or of T_{-1}, and must approach a limit.

This limit must be o or $\frac{\pi}{2}$. In fact since there are no invariant points near (o, o) (invariant point curves correspond to multiple factors of F^*), the corresponding point would necessarily approach (o, o) in the contrary case. If $r > 0$ denotes the corresponding $\lim \frac{V}{U}$ the fraction

$$\frac{V_1 - V}{U_1 - U} = \frac{V}{U}\left(\frac{-\left(H + V\frac{\partial H}{\partial V}\right) + \cdots}{H + U\frac{\partial H}{\partial U} + \cdots}\right)$$

can be made nearly equal to r with negative denominator and numerator; this is easily seen geometrically. Hence we have (compare § 37)

$$\lim \frac{H + V\frac{\partial H}{\partial V}}{H + U\frac{\partial H}{\partial U}} = -1$$

along this direction, whence $H = 0$ for $\frac{V}{U} = r$. This direction will correspond to a real formally invariant curve, which is absurd.

Also this limit is not o, for the formulas for U_1, V_1 show then that $|U_1|$, $|V_1|$ will vary in opposite senses and the point will recede from (o, o) along the U-axis. Similarly the limit is not $\frac{\pi}{2}$.

This completes the discussion when there is more than one real invariant curve. The argument is easily modified to meet the case of a single such curve (compare § 37).

The property of § 37 holds therefore if the real tangent directions of the formally invariant curves are all distinct.

§ 39. Extension to the general case II'', II'''.

We propose to deal in outline with the general case II''. As before, we assume the property not to hold, and show that a contradiction results.

The region under consideration is bounded by two invariant arcs which may or may not have the same tangent direction. An argument like that used above may be partially applied. If we form the difference $u_1 v - v_1 u$, it is given by a series beginning with a constant multiple of the homogeneous polynomial of

lowest degree in F^*. But for directions within the region making this polynomial vanish there must be an even number of equal factors $\alpha u + \beta v$, since if there were an odd number there would be at least one corresponding real formally invariant curve and thus an invariant curve within the region, contrary to hypothesis. Hence $u_1 v - v_1 u$ preserves a constant sign save near these critical directions.

Moreover, if, under iteration of T, a point moves away from the vicinity of such a critical direction, it rotates in a constant sense about (o, o) to the vicinity of the next following critical direction (compare § 38).

Since there are only a finite number of such critical directions, there will then be points remaining in the indefinitely small vicinity of one such direction under indefinite iteration. It is upon such a critical direction and its neighborhood within the region under consideration that we now fix attention.

Let us take this critical direction along the positive u-axis, and make the change of variables.

$$u = \bar u, \quad v = \bar u\,\bar v;$$

in the new variables the transformation T then is readily found to have the form II″

$$\bar u_1 = \bar u + \cdots, \quad \bar v_1 = \bar v + \cdots.$$

The series $F^*(\bar u, \bar u\,\bar v)$ is of course formally invariant, and in general the same methods of formal reckoning apply as earlier.

The first distinction to be noted is that the invariant integral $\int\int Q\,du\,dv$ becomes $\int\int \bar u\,Q\,d\bar u\,d\bar v$; the new quasi-invariant function $\bar u\,Q$ is analytic but vanishes at (o, o). The second distinction is that the line $\bar u = 0$ in the $\bar u\bar v$-plane is evidently an invariant point curve corresponding to the invariant point (o, o) in the uv-plane.

Also there are infinitely many points $\bar u > 0$ in the $\bar u\bar v$-plane which remain near (o, o) under indefinite iteration of T, and yet do not lie on an image of an invariant curve in the uv-plane.

The formal differential equations (9) in $\bar u_k, \bar v_k$ are clearly

$$\bar u_k Q_k \frac{d\bar v_k}{dk} = -\frac{\partial F^*}{\partial v_k}, \quad \bar u_k Q_k \frac{d\bar u_k}{dk} = \frac{\partial F^*}{\partial \bar u_k}$$

where by F^* is meant the series $F^*(u, uv)$.

In the $\bar{u}\bar{v}$-plane there are also certain critical directions, finite in number, along which the points above referred to cluster. In fact $\bar{u}_1\bar{v} - v_1 u$ has the same initial terms as

$$\frac{1}{\bar{u}}\left[\bar{u}\frac{\partial F^*}{\partial \bar{u}} + \bar{v}\frac{\partial F^*}{\partial \bar{v}}\right].$$

As before, the lowest terms here form a homogeneous polynomial in $\bar{u}, \bar{v}$ of one sign or zero for $\bar{u} > 0$.

Repetition of the reasoning and further like changes of variables can now be made. It may be observed that the invariant point curve $\bar{u} = 0$ introduced at any stage is either eliminated by a further change of variable, or corresponds to the new $\bar{u}$-axis. Consequently the extraneous invariant point curves are either $\bar{u} = 0$ or $\bar{u} = 0$ and $\bar{v} = 0$.

Since there are only a finite number of formally invariant curves and the changes of variables used lower their order of contact, a stage must finally be reached at which either (1) there is no formally invariant curve not of extraneous type or (2) there is only one such curve. In case (2) it is clear that we may assume this curve to have an 'ordinary point' at (0, 0) with tangent direction distinct from that of an extraneous invariant curve; the changes of variables employed separate formally distinct curves and eliminate a 'cusp'. One further change of the same type will then make $\bar{u} = 0$ the only extraneous invariant curve.

Let us begin with case (1) when $\bar{u} = 0$ and $\bar{v} = 0$ are extraneous.

Since $\int\int \bar{Q}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{u}\, d\bar{v}$ is an invariant integral it is clear that points $\bar{Q}(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ go into points $\bar{Q}(\bar{u}, \bar{v}) = 0$. Thus $\bar{Q} = 0$ gives a set of real analytic curves invariant under T. Such curves are necessarily individually invariant inasmuch as $\bar{u} = 0$ is invariant. But there are no such curves save $\bar{u} = 0$ and $\bar{v} = 0$. Hence we have

$$Q(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u}^l \bar{v}^m R(\bar{u}, \bar{v}), \quad (l > 0,\ m > 0),$$

where $R(0, 0) \neq 0$.

Also $F^* = 0$ yields formally invariant curves so that

$$F^* = \bar{u}^p \bar{v}^q G(\bar{u}, v), \quad (p > l + 1,\ q > m + 1),$$

where G is a formal power series with constant term.

Now by the formal differential equations (9) for this case we have

$$u_k^l v_k^m R \frac{d\bar{u}_k}{dk} = \frac{\partial}{\partial v_k}[\bar{u}_k^p \bar{v}_k^q G], \quad \bar{u}_k^l \bar{v}_k^m R \frac{dv_k}{dk} = -\frac{\partial}{\partial \bar{u}_k}[\bar{u}_k^p v_k^q G].$$

Thus the series for u_1, v_1 have the form

$$\bar{u} + \bar{u}^{p-l} v^{q-m-1}[qc + A], \quad v + \bar{u}^{p-l-1} v^{q-m}[-pc + B]$$

respectively, where A and B are power series without constant terms. Under iteration of T or T_{-1} either $|\bar{u}|$ increases and $|\bar{v}|$ decreases, or *vice versa*. Consequently a point which remains in the vicinity of (o, o) will approach a limiting point on the $\bar{u}$- or $\bar{v}$-axis, distinct from (o, o).

For definiteness suppose the point to lie in the first quadrant with $c > 0$. Such a point will then approach a point of the positive $\bar{u}$-axis near (o, o) under iteration of T. But the series above show that for such a point

$$\frac{\Delta v}{\Delta \bar{u}} > -2K\bar{v}, \qquad (K > 0).$$

Thus v decreases less rapidly than if

$$\frac{dv}{d\bar{u}} = -Kv,$$

when by integration we find $v = ce^{-Ku}$. Hence $\bar{u}$ cannot approach a limit as $\bar{v}$ approaches o but must increase indefinitely.

The case when only $\bar{u} = 0$ is extraneous admits of similar discussion.

Case (1) is now disposed of. Let us consider case (2).

By a formal change of variables of the type employed in § 37 we may take $\bar{u} = 0$ as the invariant point curve and $\bar{v} = 0$ as the other invariant curve. Formally then we are essentially in case (1), above disposed of. Indeed if the invariant curve is analytic no modification is required.

If the hypercontinuous invariant curve is not analytic there can be no corresponding factor of Q, i. e. after the new change of variables we have

$$Q(\bar{u}, v) = \bar{u}^l R(\bar{u}, \bar{v}), \qquad (l > 0),$$

where $R(0, 0) \neq 0$.

Moreover, after this change of variables, $\bar{v}$ only occurs once as a factor of F^*. For a multiple factor gives an analytic invariant point curve (§ 20). Thus we have

$$F^* = \bar{u}^p \bar{v}\, G(\bar{u}, \bar{v}), \quad (p > l + 1),$$

where $G(0, 0) \neq 0$.

Consequently we have here

$$\bar{u}_1 = \bar{u}[1 + c\bar{u}^{p-l-1} + \cdots], \quad v_1 = \bar{v}[1 - cp\bar{u}^{p-l-1} + \cdots],$$

where $c \neq 0$. The brackets stand for functions continuous together with all of their partial derivatives (see § 37), and with the asymptotic representation indicated at (0, 0).

But the points remaining near (0, 0) under indefinite iteration of T or T_{-1} lie approximately in the direction of the $\bar{u}$-axis; otherwise, before the above non-analytic change of variables was made, we might have removed the invariant curve by another change of variables, and thus have arrived at case (1).

As a result $|u|$ increases and $|v|$ decreases. The above formulas demonstrate this fact. This possibility is excluded since there are no invariant points near (0, 0) not on $\bar{u} = 0$.

Thus case (2) is also disposed of.

Since in case II‴, T_q is of type II″ we may state:

The property of § 37 holds in the most general hyperbolic cases II″, II‴.

§ 40. The hyperbolic case III′, III″.

The non-specialized case III′ is of hyperbolic type as appears from an inspection of (13). If we assume that the coefficient of v^3 in F^* is not zero, we obtain a real formally invariant curve with cusp at (0, 0).

Now by the change of variables (see § 6)

$$u = uv, \quad v = v,$$

T takes the form II″. By the use of the methods of § 32—39 we can infer.

In the hyperbolic case III′ to each real formally invariant curve corresponds a unique hypercontinuous curve which is invariant under T and has the corresponding asymptotic representation at the invariant point.

In the hyperbolic case III″ the invariant curves under T_2 are of type II′ and their images are invariant as a set under T.

The property of § 37 holds in the hyperbolic case III.

§ 41. Invariant curves and the hyperbolic case.

We aim finally to show that a certain kind of converse to the above can be found:

If T is a conservative transformation I', II', II'', III' for which (o, o) *is an invariant point, and if there exists an invariant continuous arc ending at* (o, o) *for which* $\tan^{-1}\frac{v}{u}$ *remains finite, then the invariant point is hyperbolic and the invariant arc is an arc of a hypercontinuous invariant curve obtained above.*

If the invariant point can be proved hyperbolic the remainder of the statement can be demonstrated at once. In fact all points not on one of these hypercontinuous arcs leave a definite vicinity of (o, o) under both T and T_{-1}, according to the general property developed above. But the invariant arc is carried into part of itself either by T or T_{-1}. Therefore it must consist of points on one of the hypercontinuous arcs.

Let us take first the general case when T is of type I$'$ or II$'$ at the invariant point (o, o) and let us suppose if possible that T is elliptic at that point.

Let α, β be the upper and lower limits of $\tan^{-1}\frac{v}{u}$ along the curve. These are invariant under T of course. Hence the lines through (o, o) in these directions are carried into curves tangent to these respective lines at (o, o). Thus we have the phenomenon of invariant directions, which is absurd in case II$'$. Hence T is of type I$'$, and (o, o) is a hyperbolic point.

If T is of type II$''$ every direction through the invariant point is invariant. It is necessary here to have recourse to a more elaborate argument to show that T is hyperbolic.

For definiteness we assume that T carries the invariant arc into part of itself. Define α and β as above. If $\alpha \neq \beta$ we can find a line $v = cu$ which intersects the invariant arc infinitely often near (o, o). But the image of this line lies on one side or the other of the line near o, at least near (o, o), since T is analytic. Thus it is apparent that the total area between the line and invariant arc on the same side of the line is carried over into part of itself by T, which is absurd. Hence there is only a single limiting direction, i. e. $\alpha = \beta$, and the invariant arc does not meet the corresponding line $v = cu$ near the invariant point.

This direction corresponds to the real tangent direction of a formally invariant curve. Indeed the arguments employed in § 38 show that points not approximately in such a real invariant direction from the invariant point are rotated into such a direction under iteration of T, provided that the point remains near (o, o) as is the case for a point of the invariant arc.

This formally invariant curve which has a real tangent direction will correspond to a real formally invariant curve in general so that we have the hyperbolic case II$''$.

There remains the possibility, however, that we have an even number of formally invariant curves with real tangent directions but not with all coefficients real. Here further consideration is required.

Take the straight line from (0, 0) in the limiting tangent direction as the u-axis and write

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{u}\bar{v}$$

as in § 39. The $\bar{v}$-axis in the $\bar{u}\bar{v}$-plane is a line of invariant points under T, and the invariant arc approaches (0, 0) in this new plane. But this invariant arc does not cross the line of invariant points of course.

Repeating the argument above we infer that this arc approaches (0, 0) in a definite limiting direction in the $\bar{u}\bar{v}$-plane. But it was established in § 39 that such a limiting direction can only be along a real tangent direction to a formally invariant curve. Hence again we argue that the invariant arc has the direction tangent to $\bar{u} = 0$ or to a formally invariant curve, when another change of variables as above is in order.

At each stage these changes of variables diminish the number of real coefficients in the series for the formally invariant curve, until at last the first coefficient is not real and there is no invariant direction. This is impossible by our argument for case (1), § 39.

Similarly the case III′ is disposed of.

Chapter III. Elliptic invariant points. Stable case.

§ 42. Existence of closed invariant curves in the stable case.

In the integrable elliptic case there is a family of closed analytic curves $F^* = \text{const.}$ about the invariant point, each invariant under T but not of the type above considered since these curves do not pass through the invariant point. Such an invariant point is stable of course.

A somewhat analogous property can be established in the non-integrable stable case. Let us understand by a *closed curve* the boundary of a simply connected open continuum in the finite plane, while regarding that plane as completed by the adjunction of a 'point at infinity'.

In the stable case there exist an infinite number of invariant closed curves surrounding the invariant point and lying within any prescribed neighborhood of it.[1]

[1] Compare the method of proof with a proof given by H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 3, Paris, 1899, pp. 149—151.

Choose any arbitrarily small neighborhood of the invariant point. It is then possible to find a second neighborhood $r \leq \delta < d$ such that any point of this latter neighborhood remains within the first under indefinite iteration of T. This is the direct statement of the property of stability.

Now the open region $r < \delta$ and all of its images under T include (o, o) as an inner point and overlap. Let us speak of a point P as *occluded* by this set of regions if it is possible to draw a regular closed curve lying entirely within the set and enclosing P and (o, o). The set of occluded points Σ is evidently an open simply connected continuum containing all of the set of regions.

The image continuum Σ_1 is also made up of points Σ; the curve enclosing P and (o, o) is carried into a curve enclosing P_1 and (o, o), lying within the set of regions, and so P_1 is occluded, i. e. is a point of Σ.

Now Σ cannot contain points not in Σ_1 since then $\int\int Q\,du\,dv$ would be larger over Σ then over Σ_1. Hence Σ_1 coincides with Σ. The boundary of Σ is therefore an invariant curve lying in the arbitrary neighborhood $\delta \leq r \leq d$ and surrounding (o, o). Since d is arbitrary there is clearly an infinitude of such curves, invariant under both T and T_{-1}.

Conversely, if there is an infinitude of such invariant curves about (o, o), *that invariant point is clearly stable.*

§ 43. Some fundamental properties in the case II′, $l = 1$.

The cases I′, II′, $l = 1$, may be regarded as constituting the non-specialized case of an invariant point. In the second of these cases we have the first possibility of stability. The discussion of this elliptic case II′, $l = 1$ which we shall make (both in the stable and unstable case) will be based on certain properties established in the present paragraph.

Let us choose variables u, v which osculate the normalizing variables U, V of § 22, formula (19), to the order $\mu\,(\mu > 2)$. We will then have

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
u_1 &= u \cos[\theta + c(u^2 + v^2)] - v \sin[\theta + c(u^2 + v^2)] + P(u, v),\\
v_1 &= u \sin[\theta + c(u^2 + v^2)] + v \cos[\theta + c(u^2 + v^2)] + Q(u, v),
\end{aligned}
$$

in which P, Q are given by convergent power series which begin with terms of the $(\mu + 1)$th or higher degree.

We shall assume $c > 0$ for definiteness. It is clear that in the contrary case

T_{-1} will be of this same form with $-c$ replacing c, so that our assumption is no essential restriction.

The particularly simple integrable case $P = Q = 0$ affords a clear insight as to the character of T. Circles with $(0, 0)$ as center are rotated into themselves through an angle $\theta + cr^2$, increasing with or decreasing with the radial distance r according as $c > 0$ or $c < 0$.

This special case shows clearly the *vortical* nature of the transformation T in the neighborhood of the invariant point.

It will be convenient for us to introduce polar coördinates r, φ. In these variables the equations above take an equivalent form

$$r_1 = r + R(r, \varphi), \quad \varphi_1 = \varphi + \theta + cr^2 + S(r, \varphi), \tag{28}$$

where

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + 2r(P\cos(\varphi + \theta + cr^2) + Q\sin(\varphi + \theta + cr^2)) + P^2 + Q^2} - r, \\ S = \tan^{-1}\dfrac{-P\sin(\varphi + \theta + cr^2) + Q\cos(\varphi + \theta + cr^2)}{r + P\cos(\varphi + \theta + cr^2) + Q\sin(\varphi + \theta + cr^2)}. \end{cases} \tag{29}$$

Since P, Q are analytic power series in r beginning with terms of degree $\mu + 1$ or higher, and with coefficients analytic in φ with period 2π, it is apparent that R, S are continuous functions of r, φ for $r \geqq 0$, expansible as power series in r with coefficients analytic in φ of period 2π. The first of these will begin with terms of at least the $(\mu + 1)$th degree in r, while the second will begin with terms of at least the μth degree.

These same considerations show that R, S admit continuous partial derivatives in r, φ of all orders.

The coördinates r, φ will be regarded constantly as rectangular coördinates in an $r\varphi$-plane, so that the r-axis corresponds to the invariant point, and the half plane $r > 0$ to the uv-plane. Two points for which the coördinates r are the same, but for which the coördinates φ differ by a multiple of 2π, are called *congruent*. Two congruent points represent the same point of the uv-plane.

Suppose now that we have a point in the $r\varphi$-plane and a direction at the point given by $\dfrac{d\varphi}{dr}$, which is the reciprocal of the slope. The corresponding reciprocal slope at the transformed point under T is then given by $\dfrac{d\varphi_1}{dr_1}$. This quantity may be computed by means of (28) and has the value

$$\frac{d\varphi_1}{dr_1} = \frac{\dfrac{d\varphi}{dr} + 2cr + \dfrac{dS}{dr}}{1 + \dfrac{dR}{dr}}.$$

where the indicated differentiation is directional in character.

From this equation there results

$$\frac{d\varphi_1}{dr_1} - \frac{d\varphi}{dr} = 2cr + \frac{\dfrac{dS}{dr} - \left(2cr + \dfrac{d\varphi}{dr}\right)\dfrac{dR}{dr}}{1 + \dfrac{dR}{dr}}.$$

If we evaluate the directional derivatives on the right in terms of the partial derivatives of R, S, we perceive at once that

$$\left|\frac{dR}{dr}\right| = \left|\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial R}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dr}\right| < hr^{\mu}\left\{1 + \left|\frac{d\varphi}{dr}\right|\right\},$$

$$\left|\frac{dS}{dr}\right| < hr^{\mu-1}\left\{1 + \left|\frac{d\varphi}{dr}\right|\right\},$$

and thence

$$\left|\frac{d\varphi_1}{dr_1} - \frac{d\varphi}{dr} - 2cr\right| < h'r^{\mu-1}\left\{1 + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right\},$$

as long as $\left|\dfrac{d\varphi}{dr}\right| < \varepsilon r^{1-\mu}$ say.

That is, we may write

$$(30) \qquad \frac{d\varphi_1}{dr_1} - \frac{d\varphi}{dr} = 2cr + \chi r^{\mu-1}\left\{1 + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right\},$$

where $|\chi| < h'$ as long as $\left|\dfrac{d\varphi}{dr}\right|$ is restricted as stated.

Let us term the small sheaf of slopes $\dfrac{dr}{d\varphi}$ at any point in the $r\varphi$-plane for which

$$(31) \qquad \left|\frac{dr}{d\varphi}\right| \leqq \frac{1}{\varepsilon} r^{\frac{\mu}{2}-1}$$

the *barred angle.* When (31) is not satisfied, the left-hand side of (30) is positive. Our conclusion may be formulated as follows:

In the $r\varphi$-plane the transformation T leaves r unaltered to terms of order $\mu+1$ in r, increases φ by $\theta+cr^2$ to terms of order μ, and rotates any direction not in the barred angle in a negative sense.

An entirely analogous discussion of T_{-1} shows that, if ε be taken small enough in defining the barred angle, we have

In the $r\varphi$-plane T_{-1} rotates any direction not in the barred angle in a positive sense.

A quantitative discussion of the amount of rotation of directions can be based on (30) and a similar equation for $\frac{d\varphi_{-1}}{dr_{-1}}$.

In particular we note that

Under iteration of T (T_{-1}) any direction at a point is ultimately rotated into or past a barred angle negatively (positively) if r remains small.

If possible assume this statement not to be true.

In the first place we must have $\lim r = 0$. For in the contrary case there is a rotation of definite negative amount occurring indefinitely often, and the statement must hold.

If we let $\varphi' = \frac{d\varphi}{dr}$ the inequality (30) gives

$$\Delta\varphi' > 2ar_1, \qquad (a > 0),$$

as long as r remains small and φ' does not lie in the barred angle. At the same time the formula (28) for r_1 shows that

$$|\Delta r| < br_1^{\mu+1}, \qquad (b > 0).$$

Consequently we have

$$\left|\frac{\Delta r}{\Delta\varphi'}\right| < \frac{b}{2a} r^{\mu}.$$

Hence r diminishes as φ' increases not more rapidly than if

$$\frac{dr}{d\varphi'} = -\frac{b}{2a} r^{\mu}.$$

But a direct solution of this differential equation establishes the fact that φ' must increase indefinitely and be of order at least $r^{1-\mu}$ if r is to approach zero. This is in contradiction with the hypothesis that the direction is not rotated into or past the barred angle.

Thus we see that the stated property holds for T. In the same way it may be proved for T_{-1}.

The following property is also useful:

Given an arbitrary positive K, then for any point (r, φ) with $0 < r < \delta$ (δ sufficiently small) we have

$$\varphi_n > \varphi + n\theta + K$$

for $n \geq N$ until $r_n > d$.

From the equations (28) we get the inequalities

$$|r_1 - r| < c' r^\mu, \quad \varphi_1 - \varphi > \theta + c'' r^2, \qquad (c' > 0,\ c'' > 0).$$

From the second of these inequalities there results

$$\varphi_n > \varphi + n\theta + c'' \sum_{j=0}^{n-1} r_j^2$$

as long as $r, r_1, \ldots, r_{n-1}$ are less than d. It suffices to prove that the sum on the right exceeds $\frac{K}{c''}$ before $r_n > d$, provided that r is sufficiently small. Now from the first inequality we deduce

$$|r_p - r_q| < c' \sum_{j=q}^{p-1} r_j^\mu .$$

If r_p and r_q are the maximum M and minimum m of r_j, this yields for $\mu > 3$

$$M - m < c' M^2 \sum_{j=q}^{p-1} r_j^2 ,$$

whence

$$\sum_{j=q}^{p-1} r_j^2 > \frac{1}{c' M}\left(1 - \frac{m}{M}\right).$$

Consequently, if r is sufficiently small and varies to a relatively much larger (but still small) value or to a relatively much smaller value, the corresponding sum $\sum_{j=q}^{p-1} r_j^2$ is very large and exceeds $\frac{K}{c''}$.

§ 44. Nature of the invariant curves.

Let us define a *regular neighborhood* of an elliptic invariant point (o, o) as a neighborhood such that any radial direction in the $r\varphi$-plane is rotated through a negative angle by T, and through a positive angle by T_{-1}.

Probably a hyperbolic point cannot lie in a neighborhood of this kind.

The reasoning of § 43 shows a regular neighborhood of this type to exist in case II′, $l = 1$.

The elliptic case does not arise in the general case II″ or III′. But a direct computation shows that, in case II′, l finite, and in what may be termed the general elliptic subcases II″ and III′, a regular neighborhood exists.

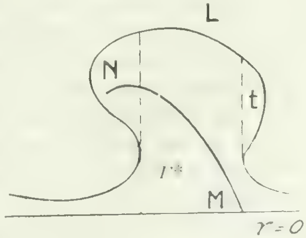
Throughout such a neighborhood we can evidently construct a barred angle through each point of the neighborhood such that directions outside the barred angle are rotated negatively by T and positively by T_{-1}, and ultimately are rotated into or past the barred angle.

In a regular neighborhood of an elliptic invariant point of type II′, $l = 1$, any invariant curve enclosing the invariant point meets every radius vector through the invariant point in only one point. If the barred angle in the plane be drawn at the corresponding point the curve lies entirely within it on either side in the vicinity of the point.

In order to demonstrate this fundamental property of the invariant curves we make use of the $r\varphi$-plane employed above.

Let us suppose first that the invariant curve L under consideration is defined by means of an inner simply connected open continuum Γ containing (o, o) in the uv-plane.

If the first italicized statement is not true consider the continuum of points accessible from $r = 0$ along a perpendicular line $\varphi = \text{const.}$ in the $r\varphi$-plane without passing a point of the invariant curve itself. This open continuum Γ^* forms all or part of the open continuum Γ bounded by the invariant curve L and $r = 0$ (see figure). The boundary of Γ^* is evidently a closed curve made up of points of L and open segments of lines $\varphi = \text{const.}$



If Γ and Γ^* coincide then either the first property is true or there exist one or more boundary segments $\varphi = \text{const.}$ of Γ and

Γ^*. Now either Γ^* lies to the right or to the left of such a segment. In the first case the tangent to the boundary makes an angle $\frac{\pi}{2}$ with the φ-axis. An application of T_{-1} will carry this segment into another with tangent argument greater than $\frac{\pi}{2}$. But, on account of the form of the boundary, any tangent argument must be intermediate between $-\frac{\pi}{2}$ and $\frac{\pi}{2}$, so that this is not possible. In the same way it may be concluded that Γ, Γ^* cannot lie to the left of such a segment $\varphi = \text{const.}$ Hence there is no such segment, if Γ and Γ^* coincide.

In this case of coincidence every radial line must meet Γ only once, as we wished to prove.

Let us now turn to the case when the two continua Γ and Γ^* are distinct.

Consider the part $\overline{\Gamma}$ of Γ accessible from $r = 0$ along a regular simple curve in Γ (such as MN in figure above) with tangent argument never less than $\frac{\pi}{2}$. This part of Γ evidently includes Γ^*, but can only coincide with Γ^* if there are no bounding segments $\varphi = \text{const.}$ of Γ^* which have a part (see region t of figure above) of Γ on the right. By the transformation T_{-1} which increases every tangent argument which is equal to $\frac{\pi}{2}$ and does not diminish to $\frac{\pi}{2}$ any greater argument, the points of $\overline{\Gamma}$ are carried into points of Γ which are still accessible from $r = 0$ along an auxiliary regular simple curve in Γ with tangent argument greater than $\frac{\pi}{2}$, namely along the image of the auxiliary curve. Thus the continuum $\overline{\Gamma}_1$ forms part of $\overline{\Gamma}$. Hence $\overline{\Gamma}_1$ coincides with $\overline{\Gamma}$, since T is conservative.

Consequently Γ^* has no boundary segments $\varphi = \text{const.}$ with part of Γ on the right. Similarly we can exclude the possibility of boundary segments $\varphi = \text{const.}$ of Γ^* with part of Γ to the left. Hence Γ^* coincides with Γ. The first italicized statement has previously been demonstrated in this case.

It is now easy to show that the invariant curve lies within the barred angle in the vicinity of any one of its points.

Suppose for example it lies partially above the upper right arm of this angle. By sufficient iteration of T_{-1} the direction of this arm rotates positively past the vertical, and it is intuitively clear that the radial line $\varphi = \text{const.}$ through this point will meet the invariant curve more than once, contrary to what has been proved above.

If the invariant curve is defined by means of an outer continuum, essentially the same argument leads us to the same conclusion.

§ 45. Rotation numbers.

Consider any closed set of points defined by an angular coördinate τ of period 2π. Let us suppose a transformation given which takes each point of the set into a definite point τ_1, in such wise that if P precedes Q (i. e. the τ of P is less than the τ of Q) then P_1 precedes or coincides with Q_1, and also such that τ_1 varies continuously with τ. In particular if P and Q are the same point, represented by angular coördinates τ, τ' differing by $2l\pi$, then τ_1, τ_1' differ by $2l\pi$ also.

Consider now the difference $\tau_k - \tau$ for all points P. If τ increases through all the values of the set by 2π so does τ_k. It follows that we have

$$a^{(k)} \leqq \tau_k - \tau \leqq b^{(k)}, \qquad (b^{(k)} < a^{(k)} + 2\pi)$$

In fact suppose $\tau_k - \tau$ is a minimum for $\tau = \tau^*$ and let τ vary by 2π from this minimum. Since τ_k increases but only by 2π altogether we have at the maximum of $\tau_k - \tau$

$$\tau_k - \tau < \tau_k^* - \tau^* + 2\pi,$$

which establishes the statement.

There is a number α such that for every k

$$\frac{a^{(k)}}{k} \leqq \alpha \leqq \frac{b^{(k)}}{k}.$$

For, if this is not the case, two intervals $\left(\frac{a^{(k)}}{k}, \frac{b^{(k)}}{k}\right)$, $\left(\frac{a^{(l)}}{l}, \frac{b^{(l)}}{l}\right)$ will fail to have a common point so that for instance

$$\frac{b^{(k)}}{k} < \frac{a^{(l)}}{l},$$

whence

$$l\,b^{(k)} < k\,a^{(l)}.$$

But, since $\tau_k - \tau \leqq b^{(k)}$ for any τ, we have successively

$$\tau_k - \tau < b^{(k)}, \quad \tau_{2k} - \tau_k \leqq b^{(k)}, \ldots \quad \tau_{lk} - \tau_{(l-1)k} < b^{(k)},$$

whence by addition

$$\tau_{lk} - \tau < l\,b^{(k)}.$$

Also since $\tau_l - \tau > a^{(l)}$ for any τ we get similarly

$$\tau_{lk} - \tau > k\, a^{(l)}.$$

These two inequalities and the inequality written above are contradictory.

The number α will be called the *rotation number* of the transformation $\tau_1 = f(\tau)$.[1] Evidently α measures what may be regarded as the mean angular advance of the points under this transformation, inasmuch as we have for any τ and k

$$|\tau_k - \tau - k\alpha| < 2\pi.$$

Since $k\alpha$ lies on the interval $(a^{(k)}, b^{(k)})$ some points advance more than $k\alpha$, and some by less than $k\alpha$.

When $\tau_1 = f(\tau)$ is a *one-to-one* transformation, then its inverse has evidently the negative rotation number $-\alpha$.

If $\frac{\alpha}{2\pi}$ is rational, say $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{p}{q}$, p, q relatively prime integers, then we have

$$\frac{a^{(q)}}{q} < \frac{2p\pi}{q} \leq \frac{b^{(q)}}{q}$$

and hence

$$a^{(q)} < 2p\pi \leq b^{(q)}.$$

Consequently $\tau_q - \tau$ is exactly equal to $2p\pi$ for some τ. It follows that, if $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{p}{q}$, there is at least one point P for which τ increases by precisely $2p\pi$ upon q iterations of the transformation.

§ 46. Rotation numbers along invariant curves.

Returning now to the invariant curves about an invariant point in the elliptic case II′, $l = 1$, it appears that for each such curve there is a definite rotation number, for T yields a one-to-one, continuous transformation of each such curve into itself which preserves order.

If such an invariant curve has a rotation number commensurable with 2π, say $\frac{2p\pi}{q}$, it is made up of a finite number of analytic arcs ending at hypercontinuous points, invariant under T_q.

[1] Introduced by Poincaré (loc. cit. § 8).

For mark off the invariant points under T_q on this curve about (0, 0). There exists at least one such point by the remark proved in § 45. The invariant curve near these invariant points forms then invariant curves in the sense of § 41. These points are thus hyperbolic and the invariant curves are hypercontinuous at the invariant points. But, by indefinite iteration of T_q or T_{-q}, the part of the arc is carried into all of itself, since there are no invariant points on the arc save at its end points.

There are only a finite number of isolated invariant points on the invariant curve under T_q or else the limit invariant point would have a non-analytic invariant curve of the type excluded in § 41.

Thus the statement is proved.

If two such invariant curves have one or more points in common, the rotation numbers of the two curves are the same and of the form $\frac{2p\pi}{q}$. *These common points and arcs are finite in number and invariant under* T_q.

If two invariant curves have points in common, but nevertheless are not coincident, there will be one or more continua included between them. Since the invariant curves are each cut only once by a radial line $\varphi = \text{const.}$ in the $r\varphi$-plane, these continua are of the form

$$f(\varphi) < r < g(\varphi), \qquad \varphi' \leqq \varphi \leqq \varphi''$$

where f, g are continuous functions of φ with $f < g$ for $\varphi' < \varphi < \varphi''$ and $f = g$ for $\varphi = \varphi'$ or $\varphi = \varphi''$.

Evidently the transformation T carries any continuum of this type into another of the same type, included between the same two invariant curves. By further repetition of T this continuum is carried into others which cannot all be distinct inasmuch as $\int\int Q\,du\,dv$ has the same value for any of them, and the total value of this integral taken over the complete neighborhood of the invariant point is finite. Thus after q iterations the original continuum is carried into itself, and its two boundary arcs are carried into themselves. The end points of these arcs are therefore invariant under T_q.

If these invariant points are rotated p times around the invariant point by T_q, clearly the rotation number belonging to either invariant curve is $\frac{2p\pi}{q}$. This demonstrates the first part of our statement.

Moreover it has been seen above that on such an arc there are a finite number of invariant points and invariant point arcs of the specified type under

T_q. Any point of an invariant arc terminated by invariant points will approach one end or the other under indefinite iteration of T_q or of T_{-q}.

If two such invariant curves are entirely distinct from one another, the rotation number of the one further removed from the invariant point is the greater, and both rotation numbers exceed θ.[1]

Consider the two curves in the $r\varphi$-plane. Since T carries a line $\varphi =$ const. in a regular neighborhood into a curve cut by any line $\varphi =$ const. at most once we see that φ_1 for the outer curve exceeds φ_1 for the inner curve, and both are greater than the initial φ by more than θ. Hence we can affirm that φ_1 along the outer curve exceeds φ_1 along the inner curve by a definite amount δ, and that this φ_1, in turn, exceeds the initial φ by at least $\theta + \delta$.

This fact shows at once that the rotation number of the outer curve is at least as great as that of the inner curve. For, points initially with the same φ on the two curves are taken into points such that the φ of the outer curve exceeds that of the inner curve by at least δ under indefinite iteration of T.

To establish our statement that the outer curve has the greater rotation number it is thus only needful to exclude the possibility that their rotation numbers are the same.

If the two rotation numbers are the same and rationally related to 2π, then for some q the transformation T_q will have a rotation number $2p\pi$ (p an integer), so that there will exist points on both curves which are carried into themselves by this transformation, φ being increased by precisely $2p\pi$.

Suppose now that we follow the transformation T_q by a rotation in the uv-plane through $2p$ complete negative revolutions. The resultant transformation will evidently be conservative with the same invariant area integral as before, and the two curves will appear as invariant curves with the rotation number o. It is also evident that by this resultant transformation points on the outer curve have their coördinate φ increased by at least δ more than the increase in the like coördinate of the corresponding point on the inner curve.

Construct a curvilinear quadrilateral in the $r\varphi$-plane as follows. One vertex will be an invariant point of the inner curve under the resultant transformation and a second vertex the corresponding point on the outer curve. A third vertex will be the first invariant point on the outer curve with greater φ, and a fourth the corresponding point of the inner curve. The quadrilateral will then consist of the two radial segments $\varphi =$ const. through the two pairs of corresponding points, and the two arcs of the invariant curves included between them.

[1] The assumption $c > o$ is still made. This entails no specialization of course.

Consider the image of this quadrilateral under the resultant transformation. The invariant points remain fixed, but the two sides $\varphi = \text{const.}$ are carried into curves with tangent argument which is everywhere less than $\frac{\pi}{2}$, the argument before the transformation. In the image quadrilateral then, the curvilinear side through the invariant point on the inner curve lies to the right of the point, while the opposite side through the other invariant point on the outer curve lies to the left of this second invariant point. Consequently the quadrilateral has been taken into part of itself, the two sides formed of arcs of the invariant curves being carried over into part of themselves. This is impossible of course with a conservative transformation.

It is still easier to dispose of the case when both rotation numbers θ' are assumed to be equal but not rationally related to 2π. Here again if a point on the outer invariant curve has a coördinate φ not less than that of a point on the inner invariant curve, then, under indefinite iteration of T, it will always be true that the coördinate of any image of the first point will be greater by at least δ than the coördinate φ of the like image of the second point.

Choose now a positive integer q such that $q\theta'$ is less than some integral multiple of 2π, say $2p\pi$, by a quantity less than δ. It is always possible to do this precisely because θ' is incommensurable with 2π. Every point on the inner invariant curve will then be advanced by less than $2p\pi$ under T_q. On the other hand, since the transformation T_q has a rotation number $q\theta'$, it is always possible to choose a point of the inner curve which has its φ coördinate increased by at least $q\theta'$ under T_q. The corresponding point of the outer curve then has its φ coördinate increased by at least as much as $q\theta' + \delta$ i. e. by more than $2p\pi$. Hence the rotation number of the outer curve under T_q is at least as great as $\frac{2p\pi}{q}$. This is impossible.

§ 47. On rings of instability.

If C_1 and C_2 are invariant curves in a regular neighborhood of an invariant point in the stable case II', there may either be further invariant curves on the ring C_1C_2 or not. If there are, the ring C_1C_2 may be subdivided further into similar rings. Thus the neighborhood of the invariant point is divided into an infinite succession of *rings of instability* (reducing to single invariant curves in the integrable case). Each ring of this sort is bounded by two invariant curves

$C'C''$ and has no invariant curve upon it other than C' and C''. We shall only prove:

Let C', C'' be entirely distinct invariant curves forming the boundary curves of a ring of instability. Then for any $\varepsilon > 0$ an integer N can be assigned such that a point P' exists within a distance ε of any point P of C' (or C'') which goes into a point Q' within distance ε of any point Q of C'' (or C') in $n < N$ iteration of T (or T_{-1}).

In the contrary case points P and Q exist for which no point P' can be found for some Q' and any N. Consider a small circle with P as center and of radius ε in this case. By iteration of T this region is carried into others, all lying partly within the ring, but not extending to C''. Consider the open continuum lying outside of C' and occluded by all of these regions. This continuum is carried into all or part of itself by T. But it cannot be carried into part of itself. Hence the boundary curve is invariant under T. But this curve is distinct from C'' as well as C', since it does not approach within distance ε of the point L. Such an invariant curve does not exist in $C'C''$ by hypothesis.

§ 48. The other stable elliptic cases.

In the case II$'$, $l \neq 1$ but finite, the fundamental equalities (28) may be replaced by

$$r_1 = r + R(r, \varphi), \quad \varphi_1 = \varphi + \theta + cr^{2l} + S(r, \varphi),$$

where R, S have the same character as before. Hence we see that a regular neighborhood of (0, 0) exists in this case. Here the arguments made above for the case II$'$, $l = 1$, apply without modification.

This is also true in the general elliptic subcases II$''$, III$'$ (see § 45).

In the case II$'$, l finite, in the general elliptic subcases II$''$, III$'$, and, more generally, whenever there exists a regular neighborhood of an elliptic invariant point, all of the properties of invariant closed curves established in case II$'$, $l = 1$, continue to hold.

It is highly probable that an integer analogous to l in the case II$'$ can be defined in all elliptic cases and that, if the notion of regular neighborhood be generalized appropriately, such a neighborhood exists when l is finite. When $l = \infty$ it appears possible that an invariant linear family of series $G + cH$ exists.

The formal and analytical questions to be answered here are extremely important and interesting.

§49. Invariant curves and the function F^*.

In case II', $l=1$, the invariant closed curves investigated above are closely like the curves $F=$ const. where F is a polynomial in u, v obtained by breaking off F^* at terms of high degree μ.

To see this let us employ the variables u, v osculating the normalizing variables of § 22 to high order. The formulas (28) and (31) show that the tangent directions along the invariant curve in the $r\varphi$-plane have a slope less than $\frac{1}{\varepsilon} r^{\frac{\mu}{2}-1}$. If the slope exceeds this magnitude the invariant curve will not lie within the barred angle at the corresponding point of the invariant curve.

On the other hand F^* is given by $-\frac{1}{2}\theta(u^2+v^2)$ out to terms of degree $\mu+1$.

Combining these results and observing that μ is arbitrary, we find:

In the stable case II', $l=1$, if F stands for the polynomial in u, v formed by the terms of degree less than μ in F^*, then $|F'-F''|<k|F'|^{\frac{\mu}{2}}$ at any points P', P'' of an invariant curve.

Evidently similar results hold in any case II', II'', III', III'' when a regular neighborhood exists.

§ 50. Remark on the integrable elliptic case.

In the integrable elliptic case there is a family of closed analytic invariant curves $F^*=$ const. about the invariant point.

Since an area integral $\int\int Q(u,v)\,du\,dv$ is invariant under T, an integral of the form

$$\int\int P(\sigma, \tau)\,d\sigma\,d\tau$$

remains invariant, where σ is a parameter varying from curve to curve, and τ an angular parameter varying from 0 to 2π as each curve is described. But T has the form

$$\sigma_1=\sigma, \quad \tau_1=f(\tau, \sigma)$$

so that

$$P(\sigma_1, \tau_1)\frac{\partial f}{\partial \tau}=P(\sigma, \tau).$$

Consequently along any particular curve

$$\int_A^B P(\sigma, r)\, dr = \int_{A_1}^{B_1} P(\sigma_1, r_1)\, dr_1.$$

Thus, if $\int P(\sigma, r)\, dr$ be taken as proportional to a modified parameter, the equations for T take the form

$$\sigma_1 = \sigma, \quad r_1 = r + g(\sigma),$$

where g is an analytic function of σ for $\sigma \neq 0$.

A noteworthy special feature of this case now appears:

In the integrable elliptic case if any invariant closed curve of the analytic family $F^* = const.$ has a rotation number $\frac{2p\pi}{q}$, then T_q leaves every point of the curve invariant.

It is obvious that the integrable case is not the general case, inasmuch as such an invariant point curve will not exist in general.

It would be a vital advance to be able to determine the distribution of the invariant curves in the non-integrable case by analytic tests. This appears to be possible only in the case of a rotation number commensurable with 2π, when the invariant curve is hypercontinuous.

Chapter IV. Elliptic invariant points. Unstable case.

§ 51. Existence of α and ω points. General case.

In the unstable case a neighborhood of the invariant point (0, 0), of the form $r \leq d$ say, can be so taken that, under indefinite iteration of T or of T_{-1}, points arbitrarily near (0, 0) leave this neighborhood. It has previously been pointed out that this property holds for both T and T_{-1} if it holds for either (§ 42). We restrict attention to such a neighborhood D.

Let us fix attention upon *ω points* which remain in D under indefinite iteration of T and upon *α points* which remain in D under indefinite iteration of T_{-1}. The two sets of points are clearly closed sets.

An ω point is evidently carried into an ω point by T, and also by T_{-1} if its image under T_{-1} lies in D. Similar results hold for α points.

For an unstable elliptic point the point set of $\alpha(\omega)$ *points has a connected subset* $A(\Omega)$ *extending from* $r=0$ *to the boundary of* D.[1]

Take a very small neighborhood $r \leqq \delta$ of $(0, 0)$. Under iteration of T_{-1} N times (N large), some point of the image extends out to $r=d$, by virtue of the instability. Within this image we can draw a curve from $r=0$ to $r=d$ which remains within D under N iterations of T of course. This curve cuts any closed curve about $(0, 0)$ in at least one point. By a limiting process, in which N becomes larger and larger, we see that at least one ω point lies on any such curve. Similarly an α point lies upon it.

It is then intuitively evident that the italicized statement holds, inasmuch as a point α lies upon every such closed curve in D which encloses the invariant point.

The following is evident:

The connected sets $A(\Omega)$ *are carried into parts of themselves by* T_{-1} (T) *and into all of themselves together with a part outside of* D *by* T (T_{-1}).

Let us term an unstable invariant point *regular* if there do not exist closed invariant curves in D of which it is a boundary point.

The regular case embraces the general unstable elliptic case for l finite and indeed any case in which the invariant point is surrounded by a regular neighborhood. Consider for simplicity the general case II′, $l=1$. Here $r=0$ functions as an invariant curve in the $r\varphi$-plane of polar coördinates. If another invariant curve has a point in common with this invariant curve (i. e. with $r=0$) the rotation number is 0 of course and commensurable with 2π (§ 46), and this is impossible in case II′ by definition.

In the regular case the set $A(\Omega)$ *connected with* $r=0$ *tends uniformly to* $r=0$ *under iteration of* T_{-1} (T).

Suppose if possible that this does not hold for the set Ω. There exists then a quantity $\delta>0$ such that for n indefinitely large the set $T_n(\Omega)$ does not lie entirely within $r \leqq \delta$. Now any point of $T_n(\Omega)$ is an ω point which remains in D under n iterations of T_{-1} also. Therefore, recalling that Ω and its images are connected with $r=0$, we see that any curve within $r \leqq \delta$ and surrounding $r=0$ has on it at least one point P which remains in D under indefinite iteration of T and n fold iteration of T_{-1} (n arbitrarily large). Hence, by a limiting process, we conclude the existence of a point of type ω and α on this curve.

[1] That is, a chain of α (or ω) points, each point arbitrarily near its successor, extending from $r=0$ to $r=d$, can be found.

Thus we arrive at a set of points $A\Omega$ common to A and Ω, and connected with $r=0$, which reaches out at least to $r=\delta$. This set is clearly carried into itself by T and forms the inner boundary of an open continuum. Thus the set $A\Omega$ forms a closed invariant curve within the scope of the definition.

However, in the regular case for a sufficiently restricted region D such an invariant curve does not exist. Thus we have reached an absurdity, so that the italicized statement under consideration must be true.

An obvious consequence of this property is that the content of the set of $A(\Omega)$ points connected with $r=0$ is 0.

We easily infer the following fact to be true:

In the irregular case there exists a connected set of points $A\Omega$ reaching to $r=0$ from $r=\delta>0$ if δ is small enough. The set $A(\Omega)$ tend uniformly toward the set $A\Omega$ under indefinite iteration of $T_{-1}(T)$.

Although the introduction of α and ω points was not necessary in the study of the unstable hyperbolic points, it is instructive to note that the above definitions hold there (and even in the stable elliptic case). In particular the ω points are the points on the analytic invariant curves tending toward $(0, 0)$ or at least not away from $(0, 0)$ under iteration of T. Similarly the α points lie on the invariant analytic curves which tend toward $(0, 0)$ on iteration of T_{-1} or at least do not tend away from it. Thus the sets A and Ω are analytic curves.

In general these two sets have only a finite set of points in common and the points $A(\Omega)$ tend uniformly toward $(0, 0)$ under iteration of $T_{-1}(T)$. This is the *regular* case. The *irregular* case arises when invariant point curves are present. These constitute the points $A\Omega$.

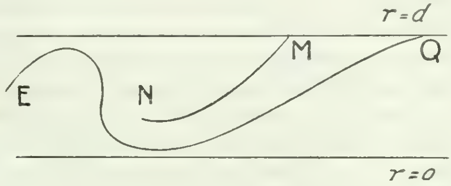
Thus our methods in the hyperbolic case have revealed the precise nature of the α and ω points — these fall along certain analytic branches ending at the invariant point. In the following paragraphs we shall extend the idea of branches to the unstable elliptic case.

§ 52. Further study of the regular case II', l finite.

Let us confine attention to the $r\varphi$-plane of polar coördinates and let us fix attention upon any point Q which belongs to the set $A(\Omega)$ of points $\alpha(\omega)$ connected with $r=0$. At least one such point Q lies upon $r=d$. Let Σ denote the set of $\alpha(\omega)$ points connected with Q for $r>\delta>0$, where δ is an arbitrarily small quantity depending on the point of Σ to be obtained.

If a continuum abutting on $r=d$ has the property that all of its points are accessible from $r=d$ along regular curves without double points and with tangent argument greater (less) than $-\frac{\pi}{2}$, its boundary will be said to be *left-handedly* (*right-handedly*) *accessible*. Thus the curve of the figure below ending at Q is right-handedly accessible with MN an auxiliary curve with tangent argument less than $-\frac{\pi}{2}$. With this definition we have the following:

In the case II', l finite, the continuum of points accessible from $r=d$ along a regular curve to the left (right) of the set Σ of $\alpha(\omega)$ points is right-handedly (left-handedly) accessible, and its boundary extends below $r=d$ indefinitely far to the left (right) (see figure).



Take first $l=1$. The proof of the first part of this statement follows the line of argument already employed in § 44. If it is not true, there will exist above Σ and on its left regions inaccessible from $r=d$ along regular curves without double points and with tangent argument less than $-\frac{\pi}{2}$. Since T_{-1} rotates vertical lines positively such regions will be carried into similar regions toward $r=0$ by iteration of T_{-1}. This fact stands in contradiction with the existence of an invariant area integral.

In particular the point Q is the point furthest to the right of the continuum so defined.

If now the second part of the statement fails to hold, the set Σ does not extend indefinitely far to the left. Thus we have a connected set Σ extending from $r=0$ to $r=d$ for which φ is limited. But it has been shown that under iteration of T_{-1} the range of variation of φ along such a set increases indefinitely (§ 43). Hence an image exists which will cross Σ from left to right. Here we allow the use of congruent images. But this shows that Σ must be extended further to the left, since it contains all connected α points. This is absurd.

The properties stated in § 43 extends at once to the general case II', l

finite, so that our statement is true in this case also. It is probably true whenever a regular neighborhood surrounds the invariant point.

Definition. An unstable invariant point is *branched of* $\alpha(\omega)$ *type* if a continuos curve C from $r=d$ to $r=0$ can be drawn in the uv-plane with no $\alpha(\omega)$ points on C which are connected to the invariant point by $\alpha(\omega)$ points. In the contrary case it is *unbranched.*

For the elliptic unstable case II', l *finite, of* $\alpha(\omega)$ *branched type, the sets* $A(\Omega)$ *fall into a set of closed connected branches extending indefinitely far to the left (right) with* $\lim r=0$ *for* $\lim \varphi = -\infty\ (+\infty)$, *but only a finite distance to the right (left).*

Consider first the set Σ and its congruent sets in the branched case. These divide the region $r \leq d$ into component continua and their limit points. The continuous curve from $r=d$ to $r=0$ in the uv-plane which exists in the branched case becomes a continuous curve lying in one of these continua and approaching the line $r=0$. Since each of these continua lies to the right of an initial point such as Q this auxiliary curve extends only a finite distance to the right and infinitely far to the left, approaching $r=0$. The *analysis situs* of the figure now renders it clear that each lower boundary curve of one of these continua tends uniformly toward $r=0$ as φ becomes negatively infinite.

But the set Σ cannot cross the auxiliary curve and its congruent images. Hence Σ forms a closed connected set of α points having the properties specified for the branches.

Two α points A and B connected with $r=0$ through α points will be said to belong to the same α branch if no auxiliary curve C can be drawn between these points to $r=0$. Otherwise two such points belong to *different* branches. If B lies to the right of C and A to the left then we will say that the B branch lies to the right of the A branch.

A branch clearly includes all α points connected with one of its points for $r>\delta>0$.

It is apparent that if the A branch lies to the left of the B branch and the B branch to the left of another branch, then the A branch lies to the left of this branch also. Thus there is a cyclic ordering of the branches.

The existence of a single auxiliary curve C ensures the existence of an infinitude of distinct branches, occurring in congruent sets. Such branches have clearly the form specified, inasmuch as these lie between congruent curves C.

By the transformation T any α branch is carried into a part within $r \leq d$ and certain other portions outside. However, there is clearly an α branch of the image wholly within $r \leq d$. If there were more than one, these branches

together with the parts outside of $r \leq d$ would enclose an area, and this area would tend toward $r = 0$ upon iteration of T. There must then be only one image branch under T.

By the transformation T_{-1} an α branch is evidently carried into a part of such a branch or all of it.

Similar remarks hold for the ω branches.

In the branched elliptic unstable type II', l finite, the transformation T (T_{-1}) carries an $\alpha(\omega)$ branch into such a branch (as specified). The cyclic order of the branches is preserved.

The last part of the statement is obvious and the first part has just been proved.

It is clear that we have associated with a branched point an α and ω rotation number, say θ_α and θ_ω, indicating the rotation of the branches.

The identity of the branches in no way depends on d. Upon iteration by T each branch is carried into $r \leq \delta$ where δ is arbitrarily small.

Thus θ_α and θ_ω in no wise depend upon d.

For a branched invariant point in the unstable elliptic case II', l finite, the rotation number of the α (ω) branches is at least (at most) θ.

First, we shall prove that if θ is positive the rotation number θ_α is positive or zero. In fact if $\theta > 0$ the branch Σ with terminal point Q on $r = d$ goes into a branch Σ_{-1} entirely to the left of Q. Now Σ_{-1} cannot lie below Σ for then the region made up of points below Σ and to the left of Q is carried by T_{-1} into a region lying under Σ and thus forming only part of the region below Σ and to the left of Q. In the uv-plane we have a corresponding area which is carried into part of itself, which is not possible. Thus Σ is taken into a branch to its left and above it, which shows that θ_α is positive or zero in this case.

Consider now the general case and suppose if possible $\theta_\alpha < \theta$. Find an integer m such that for an integer k

$$m\theta_\alpha < 2k\pi < m\theta.$$

Consider the transformation T' obtained by following T_m by a shift of the plane $2k\pi$ to the left. For T' the rotation number of the invariant point is $\theta' = m\theta - 2k\pi$ and is positive, while $\theta'_\alpha = m\theta_\alpha - 2k\pi$ is the rotation number of the branches and is negative. But T' satisfies all the conditions imposed on T for d sufficiently small. Hence we are brought back to the case proved impossible in the first place.

In the branchless case greater complexity exists. A discussion of this case is much to be desired.

§ 53. Interrelation of α and ω points.

Consider the α and ω points of D which are connected with $r=0$. The first set A forms a closed connected set reaching from $r=d$ to $r=0$. The second Ω has the same properties. In the $r\varphi$-plane it appears at once that the two sets must intersect infinitely often.

Let us develop briefly the proof of this fundamental fact. The basic reason which permits this conclusion is that if we have α and ω curves of the type Σ specified in § 52, one to the left of a point Q of $r=d$ and the other to the right of a point P of $r=d$, and if P is taken to the left of Q, there lies between P and Q a continuum with boundary points all of type α or ω. Thus there are points of this closed boundary of both types, i. e. belonging to the boundaries of both regions.

In the branched elliptic unstable case II', l finite, every α branch intersects every ω branch infinitely often.

In the unbranched case also the A and Ω sets have infinitely many points in common.

In the branched case then we have what may be described as a network of α and ω branches. In the general case it is clear that the A and Ω sets together separate $r=0$ from $r=d'>0$ for d' sufficiently small.

The lack of definiteness in our general conclusion for the elliptic case is in startling contrast with that found in the hyperbolic case. I believe, however, that this corresponds to the extremely general character of the situation. A fundamental distinction between the two cases is this: the natural domain in the hyperbolic case is the complex variable; in the elliptic case, the real.

Chapter V. Recurrent point groups.

§ 54. Point groups.

Consider an analytic closed surface S of any genus and for the present let T denote any one-to-one, direct, analytic transformation of this surface into itself. The problem which we attack is that of determining the behavior of various classes of points of S under indefinite iteration of T and T_{-1}. Hitherto we have only considered points in the vicinity of an invariant point.

Let P be any point of S and consider the infinite sequence of points

$$\ldots, T_{-2}(P), T_{-1}(P), P, T(P), T_2(P), \ldots,$$

which will be termed the *point group* of P. If two members of this sequence are the same, say if $T_\alpha = T_\beta$, $\alpha < \beta$, then we have $T_{\beta-\alpha}(P) = P$. Here the point P will periodically iterate through a set of $\beta - \alpha$ distinct points under T. Thus by considering $T_{\beta-\alpha}$ instead of T we may apply our earlier results to the study of the points near this set of points under iteration of T.

The existence of infinitely many point sets of this particular type and of special properties may be considered as established by general theorems concerning the invariant points of such surfaces.[1] A set of points of this type forms a *periodic point group*.

Every limit point of the set $P, T(P), T_2(P), \ldots,$ will be termed an *ω limit point* of P, and every limit point of the set $P, T_{-1}(P), T_{-2}(P), \ldots,$ will be termed an *α limit point*. A point is counted as often as it appears. In the periodic case the finite set of points are all α and ω limit points, and there are no others.

In all cases the limit points of either class form a closed point set.

The set of α (ω) limit points of P form a set of complete point groups. The distance of $T_k(P)$ from this limit set approaches 0 *for* $\lim k = -\infty\ (+\infty)$.

Let Q be an α limit point which $T_k(P)$ approaches for $k = k_1, k_2, \ldots$. Evidently $T_{k+1}(P)$ will approach $T(Q)$ at the same time. That is to say $T(Q)$, and likewise $T_{-1}(Q)$, are α limit points if Q is. By repetition of this argument we infer that all points of the point group of Q are α limit points.

To establish the second part of the theorem we employ an indirect argument. If $T_k(P)$ did not approach the set of α limit points uniformly for $\lim k = -\infty$ it would be possible to select an infinite set of negative values of k such that $T_k(P)$ would be distant from any limit point of P by at least a definite positive quantity d. There would then be at least one limit point L of this set, and this point would be at least d distant from any α limit point. By definition however L is an α limit point, so that a contradiction results.

§ 55. Recurrent Point Groups.

Consider now an arbitrary closed set Σ of complete point groups. It was observed above that the α or ω limit points form such a set of point groups.

[1] See my paper first cited.

More generally, if we take any set of complete point groups and adjoin to it the limit points, we obtain an enlarged set Σ.

If a set Σ contains no proper closed subset Σ' of the same type we shall say that Σ is a *minimal set.* In this case if P is any point of Σ its α (or ω) limit points form a closed set which must therefore coincide with Σ.

Any complete point group in a minimal set forms a *recurrent* point group.

The simplest type of recurrent point group is the periodic type referred to above.

In all cases but this simplest one, in which Σ has only a finite number of points, a minimal set Σ consists of a perfect point set. For suppose a closed minimal set to have an isolated point. This point is its own limit point under T or T_{-1}. Hence this point is a member of a periodic point group, which must constitute the minimal set.

In order that a point group generated by P be recurrent it is necessary and sufficient that for any positive quantity ε, however small, there exists a positive integer k so large that any k successive points in the point group of P,

$$T_m(P),\ T_{m+1}(P),\ \ldots,\ T_{m+k-1}(P),$$

have representatives within distance ε of every limit point of P.

This condition is necessary.

If not there is a recurrent point group generated by P, and a positive ε such that sequences of k points (k arbitrarily large) can be found no point of which comes with distance ε of some limit point Q of P. As k increases the point Q has at least one limit point Q' and thus it is clear that for a properly taken set of sequences no point lies within distance $\frac{\varepsilon}{2}$ of Q'. Take k odd and consider the middle point L of such a sequence. It and its $\frac{k}{2} - 1$ iterates under T and T_{-1} lie at a distance at least $\frac{\varepsilon}{2}$ from Q'. Consequently for a limiting position L' of L we infer that every point of the complete point group of L is at distance at least $\frac{\varepsilon}{2}$ from Q'. Hence L' defines a closed set of point groups lying within the closed minimal set defining the given recurrent motion, but forming only part of it, and in particular not containing Q'. This is absurd.

To prove the condition sufficient we note first that the set of α and ω limit points of a point group satisfying this condition must coincide. We need only to take $m > 0$ in the arbitrary set to see the truth of this fact. Call the set of these common α and ω limit points Σ.

If the set Σ is not minimal it would contain a proper subset Σ' of the same sort to which some point Q of Σ would not belong. Now, when one of the set of points P, $T(P)$, $T_2(P)$, ..., approaches sufficiently near to a point of Σ' it will remain very near to this closed set for an arbitrarily large number of iterations under T, and so will not approach Q; it is to be kept in mind that Σ' is a closed set of complete point groups. Thus the assumed condition would not be satisfied by the point group generated by P.

Hence Σ is minimal and the point group of P is recurrent.

§ 56. The general point group and recurrent point groups.

The importance of the complete point groups of recurrent type for the consideration of the general point group is evidenced by the following result:

There exists at least one recurrent point group in the α (ω) limit point group of any given point P.

Let Σ denote the closed set of α limit points. We need to prove that the set Σ contains a minimal subset.

Divide the surface of S into a large number of small regions of maximum span not greater than d, an assigned positive constant. Among the points of Σ there will be one which enters a least set S' of regions of S under indefinite iteration of T and T_{-1}. Let Σ' be the corresponding closed set of complete limit point groups. This set is part of Σ and lies wholly in the same regions S'. Divide S' into regions of maximum span $\frac{d}{2}$. Among the points of Σ' there will be one which enters a least set S'' of regions of S' under indefinite iteration of T and T_{-1}. Define Σ'' as the closed set of complete limit point groups, which is part of Σ'.

Proceeding in this way we determine an infinite sequence $\Sigma', \Sigma'', \ldots$ of closed sets of complete point groups lying wholly upon $S', S'', \ldots$ respectively. Now let $P^{(n)}$ be any point whatever of $\Sigma^{(n)}$ on $S^{(n)}$ and let $\overline{P}$ denote a limit point of the set $P', P'', \ldots$ The point $\overline{P}$ belongs to Σ of course since it is a limit point of points of Σ. Furthermore, since $P^{(n)}$ is contained in $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots$, the limit point P lies on all of the regions $S, S', S'', \ldots$. Likewise all of its images under T or T_{-1} lie on these regions. Thus the complete point group generated by P, and its α and ω limit points, do the same.

Moreover, every point lying in every region $S', S'', \ldots$ is an α and ω limit point of P. Otherwise for large positive (or large negative) k, $T_k(P)$ does not

approach some point Q in S', S'', ... Hence it is apparent that the set of points P, $T(P)$, ... will not enter into some one of the regions $S^{(k)}$, namely the particular one containing Q. But this set of points has a set of ω limit point groups, each with a representative in every one of the minimum set of subregions which make up $S^{(k)}$. Thus a contradiction results.

The same argument shows that any point P lying in every region S', S'', ... has this complete set as its set of α or ω limit points. In other words the set of points common to S', S'', ... form the desired minimal set.

The following further result shows that either a point P generates a recurrent point group under T or else that it successively approaches and recedes from such recurrent point groups:

For any $\varepsilon > 0$ there exists a k so large that any sequence of k points $P, T(P), \ldots, T_k(P)$ contains at least one point within distance ε of a recurrent point group.

The proof is immediate.

If the theorem is not true it is possible to obtain points of this type not coming within distance ε of any recurrent point group for k arbitrarily large. Let then Q denote the middle point of such a set (k being taken odd). If $\bar{Q}$ is a limit point of points Q for $\lim k = \infty$ evidently the complete point group generated by $\bar{Q}$ has none of its points within distance ε of any recurrent point group. But the set of α and ω limit points of $\bar{Q}$ contains a minimal set. Thus a contradiction appears, since every point group in a minimal set is by definition recurrent.

§ 57. Continuous recurrent point groups.

Recurrent point groups Σ may be classified as follows: if a point P of Σ exists such that all sufficiently near points of Σ are connected to P through Σ then P is of *continuous type;* in the contrary case Σ is of *discontinuous type.*

From every standpoint the first type is the simpler.

There are two extreme types of continuous recurrent point groups, namely the zero-dimensional or periodic type in which Σ consists of a finite set of isolated points, and the two-dimensional type in which Σ fills an area. But this area has no boundary since these boundaries would form a closed subset of point groups of the minimal set Σ. Hence this area comprises all of S. Consequently S has no invariant points under T, and so has the connectivity of a torus, at least *if* T can be generated by a deformation.[1]

[1] See my paper first cited.

If φ, ψ are angular coördinates on a torus and if α, β are incommensurable with 2π and with each other, a transformation T of this type is defined by

$$\varphi_1 = \varphi + \alpha, \quad \psi_1 = \psi + \beta.$$

Thus the two-dimensional type exists. The precise structure of this type is not here determined further.

The remaining one-dimensional continuous type arises when some but not all of the points of S near P belong to Σ, and are connected with it through nearby points of Σ.

Thus Σ falls into a set of connected subsets, which undergo some sort of permutation under T or T_{-1}. Since P is carried into its own immediate neighborhood on sufficient iteration of T, the connected set containing P is carried into itself after a finite set of iterations.

It appears then that Σ consists of a set Σ'_0 containing P, and of its distinct successive images $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \ldots, \Sigma'_{k-1}$, while Σ'_k coincides with Σ'_0. Let us consider then T_k, which carries Σ'_0 into itself, and for which Σ'_0 is also a recurrent point group.

Now Σ'_0 is either a simply or multiply connected point set. By using a known theorem due to Brouwer[1] we will prove that it must be multiply connected. For, if not, Σ'_0 forms a simply connected set on a part of S which can be represented in the plane, and is invariant under T. Moreover this set has no inner point, for the boundaries would then constitute a smaller closed set of complete point groups. Consequently by the theorem referred to there exists an invariant point of Σ'_0, which is absurd.

Hence the set Σ'_0 is multiply connected.

If S has the connectivity of the sphere then Σ'_0 divides the surface of S into two or more parts. But in one of these there is a point invariant under T by another theorem also due to Brouwer.[1] Consequently its boundary is invariant under T and must constitute all of Σ'_0. Here then Σ consists of a finite set of closed two-sided curves, all outside of one another.

More generally, consider the neighborhood of a point near Σ but not on it and follow along near Σ until a complete circuit is made. The boundary so outlined is carried into itself or into one of a finite number of similar boundaries

[1] *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves, Proceedings of the Section of Sciences, Koninklijke Academie van Wetenschappen te Amsterdam,* vols. 11—15 (1908–1912). In the last part of this paper Brouwer develops the notion of *class* of a transformation, given later by myself in the paper first cited without knowledge of his work.

under T_k. Hence T_{kl} carries this boundary and similarly its images under T_{2k}, $T_{3k}, \ldots, T_{(l-1)k}$ into themselves. Each boundary is thus recurrent under T_{kl}, and if two boundaries have any points in common all of their points are in common. Since all of the boundaries form a set which hangs together the images can consist only in the boundary of a single closed two-sided curve.

Thus continuous recurrent point groups lie in minimal sets which are either made up (1) of a finite set of points, (2) of a finite set of closed two-sided curves on S, or (3) of all the points of S.

In the one-dimensional case a single angular variable and a definite rotation number arise. A fundamental question is whether a similar representation in the two-dimensional case, by means of two angular variables and two characteristic rotation numbers, is possible.

§ 58. Discontinuous recurrent point groups.

An immediate division of the types of discontinuous recurrent point groups is possible. In the first case no point P of the minimal set Σ is connected with any other point through Σ; this is the *totally discontinuous type*. In the second this is not the case; here we have the *partially discontinuous type*.

For the second case Σ falls into connected sets which are permuted among themselves by T just as the points are in the first case. The existence of this second category of recurrent point groups is doubtful when T has the properties which we have assumed. On the other hand the totally discontinuous type of recurrent point groups exists in important cases.

Inasmuch as analytic weapons are lacking we content ourselves merely with some examples and with making an attempt at classification in the totally discontinuous type.

Let $f(t)$ be a continuous increasing function of such that $f(t)-t$ is periodic of period 2π. Then $t_1=f(t)$ defines a one-to-one continuous direct transformation of a circle (on which t is an angular coördinate) into itself. This is associated with a definite rotation number θ and defines at least one recurrent point group on the circle, which need not coincide with the whole circle. Its minimal set is represented by a perfect nowhere dense point set on the circle.[1] We limit attention to the corresponding values of t.

[1] See G. D. Birkhoff, *Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques, Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 40, 1912.

The reader will observe the complete analogy between the recurrent motions of that paper and recurrent point groups.

It may now be possible to represent the given recurrent point group in the form

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t); \quad u_1 = \varphi(t_1), \quad v_1 = \psi(t_1),$$

where φ, ψ are continuous functions, where u, v are ordinary surface coördinates for S, and where t ranges over the values specified. We shall say that the recurrent point group is of *rank* 1 in this case.

Or it may be possible to write

$$u = \varphi(t, w), \quad v = \psi(t, w); \quad u_1 = \varphi(t_1, w_1), \quad v_1 = \psi(t_1, w_1),$$

where w has properties analogous to t. We then say that the recurrent point group is discontinuous of *rank* 2.

This definition obviously extends to any rank and is applicable to partially as well as totally discontinuous point groups.

It would be interesting to know whether or not the rank is finite in al cases which actually arise in applications.

§ 59. Unstable recurrent point groups.

Let us term a recurrent point group and its minimal set Σ *unstable* if, for $\varepsilon > 0$ sufficiently small, it is impossible to find δ such that points P within distance δ of Σ remain within distance ε of under indefinite iteration of T and T_{-1}. In the contrary case let us call the point group and the set Σ *stable.* This agrees with our earlier definition of stability in the case of an invariant point.

Let Σ be an unstable minimal set and P a point group such that the sequence of points $P, T(P), T_2(P), \ldots$ has Σ as the only minimal set in the set of ω limit points. Then the point group of P will be said to be *positively asymptotic* to Σ. Similarly if the sequence $P, T_{-1}(P), T_{-2}(P), \ldots$ has a single minimal set Σ in its set of α limit points then the point group of P will be said to be *negatively asymptotic to* Σ.

It is apparent that we cannot have the phenomenon of asymptotic point groups save when Σ is unstable. For, if P is any point at distance more than ε from a stable set Σ, its iterates cannot approach to within some distance δ of Σ by the definition of stability. Moreover our earlier work shows that for

hyperbolic periodic point groups[1] such asymptotic point groups lie along hyper-continuous branches, while for regular elliptic periodic point groups other types of asymptotic point groups are present. In both of these cases the point P tends toward Σ asymptotically, under T or T_{-1}, although such a state of affairs is not required by our definition.

In the regular case an unstable periodic point group possesses positively and negatively asymptotic point groups forming connected sets of the kinds earlier specified.

Moreover even in the irregular case the work of § 51 shows that we will have connected α and ω sets. These furnish asymptotic point groups unless there are other recurrent point groups in these sets. This follows by the last result of § 56.

In the irregular case an unstable periodic point group possesses such asymptotic sets unless there are infinitely many recurrent point groups in its infinitesimal vicinity.

It is this possibility which arises for a hyperbolic invariant point through which passes an invariant point curve. The nearby invariant points are the recurrent point groups in the vicinity.

Our initial conclusion for recurrent non-periodic point groups is the following:

An unstable minimal set (not periodic) possesses positively and negatively asymptotic point groups forming a connected set, at least unless there are other recurrent point groups in its infinitesimal vicinity.

In fact, if possible choose ε so small that there are no other recurrent point groups within distance ε of Σ. Now choose δ extremely small and consider the iterates of points within distance δ of Σ under T. Because of the instability of Σ these iterates reach out in a connected set to distance ε in N iterations (N large). By a limiting process like that employed in § 51 we infer the existence of a closed set of points connected with Σ, reaching out to the boundary of this ε vicinity, and remaining within this neighborhood under indefinite iteration of T_{-1}. But each point of this set has only the minimal set Σ in its α point group. Hence these points approach Σ uniformly often under iteration, by the last result of § 56, and are negatively asymptotic to Σ. The existence of a positively asymptotic set may be similarly established.

To advance further we introduce the notion of isomorphic recurrent point groups: Two recurrent point groups with minimal sets Σ, Σ' are *isomorphic* if it

[1] A periodic point group of q points $P, T(P), \ldots, T_{q-1}(P)$ is called hyperbolic if P is hyperbolic under T_q. A similar terminology is employed in general.

is possible to establish a correspondence of closed point sets of Σ to closed point sets of Σ' which is maintained under T. It is assumed that there is more than a single set unless Σ or Σ' consists of a single point. Thus two periodic point groups of k and l points are isomorphic only if k and l have a common prime factor. Similarly two one-dimensional continuous recurrent point groups are isomorphic only if their rotation numbers are the same or if they fall into k and l curves, where k and l have a common prime factor.

If there are not an infinitude of recurrent point groups in the neighborhood of Σ and isomorphic with it, there will exist such connected asymptotic sets.

The existence of infinitely many near by recurrent point groups is an evident necessary condition for the non-existence of asymptotic sets of this description. To show that infinitely many of these are isomorphic with Σ, we note that the earlier argument for existence of such positively asymptotic point groups only fails if the connected ω set obtained contains other minimal sets besides Σ. Let Σ' be such a set. By operating with T indefinitely often upon the set connecting Σ and Σ' we infer that there exist point sets connecting Σ and Σ', and remaining in the ε neighborhood of Σ, Σ' under indefinite iteration of T and of T_{-1}. Let us establish a correspondence between the sets of points of Σ and Σ' so connected.

Now if all the points of Σ and Σ' are so connected we have a connected invariant set under T, and included by it an invariant point of course. If invariant points exist in every vicinity of Σ, there exists an invariant point on Σ, which must coincide with Σ. Hence in all cases the sets Σ and Σ' are isomorphic. If there are a finite number of connected sets we are led to isomorphic periodic point groups near Σ.

By letting ε approach o we arrive at infinitely many periodic or other recurrent point groups having minimal sets isomorphic with Σ and lying in its immediate vicinity. This is under the hypothesis that there are no asymptotic sets of the type described.

It is to be hoped that a more complete analysis of the notion of isomorphism will be made.

Let us say that a point is *positively* (*negatively*) *asymptotic* to a set of isomorphic recurrent point groups if these and these alone form the recurrent point groups among its ω (α) limit points.

The above argument then enables us to state the following:

For a given recurrent point group in any continuum D there exist connected sets positively and negatively asymptotic to a set of isomorphic recurrent point groups containing the given point group unless there is such an isomorphic point group with a point on the boundary of D.

§ 60. Stable recurrent point groups.

The simplest type of continuous recurrent point groups is the periodic type. If this is stable each of the k points of the group is clearly surrounded by infinitely many neighboring curves which are permuted by T. These curves are invariant under T and their form has been partially determined (§§ 44—47).

The two-dimensional continuous type is stable by definition since its points fill S.

Suppose finally that we have a stable continuous one-dimensional recurrent point group with minimal set Σ. On either side of the curve Σ it is readily inferred (see § 42) that we have an infinite succession of nearby invariant curves. If the rate of rotation of nearby points exceeds that along the curve (as in the case of a regular neighborhood of an invariant point) the nature of these curves can be discussed more fully, but we will not attempt such a discussion.

Thus a stable one-dimensional continuous recurrent point group is surrounded by infinitely many neighboring invariant curves on either side.

In the case of a discontinuous recurrent point group with minimal set Σ we are led similarly to a set of nearby invariant sets of continua containing the set Σ as inner points and lying within distance ε of Σ. Clearly $\iint Q\,du\,dv$ taken over any of these continua is the same, so their number is finite, and they are carried into themselves by T_k. Thus there is an invariant point under T_k within each of them. Such a point P lying near a point of Σ and in the same continuum clearly remains nearby under iteration of T or T_{-1}. By letting ε decrease the number of these continua increases indefinitely. At each stage k is unaltered or changes to a multiple of itself.

A stable periodic point group of k points has in its neighborhood infinitely many invariant sets of k enclosing curves as specified.

A stable one-dimensional recurrent point group has in its neighborhood infinitely many invariant rings within which it lies.

A stable discontinuous recurrent point group has in its neighborhood infinitely many periodic point groups and invariant sets of enclosing curves. A point of a periodic point group approximates uniformly to any nearby point P of the given group under all iterations of T and T_{-1}.

Chapter VI. The general point group.

§ 61. Classification of transformations T.

Before entering upon further discussion of the behavior of points under T, we shall effect a classification which is fundamental.

A transformation T will be called *transitive* if, for any pair of points P and Q on S nearby points P' and Q' respectively can be found such that $Q' = T_n(P')$.

A transformation T is *intransitive* in the contrary case.

It seems highly probable that the transitive case is to be regarded as the general case.

§ 62. The transitive case.

We commence with the transitive case.

In the transitive case all of the recurrent point groups are unstable.[1]

In fact it has been observed earlier that a stable recurrent point group leads to continua forming part of S, which are invariant as a set under T and lie near the point group. Hence if we take a point P outside of these continua and a point Q within one of them, the condition given in the definition of transitivity cannot be fulfilled.

We note that invariant sets of continua cannot exist in the transitive case for the same reason.

In the transitive case the asymptotic α or ω point groups connected with any recurrent point group and its isomorphic recurrent point groups, together with these recurrent groups, are everywhere dense throughout the surface S.

For suppose that there is no such asymptotic point in some small region σ for a recurrent point group with minimal set Σ.

Take then a small vicinity of Σ and consider the regions into which it goes by T. Evidently this set of region must ultimately overlap part of σ or we shall be led to invariant continua, such as can not exist in the transitive case.

Applying then precisely the same considerations that we have used earlier, i. e. considering smaller and smaller neighborhoods of Σ, we derive the existence

[1] The exceptional case in which there is a single recurrent point group whose minimal set fills S is left out of consideration.

of a connected α set reaching from Σ to the boundary of σ at P. Either P belongs to a point group isomorphic with Σ, or its point group is positively asymptotic to Σ, or to a set of isomorphic recurrent point groups, by the preceding paragraph.

In the transitive case any positively asymptotic connected set of points has infinitely many points in common with any negatively asymptotic set, at least if there exists a single elliptic periodic point group Π^l with l finite.

This follows at once from the immediately preceding propositions and from the structure of the network of asymptotic sets A and Ω about such an invariant point (§ 53).

For, consider the transformation T_q which leaves such a point P of an elliptic periodic point group unchanged.

The given connected asymptotic α set reaches into this network indefinitely near to the invariant point P without meeting the A set. The negatively connected asymptotic ω set reaches into this network without meeting the Ω set. Consequently the two sets have infinitely many points in common.

Thus there exist point groups positively and negatively asymptotic to assigned periodic point groups.

Suppose now that we designate any point whose α or ω limit points do not form all of S as a *special* point. All of the points belonging to recurrent point groups or points asymptotic to such point groups are of this type.

Points which are not special evidently pass into the neighborhood of all points of S' under iteration of T or T_{-1}. Such points we term *general.*

In the transitive case the general points are everywhere dense in S.

To see this we divide S into a large number of regions S' of small diameter d, and consider the set of points P whose iterates do not enter within all of the regions S'. Such points P evidently form a closed set of points, M say.

This set M is nowhere dense in S. In the contrary case suppose M to fill a small region σ'. Now there are only a finite set of regions S' and thus only a finite number of combinations of less than all of them. Divide the points of σ' into the finite number of closed sets according to the regions S' which the points enter. Thus σ' is divided into a finite number of closed sets, at least one of which therefore fills some neighborhood σ'' of σ' densely. We recall that a finite or denumerably infinite set of nowhere dense closed sets cannot fill a complete neighborhood. But the existence of such a region σ'' contradicts the condition that T is transitive. Thus M is nowhere dense.

Again choose a set of subregions S'' of the regions S' of diameter less than

$\frac{d}{2}$ leading to a set M' which includes M by a similar process. The set M' is nowhere dense.

By continuing in this fashion we get an infinite set of closed sets $M, M', \ldots,$ each containing its predecessor. Every point P which has not all of S for its set of limit points evidently belongs to some one of these sets.

But by the theorem quoted above the set of all points belonging to some $M^{(k)}$ nowhere fills a complete neighborhood. Hence the stated property holds.

It would appear to be a very important and difficult question to determine the relative measure of the special points and general points. The above argument renders it clear that both of these sets are measurable in the sense of Lesbesgue, but sheds no light on their relative measures. One naturally conjectures that the special points are of measure 0.

§ 63. The intransitive case.

In the intransitive case there exists at least one pair of points P, Q such that no point very near to P goes into a point very near to Q under iteration of T or T_{-1}. Obviously this state of affairs implies the existence of invariant sets of two-sided curves forming the boundaries of open continua on opposite sides of which P and Q lie.

We term a transformation T for which there exist only a finite number $k > 0$ of such curves *finitely intransitive;* otherwise, *infinitely intransitive.*

Within one of the invariant sets of continua bounded by these curves in such a finitely transitive case, the condition for transitivity is satisfied i. e. for any pair of points P, Q within, nearby points P', Q' respectively can be found such that $Q' = T_n(P')$ for some n.

In the finitely intransitive case the theorems stated for the transitive case hold within each invariant set of continua.

The infinitely intransitive case obviously includes the integrable case when the points move along analytic curves. More generally, it includes the case when there is at least one stable recurrent point group. Indeed it seems possible that the existence of such a stable recurrent point group is a necessary as well as a sufficient condition for infinite intransitivity. But we have not been able to establish this conjecture.

In order to satisfactorily describe the point groups and their interrelations in the intransitive case it is essential to know the possible types of invariant sets of curves. Lacking such information save for the neighborhood of a periodic point group of elliptic type II', l finite, we do not attempt to go further.

Chapter VII. Dynamical applications.

§ 64. The equations of motion.

For definiteness we consider a dynamical system with equations of the form

$$(32) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

when L is a function of the two coördinates x, y and their time derivatives x', y'. This differential system is of the fourth order. If then we regard x, y, x', y' as the coördinates of a point in four-dimensional space the motions of the dynamical system are represented by a set of curves, one through each point of the space.

Now we have the well-known integral relation

$$(33) \qquad x'\frac{\partial L}{\partial x'} + y'\frac{\partial L}{\partial y'} = \text{const.}$$

Hence these curves lie on ∞^1 three-dimensional manifolds. We fix attention on any one of these.

We assume this three-dimensional manifold to lie in the finite part of the four-dimensional space and to be without singularity.

§ 65. Periodic motions.

To periodic motions correspond closed curves of the three-dimensional spread above obtained.

Suppose we take a point P of such a stream line and consider a small element of an analytic surface containing P and cutting the closed curve at an angle not 0. If we take any point A on this element near to P, and follow

along the unique curve through it in the sense of increasing time t, the element will be crossed again later at a point Q. The transformation of the element which takes P into Q is the transformation T which we shall consider.

The conservative transformation T[1] thus defined is clearly essentially independent of the particular surface element employed, since any other transformation so obtained can be derived from T by a proper change of variables.

We classify the periodic motions into types I', I'', II', II'', II''', III', III'' according as T is of such a type (§ 2). We define a periodic motion to be *elliptic* or *hyperbolic* according as the transformation T is elliptic or hyperbolic; and the integer l is similarly defined. The periodic motion is *stable* if nearby motions remain nearby for all t. This means that T is stable. In the contrary case the periodic motion and T are *unstable*.

Finally we will term the dynamical problem *integrable* if T is integrable.

§ 66. The integrable case.

In the integrable case T leaves a family of curves $F^* = \text{const.}$ invariant. Thus in the three-dimensional representing space there is a one-parameter analytic family of surfaces in the vicinity of the closed curve representing the periodic motion, each surface being made up of curves of motion. If this motion is of elliptic type there is a family of closed annular surfaces of which the curve of motion forms a degenerate member. If this motion is of hyperbolic type these surfaces are open and the curve lies on one or more of them. This much is obvious.

The necessary and sufficient condition for integrability of the dynamical problem is the existence of an integral relation $G(x, y, x', y') = 0$ where G is analytic in its indicated arguments, and where $G = 0$ is not an identity in virtue of the known integral relation.

The condition is evidently sufficient. This relation yields an invariant family of surfaces in the three-dimensional representing space and these cut the surface elements used to define T in a family of invariant analytic curves in the vicinity of the invariant point under T. Consequently T is integrable.

Conversely, if T is integrable we obtain an analytic family of surfaces on which the curves of motion lie. These may be represented in the form $H(u, v, \varphi) = 0$, where u, v are coördinates for the surface elements and φ is an angular coördinate. Also H is analytic in its three variables. On account of the fact that the four-dimensional manifold under consideration consists of a

[1] See my paper first cited.

one-parameter analytic family of the three-dimensional manifolds which we have under consideration, it is apparent that these variables u, v, φ may be expressed as analytic functions of x, y, x', y'. By this means a relation of the desired type is obtained.

In the hyperbolic integrable subcase there exist $k > 0$ *one-parameter analytic families of motions asymptotic to the given periodic motions for* $\lim t = \pm \infty$ *(or else periodic) whose analytic representation we will not specify.*[1] *All other nearby motions first approach and then recede from the periodic orbit.*

This conclusion is an immediate consequence of the form of T near a hyperbolic invariant point.

In the elliptic integrable subcase nearby motions have coördinates x, y *representable as analytic functions of variables* $e^{\sqrt{-1}\alpha\tau}, e^{\sqrt{-1}\beta\tau}$, *while* $t = c\tau +$ *another function of this type.*

The curve of motion lies on a torus and a point on such of curve increases its angular coördinates by a fixed amount as a single circuit of the torus is made (§ 50). Evidently an analytic distortion takes this torus into an ordinary right circular cylinder on which the curves of motion are the spirals making a fixed angle with the generators. Now x, y can be expressed as periodic analytic functions of the angular coördinates p, q on this torus. But this establishes the stated form of representation for x, y. Also $\frac{dt}{d\tau}$ is a similar function of p, q, whence the form of the expression for t in terms of τ.

§ 67. Formal series in the non-integrable case.

Evidently the results of the first part of the present paper may be interpreted as results for the formal series representing the motion in the dynamical problem. The asymptotic validity of such series can be readily established. We will only remark upon the following fact: Inasmuch as there exists a formally invariant series F^* in the non-integrable case (§ 10), *there exists always a formally invariant integral relation of the type* $G = 0$ *considered above.* Thus the dynamical problem is 'formally integrable' in the vicinity of an elliptic or hyperbolic periodic motion. In the elliptic case this means that periodic power series in two periods may be employed to represent nearby motions.

If I am not mistaken it has never yet been demonstrated that integrability

[1] In the simplest and general case I', x, y may be expressed as convergent power series in $\rho^{\pm\tau}$ while we have $t = c\tau +$ another power series of the same sort.

in the above sense cannot always prevail, although such a possibility appears remote. POINCARÉ has merely shown that integrability does not exist uniformly throughout certain domains with variation of a parameter μ.[1] The particular example of § 31 yields a non-integrable conservative transformation, but it is not yet established that such a transformation arises in a dynamical problem.

§ 68. Periodic motions in the non-integrable case.

The results of Chapter II when interpreted in the general hyperbolic case show at once:

The results stated above for the integrable hyperbolic case hold also in the non-integrable case, the analytic families of asymptotic motions being representable by means of hypercontinuous functions.

Interpreting the results of Chapter III for the stable elliptic case II′, l finite, we conclude:

In the non-integrable stable elliptic case II′, l finite, there exist an infinite number of continuous closed one parameter families of nearby motions, representable by means of continuous biperiodic functions of limited variation, and which are invariant as a family upon a circuit of the periodic motion.

In the unstable elliptic case II′, l finite, there exist connected families of asymptotic motions for both $\lim t = -\infty$ and $\lim t = +\infty$, each containing the given periodic motion. The family of the one type has infinitely many doubly asymptotic motions in common with any family of the other type. The motions not in any such family are everywhere dense near the periodic motion.

As before we omit details.

§ 69. Surfaces of section.

In very many if not in all cases an analytic *surface of section* S in the three-dimensional spread representing the motions may be found with the property that it is cut by every curve of motion in one and the same sense and has boundaries formed by closed curves representing periodic motion.

By following along a curve of motion from a point P of such a surface to the next point Q, in the sense of increasing time a transformation T for which $Q = T(P)$ is defined. This transformation is one-to-one, analytic and conservative.

We consider the totality of motions by the aid of such a surface S.

[1] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 1, Paris 1892, Chap. 5.

§ 70. Recurrent motions.

A *recurrent motion* may be defined as one which comes arbitrarily near all its phases during *any* sufficiently large interval of time (from $t = -\infty$ to $t = +\infty$). Evidently such a motion corresponds to a recurrent point group on S. Hence we find:

Every motion has at least one recurrent limit motion for $\lim t = +\infty$ *(and for* $\lim t = -\infty$*). It recurs uniformly often arbitrarily near some one of these limit recurrent motions (not necessarily the same one).*[1]

Recurrent motions may either be periodic, biperiodic (representable on a square or torus) or triperiodic (representable in a cube), or discontinuous.[2] We will not follow out the classification suggested by §§ 57, 58 further.

§ 71. Asymptotic motions.

A motion will be said to be *positively* (*negatively*) *asymptotic* to a recurrent motion if it has only this recurrent motion as a limiting recurrent motion for $\lim t = +\infty$ ($\lim t = -\infty$). Furthermore we will say that two recurrent motions are *isomorphic* if the corresponding point groups are isomorphic. The direct application of the results of § 59 gives then:

Unless there are infinitely many nearby isomorphic recurrent motions, any recurrent motion has connected families of motions asymptotic to it for $\lim t = +\infty$ *and for* $\lim t = -\infty$.

§ 72. Transitive and intransitive systems.

If a motion can be found passing from nearly one prescribed phase to any second prescribed phase the dynamical system is *transitive*. Here T is transitive also, and conversely (§ 62). Otherwise the dynamical system is *intransitive*.

In the transitive case the motions asymptotic in either sense to a given recurrent motion or set of isomorphic recurrent motions, together with these motions, are everywhere dense.

Infinitely many motions exist doubly asymptotic to any two prescribed recurrent motions (or isomorphic sets of such motions) for $\lim t = \pm\infty$, *at least if there exists*

[1] See my paper last cited.

[2] The existence of recurrent motions of discontinuous type has been established by H. C. M. Morse, *Certain types of geodesic motion on a surface of negative curvature*, Harvard Dissertation, 1917.

a single periodic motion of the elliptic type II', l finite. There exist also a dense set of general motions which approach every possible phase arbitrarily closely for both lim $t = +\infty$ and for lim $t = -\infty$.

The *intransitive* case includes the integrable case. The simplest possibility is the *finitely intransitive* case when the curves of motion fall into $k > 0$ types filling out regions in the three-dimensional manifold. This corresponds exactly to the finitely intransitive type of transformation T.

In the finitely intransitive case each type of motions has the same properties stated above for the intransitive type.

We do not consider the infinitely intransitive type of dynamical system except as covered in the general results stated above. Here we have infinitely many types of motion, and, in default of a knowledge of the types which may exist, the results to be obtained are necessarily vague.

§ 73. **Conclusion.**

The varying degree of definiteness of the results above obtained for dynamical systems is striking. The catalogue of types of motion according to their degree of simplicity appears to run as follows: ordinary periodic motions, biperiodic motions representable analytically by convergent trigonometric series in two arguments, triperiodic motions representable by three arguments; motions asymptotic to periodic motions of hyperbolic type, motions asymptotic to periodic motions of elliptic type and of the other types just referred to; recurrent motions of biperiodic or triperiodic type (not representable by convergent trigonometric series); recurrent motions of discontinuous type; motions asymptotic to recurrent motions of these new types (or to sets of isomorphic recurrent motions); *special* motions (i. e. not passing near all phases for both lim $t = +\infty$ and lim $t = -\infty$) not of above types; *general* motions.

The degree of definiteness attained has varied with the analytic instruments at hand, and will probably be found to correspond to the nature of the case, at least unless entirely new analytic instruments are discovered.

The remarkable diversity and complexity of structure possible in dynamical systems with two degrees of freedom is likely to stand permanently in the way of approach to any definitive form for the theory of such systems. As has appeared above, many of the most vital questions are still without an answer. Progress with these questions and progress with the theory of the conservative transformations T which we have studied will go hand in hand.

MÉMOIRE SUR LES POLYNOMES DE BERNOULLI.

Par

N. E. NÖRLUND

à Lund.

1. Pour abréger nous désignerons la différence du premier ordre avec l'intervalle ω par le symbole $\underset{\omega}{\triangle}$

$$\underset{\omega}{\triangle} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega},$$

et la moyenne entre les valeurs d'une fonction dans les points x et $x+\omega$ par le symbole $\underset{\omega}{\nabla}$

$$\underset{\omega}{\nabla} f(x) = \frac{f(x+\omega) + f(x)}{2}.$$

Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ des nombres complexes quelconques. En appliquant les opérations $\triangle$ et ∇ plusieurs fois de suite on trouve la différence du second ordre

$$\underset{\omega_1 \omega_2}{\triangle^2} f(x) = \underset{\omega_2}{\triangle}\left(\underset{\omega_1}{\triangle} f(x)\right) = \frac{f(x+\omega_1+\omega_2) - f(x+\omega_1) - f(x+\omega_2) + f(x)}{\omega_1 \omega_2}$$

et la moyenne du second ordre

$$\underset{\omega_1 \omega_2}{\nabla^2} f(x) = \underset{\omega_2}{\nabla}\left(\underset{\omega_1}{\nabla} f(x)\right) = \frac{f(x+\omega_1+\omega_2) + f(x+\omega_1) + f(x+\omega_2) + f(x)}{4}.$$

Et en général la différence d'ordre n

$$\underset{\omega_1 \cdots \omega_n}{\triangle^n} f(x) = \underset{\omega_n}{\triangle}\left(\underset{\omega_1 \cdots \omega_{n-1}}{\triangle^{n-1}} f(x)\right)$$

et la moyenne d'ordre n

$$\underset{\omega_1 \cdots \omega_n}{\nabla^n} f(x) = \underset{\omega_n}{\nabla}\left(\underset{\omega_1 \cdots \omega_{n-1}}{\nabla^{n-1}} f(x)\right).$$

Si tous les nombres ω sont égaux à *un* j'écris plus brièvement $\triangle^n f(x)$ et $\nabla^n f(x)$. On a donc

$$\triangle^n f(x) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} f(x+s),$$

$$\nabla^n f(x) = 2^{-n} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} f(x+s).$$

Considérons les équations

$$\triangle^n f(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

$$\nabla^n f(x) = \varphi(x), \tag{2}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée. Les solutions de ces deux équations forment une classe de transcendantes qui méritent d'attirer l'attention des géomètres. Pour plusieurs raisons il paraît naturel de commencer l'exposition des résultats que j'ai obtenus relativement à ces fonctions par une étude du cas où $\varphi(x)$ est un polynome, et ce Mémoire est consacré à ce cas particulier. Nous allons voir que les solutions des équations (1) et (2) s'expriment linéairement par un nombre fini de polynomes. Mais si $\varphi(x)$ est une transcendante les solutions s'expriment encore à l'aide des mêmes polynomes. En mettant en évidence les propriétés de ces polynomes on facilitera l'étude des solutions dans des cas plus généraux. C'est ce que nous allons faire. Le but de ce Mémoire est donc surtout de servir d'introduction à d'autres Mémoires qui devront traiter des problèmes plus difficiles.

Si $n = 1$ les polynomes susdits se réduisent aux polynomes de BERNOULLI et aux polynomes d'EULER. Ces polynomes ont été étudiés depuis longtemps par un grand nombre d'auteurs. Je n'ai guère de résultats nouveaux à ajouter. Pourtant, pour la commodité du lecteur, je commence par reproduire quelques propriétés de ces polynomes. Je les déduis d'une manière qui est, je crois, préférable à celles qu'on a appliquées jusqu'ici.

Un extrait de ce Mémoire a été publié dans les Comptes rendus de l'Academie des Sciences, Paris, t. 169 (1919), p. 166—8, p. 221—3, p. 521—4, p. 608—10.

Les polynomes de Bernoulli.

2. On appelle *nombres de* BERNOULLI la suite des nombres $B_0, B_1, B_2, \ldots$ définis par la relation de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s = B_\nu, \qquad \nu = 2, 3, 4, \ldots \tag{3}$$

$$B_0 = 1.$$

On voit immédiatement que les B_ν sont des nombres rationnels et que $(\nu+1)!\, B_\nu$ est un entier. Les premiers d'entre eux sont

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}.$$

Ces nombres jouent un rôle considérable dans une foule de questions d'Analyse et surtout dans le calcul aux différences finies. A l'aide des nombres de BERNOULLI on peut aisément résoudre l'équation

$$f(x+1) - f(x) = \nu x^{\nu-1},$$

ν étant un entier positif. En effet, on sait trouver un polynome qui satisfait à cette équation. Ce polynome est du degré ν et il est déterminé à une constante arbitraire près.

J'appelle *polynome de* BERNOULLI le polynome $B_\nu(x)$ qui satisfait à l'équation aux différences finies

$$\triangle B_\nu(x) = \nu x^{\nu-1} \tag{4}$$

et qui, pour $x = 0$, est égal au nombre de BERNOULLI B_ν

$$B_\nu(0) = B_\nu.$$

Soit

$$B_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} A_s x^{\nu-s}.$$

En substituant cette expression dans l'équation (4) on voit que les coefficients A_s doivent satisfaire à la relation de récurrence

$$A_0 = 1,$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} A_s = A_\nu.$$

Mais cette relation coïncide avec celle qui détermine les nombres de BERNOULLI. On a donc $A_s = B_s$ et par conséquent

$$B_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s x^{\nu-s}. \tag{5}$$

En dérivant ce polynome par rapport à x on trouve la relation

$$D_x B_\nu(x) = \nu B_{\nu-1}(x), \tag{6}$$

d'où encore

$$D_x^p B_\nu(x) = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-p+1) B_{\nu-p}(x).$$

On a donc en vertu de la formule de Taylor

$$B_\nu(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} h^s B_{\nu-s}(x), \tag{7}$$

h étant un nombre quelconque. Si l'on pose en particulier $h = 1$ on trouve la relation de récurrence

$$B_0(x) + \binom{\nu}{1} B_1(x) + \binom{\nu}{2} B_2(x) + \cdots + \binom{\nu}{\nu-1} B_{\nu-1}(x) = \nu x^{\nu-1}. \tag{8}$$

Cette formule permet de calculer succesivement tous les $B_\nu(x)$. On trouve ainsi

$$B_0(x) = 1,\ B_1(x) = x - \frac{1}{2},\quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},\quad B_3(x) = x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},\quad B_5(x) = x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{3}\right).$$

3. On peut donner à ces résultats une forme symbolique qui est assez remarquable. La relation (3) peut en effet s'écrire sous la forme symbolique

$$(B+1)^\nu - B^\nu = 0, \quad \nu > 1, \tag{9}$$

où il faut développer suivant les puissances de B et puis remplacer B^n par B_n. L'équation (9) n'est plus valable dans le cas $\nu = 1$ qui donne lieu à l'identité

$$(B+1) - B = 1.$$

On a donc la relation symbolique

$$\varphi(B+1) - \varphi(B) = \varphi'(0), \tag{10}$$

$\varphi(z)$ étant un polynome quelconque de z. Et si l'on remplace $\varphi(z)$ par $\varphi(z+x)$

$$\varphi(x+B+1) - \varphi(x+B) = \varphi'(x). \tag{11}$$

L'équation aux différences finies

$$f(x+1) - f(x) = \varphi'(x), \tag{12}$$

où $\varphi(x)$ est un polynome donné, admet donc la solution

$$f(x) = \varphi(x+B) = \varphi(x) + \frac{B_1}{1}\varphi'(x) + \frac{B_2}{2!}\varphi''(x) + \frac{B_3}{3!}\varphi'''(x) + \cdots.$$

Soit maintenant $\varphi(x) = x^\nu$. La définition des polynomes de Bernoulli permet immédiatement de conclure qu'on a

$$B_\nu(x) = (x+B)^\nu. \tag{5 bis}$$

En développant le second membre on retrouve l'expression (5). En écrivant $x+h$ au lieu de x il vient

$$B_\nu(x+h) = (x+B+h)^\nu \tag{7 bis}$$

et en développant le second membre suivant les puissances de h on retrouve la formule (7).

Cela posé, on voit que la solution rationnelle $f(x)$ de l'équation (12) peut s'écrire comme il suit

$$f(x+h) = \varphi(x+(h+B)) = \varphi(x+B(h)),$$

x et h étant des variables quelconques. Pour trouver la valeur de l'expression symbolique au dernier membre on développe suivant les puissances de $B(h)$ et puis on remplace $(B(h))^\nu$ par $B_\nu(h)$. On a donc

$$f(x+h) = \varphi(x+B(h)) = \varphi(x) + \frac{B_1(h)}{1!}\varphi'(x) + \frac{B_2(h)}{2!}\varphi''(x) + \frac{B_3(h)}{3!}\varphi'''(x) + \cdots. \tag{13}$$

Les nombreuses applications des polynomes de Bernoulli dans le calcul aux différences finies reviennent en dernière analyse à cette formule importante.

En y appliquant l'opération $\triangle$ on trouve la célèbre formule sommatoire d'Euler et de Mac Laurin

$$\varphi'(x+h) = \triangle\varphi(x) + \frac{B_1(h)}{1!}\triangle\varphi'(x) + \frac{B_2(h)}{2!}\triangle\varphi''(x) + \frac{B_3(h)}{3!}\triangle\varphi'''(x) + \cdots.$$

Pour donner immédiatement une application de la formule (13) posons $\varphi(x) = B_{\nu+1}(x)$. On trouve

$$f(x+h) = \sum_{s=0}^{z=\nu+1} \binom{\nu+1}{s} B_s(h)\, B_{\nu+1-s}(x).$$

D'autre part on vérifie aisément que l'équation

$$f(x+1) - f(x) = (\nu+1)\, B_\nu(x)$$

admet la solution

$$f(x) = (\nu + 1)(x - 1) B_\nu(x) - \nu B_{\nu+1}(x).$$

Ces deux solutions ne peuvent donc différer que par une constante et leurs dérivées sont par conséquent identiques. C'est à dire qu'on a

$$\nu(x + h - 1) B_{\nu-1}(x + h) - (\nu - 1) B_\nu(x + h) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s(h) B_{\nu-s}(x), \tag{14}$$

x et h étant des variables quelconques.

Remarquons enfin que la relation (11) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\varphi(B(x) + 1) - \varphi(B(x)) = \varphi'(x). \tag{11 bis}$$

On trouve dans la littérature un très grand nombre de relations de récurrence entre les nombres et les polynomes de Bernoulli. Les auteurs arrivent souvent à ces formules d'une manière fort détournée. Mais la source commune de toutes ces relations c'est la formule (11 bis). En choisissant le polynome $\varphi(x)$ convenablement on arrive aisément à ces relations. Pour en donner un exemple posons $\varphi(x) = x^\nu$, il vient

$$(B(x) + 1)^\nu - (B(x))^\nu = \nu x^{\nu-1}$$

ce qui n'est autre chose que la relation (8). Si l'on fait tendre x vers 0 cette équation se reduit à la relation qui nous a servi comme définition des nombres de Bernoulli.

4. Revenons à l'équation

$$f(x + 1) - f(x) = (\nu + 1) x^\nu.$$

Elle admet les deux solutions

$$B_{\nu+1}(x) \text{ et } (-1)^{\nu+1} B_{\nu+1}(1 - x).$$

C'est ce qu'on voit en remplaçant dans l'équation

$$B_{\nu+1}(x + 1) - B_{\nu+1}(x) = (\nu + 1) x^\nu$$

x par $-x$. Les deux polynomes susdits ne peuvent donc différer que par une constante K

$$(-1)^{\nu+1} B_{\nu+1}(1 - x) = B_{\nu+1}(x) + K.$$

Je dis que cette constante est égale à zéro. En effet, dérivons par rapport à x il vient en vertu de (6)

$$B_\nu(1-x) = (-1)^\nu B_\nu(x) \tag{15}$$

et cette relation subsiste pour toutes les valeurs de ν.

De l'équation (6) on peut tirer cette autre relation

$$\int_x^y B_\nu(z)\,dz = \frac{B_{\nu+1}(y) - B_{\nu+1}(x)}{\nu+1}, \tag{16}$$

x et y étant des nombres quelconques. Si en particulier $y = x+1$ on trouve

$$\int_x^{x+1} B_\nu(z)\,dz = x^\nu. \tag{17}$$

On peut exprimer les sommes des puissances semblables des nombres entiers par les polynomes de Bernoulli car en remplaçant x respectivement par $0, 1, 2, \ldots n-1$ et en ajoutant ensemble on trouve

$$1^\nu + 2^\nu + 3^\nu + \cdots + (n-1)^\nu = \int_0^n B_\nu(z)\,dz = \frac{B_{\nu+1}(n) - B_{\nu+1}}{\nu+1}, \qquad \nu > 0.$$

C'est cette propriété des $B_\nu(x)$ qui a tout d'abord attiré l'attention des géomètres sur ces polynomes.

Considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} B_\nu\left(x + \frac{s}{n}\right),$$

n étant un entier positif quelconque. On a en vertu de (4)

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = \nu x^{\nu-1}.$$

Mais cette équation aux différences finies admet aussi la solution

$$n^{1-\nu} B_\nu(nx).$$

On a par conséquent

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} B_\nu\left(x + \frac{s}{n}\right) = n^{1-\nu} B_\nu(nx) + K,$$

K étant une constante. Pour déterminer cette constante intégrons dans les deux membres de x à $x + \frac{1}{n}$; on trouve

$$\int_x^{x+1} B_\nu(z)\,dz = n^{1-\nu} \int_x^{x+\frac{1}{n}} B_\nu(nz)\,dz + \frac{K}{n}.$$

Mais en vertu de (17) cette relation se réduit à $K = 0$. On a donc

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} B_\nu\left(x + \frac{s}{n}\right) = n^{1-\nu} B_\nu(nx), \tag{18}$$

quel que soit l'entier positif n.

On aurait aussi pu procéder inversement et déduire (17) de (18). En effet, si l'on divise les deux membres de (18) par n et puis fait tendre n vers l'infini on retrouve la relation (17).

5. Des relations (4), (15) et (18) on peut tirer la valeur de $B_\nu(x)$ pour certaines valeurs rationnelles de x. Posons $x = 0$ dans les équations (4) et (15). On trouve

$$B_\nu(1) = B_\nu, \qquad \nu > 1$$
$$B_\nu(1) = (-1)^\nu B_\nu, \quad \nu \geq 0.$$

On a donc $B_\nu = 0$, si ν est impair et plus grand que *un*. Par conséquent

$$B_{2\nu+1}(1) = B_{2\nu+1}(0) = 0, \quad \nu > 0, \tag{19}$$

$$B_{2\nu}(1) = B_{2\nu}(0) = B_{2\nu}. \tag{20}$$

Posons $x = 0$ dans l'équation (18). Il vient

$$\sum_{s=1}^{s=n-1} B_\nu\left(\frac{s}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^{\nu-1}} - 1\right) B_\nu. \tag{21}$$

Si $n = 2$ cette relation se réduit à

$$B_\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{\nu-1}} - 1\right) B_\nu; \tag{22}$$

si ν est impair le second membre s'annule. *Le polynome $B_\nu(x)$ admet donc les trois zéros $x = 0, 1, \frac{1}{2}$, si ν est impair et ≥ 3.*

En posant $n=3$ dans l'équation (21) on trouve en se reportant à l'équation (15)

$$B_\nu\left(\frac{2}{3}\right)=B_\nu\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3^{\nu-1}}-1\right)\frac{B_\nu}{2}, \quad \nu \text{ pair.} \tag{23}$$

En posant $n=4$ dans l'équation (21) on trouve à l'aide de (15) et de (22)

$$B_\nu\left(\frac{3}{4}\right)=B_\nu\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2^{\nu-1}}-1\right)\frac{B_\nu}{2^\nu}, \quad \nu \text{ pair.} \tag{24}$$

En posant $n=6$ on trouve enfin à l'aide de (15), (22) et (23)

$$B_\nu\left(\frac{5}{6}\right)=B_\nu\left(\frac{1}{6}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{\nu-1}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{\nu-1}}\right)\frac{B_\nu}{2}, \quad \nu \text{ pair.} \tag{25}$$

Nous verrons dans le paragraphe 11 qu'on peut encore trouver une expression simple de $B_\nu\left(\frac{1}{4}\right)$ si ν est impair.

6. Nous venons de voir que les polynomes de degré impair admettent les points $0, \frac{1}{2}$ et 1 pour zéros. Je veux démontrer qu'il n'y a pas d'autres zéros dans l'intervalle $0<x<1$. Je dis d'abord qu'on a

$$(-1)^\nu B_{2\nu-1}(x)>0, \quad \text{si } 0<x<\frac{1}{2}. \tag{26}$$

Cette inégalité se démontre par voie d'induction. Elle est vraie, si $\nu=1$, car $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$. Supposons que l'inégalité (26) soit vraie pour une certaine valeur de ν. En intégrant entre les limites 0 et x on trouve

$$(-1)^\nu (B_{2\nu}(x)-B_{2\nu})>0, \quad \text{si } 0<x<\frac{1}{2}. \tag{27}$$

D'autre part on a

$$B_{2\nu+1}(0)=B_{2\nu+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Il y a donc une valeur x_0 de x, située entre 0 et $\frac{1}{2}$ pour laquelle la dérivée de $B_{2\nu+1}(x)$, et par conséquent $B_{2\nu}(x)$, s'annule. En posant $x=x_0$ dans l'inégalité (27) on trouve

$$(-1)^{\nu+1} B_{2\nu}>0, \quad \nu>0. \tag{28}$$

Cela posé, je dis que

$$(-1)^{\nu+1} B_{2\nu+1}(x) > 0, \quad \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \cdot \tag{29}$$

En effet, cette fonction s'annule dans les points $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ mais elle ne peut pas s'annuler à l'intérieur de l'intervalle $0 < x < \frac{1}{2}$ car alors sa dérivée s'annulerait dans deux points au moins de cet intervalle et sa dérivée seconde, et par conséquent $B_{2\nu-1}(x)$, s'annulerait aussi à l'intérieur de cet intervalle ce qui est contraire à l'hypothèse (26). Pour démontrer (29) il suffit donc de remarquer que pour des valeurs positives et très petites de x le signe de $(-1)^{\nu+1} B_{2\nu+1}(x)$ est le même que le signe de $(-1)^{\nu+1} B_{2\nu}$. Et ce nombre est, en vertu de (28), positif.

A l'aide de la relation

$$B_\nu(1-x) = (-1)^\nu B_\nu(x) \tag{30}$$

on peut maintenant se rendre compte comment se comportent nos polynomes dans l'intervalle $\frac{1}{2} < x < 1$. Des inégalités (29) et (27) on déduit en effet

$$(-1)^\nu B_{2\nu+1}(x) > 0, \quad \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \tag{31}$$

et

$$(-1)^\nu (B_{2\nu}(x) - B_{2\nu}) > 0, \quad \text{si } 0 < x < 1. \tag{32}$$

Le polynome $B_{2\nu+1}(x)$ a donc les zéros $x = 0, \frac{1}{2}$ et 1 et aucun autre zéro dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$. Ces zéros sont simples car $B_{2\nu}(x)$ est différent de zéro dans ces points en vertu de l'inégalité (28) et des relations (20) et (22). Le polynome $B_{2\nu}(x) - B_{2\nu}$ n'admet pas de zéro à l'intérieur de l'intervalle $0 < x < 1$. Mais les points $x = 0$ et $x = 1$ sont *des zéros d'ordre deux*, si $\nu > 1$, parce que la dérivée s'annule dans ces points pendant que la dérivée seconde est différente de zéro en vertu de (28). Si $\nu = 1$ ces deux zéros sont du premier ordre. Remarquons en particulier que le polynome

$$(-1)^\nu (B_{2\nu}(x) - B_{2\nu})$$

est positif et croît avec x dans l'intervalle $0 < x < \frac{1}{2}$; il est positif et décroissant dans l'intervalle $\frac{1}{2} < x < 1$. Ce polynome a donc un maximum dans le point $x = \frac{1}{2} \cdot$

Des propriétés du polynome $B_{2\nu-1}(x)$ on conclut que le polynome $B_{2\nu}(x)$ a un seul zéro dans l'intervalle $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Ce zéro est situé entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{4}$. En effet, des relations (24) et (25) il résulte que $B_{2\nu}(x)$ change de signe entre ces deux points. Quand ν tend vers l'infini ce zéro tend vers $\frac{1}{4}$. De la relation (30) il résulte enfin que le polynome $B_{2\nu}(x)$ a un seul zéro dans l'intervalle $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ et que ce zéro est situé entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$.

Les polynomes d'Euler.

7. Il y a certains polynomes qui se rattachent étroitement aux polynomes $B_\nu(x)$ et qu'il convient d'étudier en même temps. Considérons l'équation aux différences finies

$$\frac{f(x+1)+f(x)}{2} = x^\nu, \tag{1}$$

ν étant un entier positif. Il y a évidemment un polynome et un seul qui satisfait à cette équation. Ce polynome est du degré ν. Je dis pour abréger que c'est un *polynome* d'Euler et je le désigne par $E_\nu(x)$. On a donc

$$\nabla E_\nu(x) = x^\nu \tag{2}$$

En dérivant cette relation par rapport à x on voit qu'on a

$$D_x E_\nu(x) = \nu E_{\nu-1}(x). \tag{3}$$

La formule de Taylor nous donne donc ce développement

$$E_\nu(x+h) = E_\nu(x) + \binom{\nu}{1} h E_{\nu-1}(x) + \binom{\nu}{2} h^2 E_{\nu-2}(x) + \cdots + h^\nu E_0(x). \tag{4}$$

En posant en particulier $h = 1$ cette formule se réduit à la relation de récurrence

$$2 E_\nu(x) + \binom{\nu}{1} E_{\nu-1}(x) + \binom{\nu}{2} E_{\nu-2}(x) + \cdots + E_0(x) = 2x^\nu, \tag{5}$$

qui permet de calculer successivement tous les $E_\nu(x)$. On trouve ainsi

$$E_0(x) = 1, \quad E_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad E_2(x) = x(x-1), \quad E_3(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right),$$

$$E_4(x) = x(x-1)(x^2 - x - 1), \quad E_5(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1),$$

$$E_6(x) = x(x-1)(x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 3).$$

Si, dans l'équation (2), on remplace x par $-x$ on voit que le polynome

$$(-1)^\nu E_\nu(1-x)$$

est aussi une solution de l'équation (1). Ce polynome est donc égal à $E_\nu(x)$, car il n'y a qu'un seul polynome qui satisfasse à l'équation (1). C'est à dire qu'on a

$$E_\nu(1-x) = (-1)^\nu E_\nu(x). \tag{6}$$

Soit n un entier positif impair. Considérons la fonction

$$f(x) = n^\nu \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s E_\nu\left(\frac{x+s}{n}\right).$$

On a évidemment

$$f(x+1) + f(x) = n^\nu \left[E_\nu\left(\frac{x}{n}\right) + E_\nu\left(\frac{x}{n} + 1\right)\right] = 2x^\nu.$$

Le polynome $f(x)$ est donc une solution de l'équation (1) et par conséquent il est égal à $E_\nu(x)$. On a donc

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s E_\nu\left(x + \frac{s}{n}\right) = n^{-\nu} E_\nu(nx). \tag{7}$$

Nous avons supposé que n est entier positif impair. La relation cesse d'être vraie si n est pair.

On démontre de la même manière cette autre relation

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s B_\nu\left(x + \frac{s}{n}\right) = -\frac{\nu}{2n^{\nu-1}} E_{\nu-1}(nx), \tag{8}$$

n étant un entier positif pair.

8. Euler a introduit certains nombres E_ν qu'on appelle les *nombres* d'Euler et qui figurent comme coefficients dans le développement de séc x en série de puissances. On peut définir les E_ν par la relation de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}E_{\nu-s}+\sum_{s=0}^{s=\nu}(-1)^s\binom{\nu}{s}E_{\nu-s}=0, \quad \nu=1,2,3,\ldots \tag{9}$$
$$E_0=1.$$

Cette relation peut aussi s'écrire sous la forme

$$E_\nu+\binom{\nu}{2}E_{\nu-2}+\binom{\nu}{4}E_{\nu-4}+\cdots=0, \quad \nu=1,2,3,\ldots$$

Le dernier terme au premier membre est E_0, si ν est pair, mais νE_1, si ν est impair. On voit immédiatement que $E_\nu=0$, si ν est impair, et que les autres nombres d'EULER sont des entiers impairs. Voici les premiers d'entre eux

$$E_0=1, \quad E_2=-1, \quad E_4=5, \quad E_6=-61, \quad E_8=1385, \quad E_{10}=-50521.$$

Les polynomes $E_\nu(x)$ s'expriment d'une manière simple à l'aide des nombres d'EULER. En effet posons

$$E_\nu(x)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}A_s\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\nu-s}.$$

Pour déterminer les coefficients A_s substituons cette expression dans la relation (2) et développons le premier membre suivant les puissances de x. En égalant les coefficients des mêmes puissances de x on voit que les A_s doivent vérifier la relation de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}2^{\nu-s}A_{\nu-s}+\sum_{s=0}^{s=\nu}(-1)^s\binom{\nu}{s}2^{\nu-s}A_{\nu-s}=0, \quad \nu=1,2,3,\ldots$$
$$A_0=1,$$

qui détermine uniquement ces nombres. Mais en comparant avec (9) on voit qu'on a

$$E_\nu=2^\nu A_\nu$$

et par conséquent

$$E_\nu(x)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}\frac{E_s}{2^s}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\nu-s}. \tag{10}$$

En posant $x=\frac{1}{2}$ il vient

$$E_\nu\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{E_\nu}{2^\nu}. \tag{11}$$

Le polynome $E_\nu(x)$ s'annule donc dans le point $x=\frac{1}{2}$, si ν est impair.

9. Pour mettre bien en évidence le caractère de la relation de récurrence (9) il convient de l'écrire sous la forme symbolique

$$(E+1)^\nu+(E-1)^\nu=\begin{cases}0, & \nu>0,\\ 2, & \nu=0,\end{cases}$$

où il faut développer suivant les puissances de E et puis remplacer E^n par E_n. On a par conséquent

$$\varphi(E+1)+\varphi(E-1)=2\varphi(0),$$

$\varphi(z)$ étant un polynome quelconque. Et si l'on remplace $\varphi(z)$ par $\varphi\left(x+\frac{z}{2}\right)$ il vient

$$\varphi\left(x+\frac{E+1}{2}\right)+\varphi\left(x+\frac{E-1}{2}\right)=2\varphi(x). \tag{12}$$

L'équation aux différences finies

$$\frac{f(x+1)+f(x)}{2}=\varphi(x), \tag{13}$$

où $\varphi(x)$ est un polynome quelconque de degré ν, admet donc la solution

$$f(x)=\varphi\left(x+\frac{E-1}{2}\right)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\varphi^{(s)}\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^s}\frac{E_s}{s!}. \tag{14}$$

En particulier si l'on pose $\varphi(x)=x^\nu$, il résulte de la définition des polynomes $E_\nu(x)$ qu'on a

$$E_\nu(x)=\left(x+\frac{E-1}{2}\right)^\nu$$

ce qui n'est autre chose que la relation (10). En remplaçant x par $x+h$ il vient

$$E_\nu(x+h)=\left(x+\frac{E-1}{2}+h\right)^\nu.$$

En développant le second membre suivant les puissances de h on retrouve la relation (4).

La série (14) n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un développement plus général. En effet, remplaçons x par $x+h$ on trouve

$$f(x+h) = \varphi\left(x + h + \frac{E - 1}{2}\right) = \varphi(x + E(h)).$$

Le polynome $f(x)$, défini par l'équation (13), peut donc se développer de la manière suivante

$$f(x+h) = \varphi(x + E(h)) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \varphi^{(s)}(x) \frac{E_s(h)}{s!}, \tag{15}$$

x et h étant des variables quelconques. On vérifie d'ailleurs immédiatement que ce polynome satisfait à l'équation (13) car en appliquant aux deux membres de l'équation (15) l'opération ∇, où ∇ porte sur la variable h, on trouve

$$\frac{f(x+h+1) + f(x+h)}{2} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \varphi^{(s)}(x) \frac{h^s}{s!} = \varphi(x+h).$$

Mais si ∇ porte sur la variable x il vient

$$\varphi(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{E_s(h)}{s!} \nabla \varphi^{(s)}(x). \tag{16}$$

Cette formule sommatoire a été démontré par BOOLE[1] dans le cas particulier où $h = 0$. Pour donner une application de cette formule posons

$$\varphi(x) = E_{\nu+1}(x) - (x - 1) E_\nu(x)$$

d'où résulte

$$\nabla \varphi(x) = \frac{1}{2} E_\nu(x).$$

L'équation (16) se réduit par conséquent à

$$E_{\nu+1}(x+h) - (x+h-1) E_\nu(x+h) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_{\nu-s}(x) E_s(h). \tag{17}$$

Supposons en second lieu que

$$\varphi(x) = 2^\nu B_\nu\left(\frac{x}{2}\right).$$

On trouve en vertu de l'équation (18) paragraphe 4

$$\nabla \varphi(x) = B_\nu(x).$$

[1] A treatise on differential equations, London 1865, p. 107.

En substituant ces expressions dans l'équation (16) il vient

$$2^{\nu} B_{\nu}\left(\frac{x+h}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_{\nu-s}(x)\, E_s(h). \tag{18}$$

On peut considérer l'équation (12) comme une relation de récurrence entre les $E_{\nu}(x)$. Cette équation peut en effet s'écrire comme il suit

$$\varphi(E(x)+1) + \varphi(E(x)) = 2\varphi(x). \tag{19}$$

En choisissant le polynome $\varphi(x)$ convenablement on en déduit des relations de récurrence en tel nombre qu'on veut. Par exemple en posant $\varphi(x) = x^{\nu}$ on retrouve la relation (5) qui s'écrit sous la forme symbolique

$$(E(x)+1)^{\nu} + (E(x))^{\nu} = 2x^{\nu}. \tag{5}$$

En posant en particulier $x = \frac{1}{2}$ il vient

$$(E+2)^{\nu} + E^{\nu} = 2$$

c'est à dire que

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s E_{\nu-s} + E_{\nu} = 2.$$

10. Il convient encore d'envisager deux autres suites de nombres, voisins aux nombres d'Euler et de Bernoulli. Nous désignerons ces nombres par C_{ν} et D_{ν} et nous les définirons par les relations de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s C_{\nu-s} + C_{\nu} = 0, \quad \nu > 0,$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} D_{\nu-s} - \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^s \binom{\nu}{s} D_{\nu-s} = 0, \quad \nu > 1,$$

$$C_0 = D_0 = 1,$$

ou sous forme symbolique

$$(C+2)^{\nu} + C^{\nu} = \begin{cases} 0, & \nu > 0, \\ 2, & \nu = 0. \end{cases} \tag{20}$$

$$(D+1)^{\nu} - (D-1)^{\nu} = \begin{cases} 0, & \nu > 1, \\ 2, & \nu = 1. \end{cases} \tag{21}$$

On voit immédiatement que *les C_ν sont des entiers* pendant que les D_ν sont des nombres rationnels tels que $D_\nu = 0$, si ν est impair. Les premiers d'entre eux sont

$$C_0 = 1,\quad C_1 = -1,\quad C_2 = 0,\quad C_3 = 2,\quad C_4 = 0,\quad C_5 = -16,\quad C_6 = 0,\quad C_7 = 272.$$

$$D_0 = 1,\quad D_2 = -\frac{1}{3},\quad D_4 = \frac{7}{15},\quad D_6 = -\frac{31}{21},\quad D_8 = \frac{127}{15},\quad D_{10} = -\frac{2555}{33}.$$

A l'aide de ces nombres on peut de nouveau résoudre les deux équations aux différences finies que nous venons d'étudier. En effet on a

$$\varphi(C+2) + \varphi(C) = 2\varphi(0),$$
$$\varphi(D+1) - \varphi(D-1) = 2\varphi'(0),$$

$\varphi(z)$ étant un polynome quelconque. Et si l'on remplace $\varphi(z)$ par $\varphi\left(x + \frac{z}{2}\right)$ il vient

$$\varphi\left(x + 1 + \frac{C}{2}\right) + \varphi\left(x + \frac{C}{2}\right) = 2\varphi(x), \tag{22}$$

$$\varphi\left(x + \frac{D+1}{2}\right) - \varphi\left(x + \frac{D-1}{2}\right) = \varphi'(x). \tag{23}$$

L'équation aux différences finies

$$\nabla f(x) = \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est un polynome quelconque de degré ν, admet donc la solution

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{C}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{\varphi^{(s)}(x)}{s!}\,\frac{C_s}{2^s}$$

et il n'y a pas d'autres polynomes qui satisfassent à cette équation. Si l'on pose en particulier $\varphi(x) = x^\nu$ il résulte de la définition des polynomes d'Euler qu'on a

$$E_\nu(x) = \left(x + \frac{C}{2}\right)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^{-s} C_s\, x^{\nu-s}. \tag{24}$$

On voit de même que l'équation

$$\triangle f(x) = \varphi'(x)$$

admet la solution

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{D-1}{2}\right) \tag{25}$$

c'est à dire que

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{D_s}{2^s\, s!}\,\varphi^{(s)}(x).$$

Soit en particulier $\varphi(x)=x^{\nu+1}$. De la définition des polynomes de Bernoulli on conclut qu'on a

$$B_\nu(x)=\left(x+\frac{D-1}{2}\right)^\nu=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}2^{-s}D_s\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\nu-s}. \tag{26}$$

Si l'on pose $x=\frac{1}{2}$ il vient

$$B_\nu\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{D_\nu}{2^\nu}. \tag{27}$$

Il y a entre les C_ν et entre les D_ν un grand nombre de relations qu'on déduit des équations (22) et (23) en choisissant convenablement le polynome $\varphi(x)$. Par exemple en posant $\varphi(x)=x^\nu$ on trouve

$$(x+C+2)^\nu+(x+C)^\nu=2\,x^\nu,$$

$$(x+D+1)^\nu-(x+D-1)^\nu=2\,\nu\,x^{\nu-1},$$

d'où en particulier

$$(C+1)^\nu+(C-1)^\nu=2\,(-1)^\nu,$$

$$(D+2)^\nu-D^\nu=2\,\nu.$$

Les nombres d'Euler s'expriment par les C_ν et inversement. En effet en posant $x=\frac{1}{2}$ dans l'équation (24) il vient

$$E_\nu=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}C_s=(C+1)^\nu.$$

Mais en posant $x=0$ on trouve

$$E_\nu(0)=\frac{C_\nu}{2^\nu} \tag{28}$$

et par conséquent en vertu de (6)

$$E_\nu(1)=(-1)^\nu\frac{C_\nu}{2^\nu}. \tag{29}$$

De l'équation (10) on déduit maintenant en posant $x=0$ ou $x=1$

$$C_\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^{\nu-s} \binom{\nu}{s} E_s = (E-1)^\nu,$$

$$(-1)^\nu C_\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s = (E+1)^\nu.$$

De même on trouve

$$2^\nu B_\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^{\nu-s} \binom{\nu}{s} D_s = (D-1)^\nu,$$

$$(-2)^\nu B_\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} D_s = (D+1)^\nu,$$

$$D_\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s B_s = (2B+1)^\nu.$$

Mais ces équations peuvent se réduire. En effet en comparant l'équation (27) à l'équation (22) paragraphe 5 on trouve

$$D_\nu = 2(1-2^{\nu-1}) B_\nu. \tag{30}$$

Les C_ν s'expriment aussi par les nombres de Bernoulli. En effet de l'équation (8) on déduit en posant $n=2$

$$E_{\nu-1}(x) = \frac{2^\nu}{\nu}\left[B_\nu\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_\nu\left(\frac{x}{2}\right)\right]. \tag{31}$$

En faisant tendre x vers zéro il vient

$$C_{\nu-1} = 2^\nu (1-2^\nu) \frac{B_\nu}{\nu}. \tag{32}$$

Des propriétés des nombres de Bernoulli on conclut maintenant que

$$C_{2\nu} = 0, \quad \text{si } \nu > 0,$$
$$D_{2\nu+1} = 0$$

et que

$$(-1)^\nu C_{2\nu-1} > 0, \qquad (-1)^\nu D_{2\nu} > 0. \tag{33}$$

Cela posé rappelons que nous venons de démontrer que

$$2^{-\nu} C_\nu = E_\nu(0) = (-1)^\nu E_\nu(1).$$

Il en résulte que les polynomes $E_\nu(x)$ admettent les points $x=0$ et $x=1$ pour

zéros, si ν est pair. Ces zéros sont du premier ordre car la dérivée de $E_\nu(x)$ est différente de zéro dans ces points en vertu de l'inégalité (33).

Voici enfin une autre propriété des entiers C_ν qu'il convient de signaler. Je veux démontrer que $2^{-\nu}(\nu+1)C_\nu$ est un entier impair, si ν est impair. En effet, nous avons vu qu'on a

$$\varphi(C+2)+\varphi(C)=2\varphi(0).$$

Soit en particulier

$$\varphi(x)=x^\nu(x-2)^{\nu-1},$$

il vient

$$(C+2)^\nu C^{\nu-1}+C^\nu(C-2)^{\nu-1}=0,$$

mais puisque $C_{2\nu}=0$ cette équation se réduit à

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}2^s(2\nu-s)\,C_{2\nu-s-1}=0.$$

En posant pour abréger $T_{\nu+1}=2^{-\nu}(\nu+1)C_\nu$, l'équation prend la forme

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}T_{2\nu-s}=0.$$

On en conclut immédiatement par voie d'induction que les $T_{2\nu}$ sont des entiers impairs.

11. De la relation (18) paragraphe 4 il résulte qu'on a

$$B_\nu\left(\frac{x}{2}\right)+B_\nu\left(\frac{x+1}{2}\right)=2^{1-\nu}B_\nu(x).$$

A l'aide de cette relation on déduit de l'équation (31) que

$$E_{\nu-1}(x)=\frac{2}{\nu}\left[B_\nu(x)-2^\nu B_\nu\left(\frac{x}{2}\right)\right]. \tag{34}$$

On aurait pu arriver un peu plus directement à ce résultat en considérant l'équation aux différences finies

$$f(x+2)-f(x)=2\left[(x+1)^{\nu-1}-x^{\nu-1}\right].$$

On vérifie immédiatement que le premier et le second membre de la relation (34) sont des solutions de cette équation. Ces deux solutions rationnelles ne peuvent donc différer que par une constante. Et cette constante est zéro. C'est ce qu'on voit en posant $x=0$.

De l'équation (34) on peut déduire quelques résultats numériques. En posant $x = \frac{1}{2}$ on trouve

$$B_\nu\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{D_\nu - \nu E_{\nu-1}}{4^\nu}.$$

Si ν est impair cette équation se réduit à

$$B_\nu\left(\frac{1}{4}\right) = -\nu \frac{E_{\nu-1}}{4^\nu}.$$

Dans le paragraphe 5 nous avons déjà trouvé la valeur de $B_\nu\left(\frac{1}{4}\right)$ dans le cas où ν est pair et cette valeur est en accord avec celle que nous venons de trouver parce que $E_\nu = 0$, si ν est impair.

En posant $x = \frac{1}{3}$ dans l'équation (34) on trouve, en tenant compte des relations (23) et (25) paragraphe 5, que

$$E_\nu\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1 - \frac{1}{3^\nu}\right) \frac{C_\nu}{2^{\nu+1}},$$

pourvu que ν soit impair. On arrive aussi à ce résultat en posant $x = 0$ et $n = 3$ dans l'équation (7). Mais si l'on pose $x = \frac{1}{2}$, $n = 3$ dans l'équation (7) on trouve

$$E_\nu\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^\nu}\right) E_\nu\left(\frac{1}{2}\right),$$

pourvu que ν soit pair. On a donc, dans ce cas

$$E_\nu\left(\frac{5}{6}\right) = E_\nu\left(\frac{1}{6}\right) = \left(1 + \frac{1}{3^\nu}\right) \frac{E_\nu}{2^{\nu+1}}.$$

12. Dans les paragraphes 3 et 9 nous avons démontré qu'on a

$$\nu(x + y - 1) B_{\nu-1}(x + y) - (\nu - 1) B_\nu(x + y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s(x) B_{\nu-s}(y),$$

$$E_{\nu+1}(x + y) - (x + y - 1) E_\nu(x + y) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s(x) E_{\nu-s}(y),$$

$$2^\nu B_\nu\left(\frac{x + y}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s(x) E_{\nu-s}(y).$$

On peut en tirer diverses relations remarquables que je vais signaler. En posant x et y égaux à o ou $\frac{1}{2}$ on trouve

$$(B+B)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s B_{\nu-s} = (1-\nu) B_\nu - \nu B_{\nu-1},$$

$$(C+C)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s C_{\nu-s} = C_{\nu+1} + 2\, C_\nu,$$

$$(E+E)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s E_{\nu-s} = - C_{\nu+1},$$

$$(D+D)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} D_s D_{\nu-s} = 2^\nu (1-\nu) B_\nu,$$

$$(E+C)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s C_{\nu-s} = E_\nu + E_{\nu+1},$$

$$(E+D)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s D_{\nu-s} = 2^\nu D_\nu,$$

$$(C+D)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s D_{\nu-s} = D_\nu - \nu E_{\nu-1},$$

$$(2\, B+D)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s B_s D_{\nu-s} = - \nu D_{\nu-1} - (\nu-1) D_\nu,$$

$$(2\, B+C)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s B_s C_{\nu-s} = 4^\nu B_\nu,$$

$$(2\, B+E)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s B_s E_{\nu-s} = D_\nu - \nu E_{\nu-1}.$$

13. Je vais enfin déduire les valeurs de quelques intégrales définies dont nous aurons à faire usage plus loin. Nous avons vu que

$$\frac{d\, B_\nu(x)}{dx} = \nu B_{\nu-1}(x), \qquad \frac{d\, E_\nu(x)}{dx} = \nu E_{\nu-1}(x).$$

Il en résulte que

$$\int_x^y B_\nu(z)\, dz = \frac{B_{\nu+1}(y) - B_{\nu+1}(x)}{\nu+1}$$

$$\int_x^y E_\nu(z)\,dz = \frac{E_{\nu+1}(y) - E_{\nu+1}(x)}{\nu + 1}. \tag{35}$$

En posant $y = x + \frac{1}{2}$ dans la première de ces équations on trouve en vertu de (31)

$$\int_x^{x+\frac{1}{2}} B_\nu(z)\,dz = \frac{E_\nu(2x)}{2^{\nu+1}},$$

d'où en particulier

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_\nu(z)\,dz = \frac{C_\nu}{2^{2\nu+1}}, \qquad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} B_\nu(z)\,dz = \frac{E_\nu}{2^{2\nu+1}}.$$

De l'équation (35) on déduit en posant $x = 0$ et $y = 1$ ou $\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 E_\nu(z)\,dz = -\frac{C_{\nu+1}}{(\nu+1)2^\nu},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} E_{2\nu-1}(z)\,dz = \frac{E_{2\nu}}{2\nu \cdot 2^{2\nu}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} E_{2\nu}(z)\,dz = -\frac{C_{2\nu+1}}{(2\nu+1)\,2^{2\nu+1}}.$$

La première de ces intégrales s'annule donc si ν est impair.

14. Nous avons déjà vu que les polynomes $E_{2\nu}(x)$ admettent les points $x = 0$ et $x = 1$ pour zéros du premier ordre. C'est ce qui résulte en effet des égalités (28) et (29). Les polynomes de degré impair ont un zéro dans le point $x = \frac{1}{2}$. On a en effet

$$E_\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{E_\nu}{2^\nu}$$

et $E_\nu = 0$, si ν est impair. Je veux démontrer que ce zéro est toujours du premier ordre et qu'il n'y a pas d'autres zéros dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ que ceux que nous venons d'indiquer. Dans ce but je démontre d'abord qu'on a

$$(-1)^\nu E_{2\nu-1}(x) > 0, \qquad \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}. \tag{36}$$

En effet, cette inégalité est vraie, si $\nu = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour une certaine valeur de ν. En intégrant entre les limites 0 et x on trouve

$$(-1)^\nu E_{2\nu}(x) > 0, \qquad \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \tag{37}$$

et en intégrant encore une fois entre les limites x et $\frac{1}{2}$ on trouve

$$(-1)^{\nu+1} E_{2\nu+1}(x) > 0, \qquad \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \qquad \text{c. q. f. d.}.$$

Cette inégalité est vraie encore si $x = 0$; c'est ce qui résulte de l'équation (28). De l'inégalité (37) on peut tirer un résultat important. En posant $x = \frac{1}{2}$ on trouve en effet

$$(-1)^\nu E_{2\nu} > 0.$$

On voit maintenant que le zéro $x = \frac{1}{2}$ de la fonction $E_{2\nu+1}(x)$ est du premier ordre, car sa dérivée $(2\nu + 1) E_{2\nu}(x)$ est différente de zéro dans le point $x = \frac{1}{2}$.

En tenant compte de la relation

$$E_\nu(1 - x) = (-1)^\nu E_\nu(x)$$

on déduit de (36)

$$(-1)^\nu E_{2\nu-1}(x) < 0, \qquad \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1$$

et de (37)

$$(-1)^\nu E_{2\nu}(x) > 0, \qquad \text{si } 0 < x < 1.$$

Le résultat énoncé plus haut relativement aux zéros de $E_\nu(x)$ est donc complètement démontré.

Polynomes d'Euler d'ordre n.

15. Les coefficients des deux suites de polynomes que nous venons d'étudier sont des nombres rationnels. On sait maintenant construire des polynomes qui possèdent des propriétés de tous points analogues à celles que nous venons d'énumérer et dont les coefficients dépendent d'un nombre quelconque de paramètres $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$. Ces polynomes sont des généralisations immédiates des $E_\nu(x)$ et des $B_\nu(x)$ et nous les appellerons par extension des *polynomes* d'EULER et des *polynomes de* BERNOULLI *d'ordre supérieur*. L'étude de ces polynomes s'impose pour plusieurs raisons. Les $B_\nu(x)$ et les $E_\nu(x)$ sont indispensables dans l'étude des équations aux différences finies du premier ordre. Les polynomes nouveaux entrent de même dans l'étude des équations d'ordre quelconque.

Soit n un entier positif. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ des nombres complexes quelconques. Considérons l'équation aux différences finies

$$\mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} f(x) = x^\nu, \tag{1}$$

ν étant un entier non négatif. Il y a évidemment un polynome et un seul qui satisfait à cette équation. Ce polynome est du degré ν. Je le désigne par $E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots \omega_n)$ ou plus brièvement par $E_\nu^{(n)}(x)$. On peut ainsi définir une suite infinie de *polynomes* d'EULER $E_\nu^{(1)}(x), E_\nu^{(2)}(x), E_\nu^{(3)}(x), \ldots$ et l'on a en particulier $E_\nu^{(1)}(x \mid \omega) = \omega^\nu E_\nu\left(\frac{x}{\omega}\right)$.

Je dis pour abréger, que le polynome $E_\nu^{(n)}(x)$ est *du degré ν et d'ordre n*. Les polynomes $E_\nu^{(n)}(x)$ possèdent des propriétés remarquables et il y a des nombreuses relations entre eux que nous allons mettre en évidence.

Voici d'abord deux propriétés importantes qui découlent immédiatement de la définition. Soit p un entier positif plus petit que n. Posons

$$\mathop{\nabla^p}_{\omega_1 \cdots \omega_p} E_\nu^{(n)}(x) = F(x).$$

On a en vertu de (1)

$$\mathop{\nabla^{n-p}}_{\omega_{p+1} \cdots \omega_n} F(x) = x^\nu.$$

Le polynome $F(x)$ qui satisfait à cette équation est par définition égal à

$$F(x) = E_\nu^{(n-p)}(x \mid \omega_{p+1}, \ldots \omega_n).$$

On a donc

$$\nabla^p E_\nu^{(n)}(x) = E_\nu^{(n-p)}(x), \quad p = 1, 2, \ldots n-1, \tag{2}$$

et si l'on veut mettre en évidence les paramètres

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_p}{\nabla^p} E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = E_\nu^{(n-p)}(x \mid \omega_{p+1}, \ldots \omega_n).$$

Si l'on pose $E_\nu^{(0)}(x) = x^\nu$, cette relation subsiste encore pour $p = n$. On peut d'ailleurs permuter les paramètres $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ d'une manière quelconque. Si l'on distingue p parmi d'eux, et si l'opération ∇^p porte sur ces p paramètres, le polynome au second membre ne dépend plus des paramètres distingués.

Remarquons en particulier qu'on a

$$\begin{aligned}
&\underset{\omega_n}{\nabla} E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots \omega_n) = E_\nu^{(n-1)}(x \mid \omega_1, \ldots \omega_{n-1}),\\
&\underset{\omega_{n-1}}{\nabla} E_\nu^{(n-1)}(x \mid \omega_1, \ldots \omega_{n-1}) = E_\nu^{(n-2)}(x \mid \omega_1, \ldots \omega_{n-2}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\underset{\omega_1}{\nabla} E_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) = x^\nu.
\end{aligned} \tag{3}$$

Ces n équations sont équivalentes à l'équation[1] (1).

En dérivant l'équation (1) par rapport à x la définition des polynomes d'Euler nous donne immédiatement cette relation

$$D_x E_\nu^{(n)}(x) = \nu E_{\nu-1}^{(n)}(x) \tag{4}$$

On a donc en vertu de la formule de Taylor

$$E_\nu^{(n)}(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} h^s E_{\nu-s}^{(n)}(x). \tag{5}$$

En posant $h = \omega_n$ ce développement prend la forme

$$E_\nu^{(n-1)}(x) = E_\nu^{(n)}(x) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s E_{\nu-s}^{(n)}(x), \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

A l'aide de cette relation de récurrence on sait déterminer successivement tous les polynomes d'Euler d'ordre n quand on connait les polynomes d'ordre $n-1$. On sait d'ailleurs d'une manière explicite exprimer les polynomes d'ordre n par les polynomes d'ordre inférieur à n. En effet, je dis qu'on a

[1] On peut donc, si l'on aime mieux, *définir* les polynomes d'Euler par ces n équations au lieu de, comme nous l'avons fait, par l'unique équation (1).

$$E_\nu^{(n)}(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(p)}(y)\, E_{\nu-s}^{(n-p)}(x), \tag{7}$$

x et y étant des nombres quelconques, p étant, comme plus haut, un entier positif plus petit que n. Pour le voir considérons l'équation

$$\mathop{\nabla^p}_{\omega_1 \ldots \omega_p} f(x) = \varphi(x), \tag{8}$$

$\varphi(x)$ étant un polynome du degré ν

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_\nu x^\nu.$$

Le polynome $f(x)$ qui satisfait à cette équation peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = A_0 E_0^{(p)}(x) + A_1 E_1^{(p)}(x) + \cdots + A_\nu E_\nu^{(p)}(x).$$

Remplaçons x par $x+y$ et développons le second membre suivant les puissances de x; on trouve en vertu de (5)

$$f(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \varphi^{(s)}(x) \frac{E_s^{(p)}(y)}{s\,!}. \tag{9}$$

Si l'on pose en particulier

$$\varphi(x) = E_\nu^{(n-p)}(x \mid \omega_{p+1}, \ldots \omega_n)$$

on a comme nous venons de le démontrer

$$f(x) = E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots \omega_n).$$

En substituant ces valeurs l'équation (9) prend la forme

$$E_\nu^{(n)}(x+y \mid \omega_1, \ldots \omega_n) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(p)}(y \mid \omega_1, \ldots \omega_p)\, E_{\nu-s}^{(n-p)}(x \mid \omega_{p+1}, \ldots \omega_n) \tag{10}$$

c. q. f. d.

Cette relation subsiste encore si les polynomes $E_s^{(p)}(y)$ $(s = 0, 1, \ldots \nu)$ dépendent de p quelconques parmi les nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ pendant que les polynomes $E_s^{(n-p)}(x)$ dépendent des $n-p$ autres. Notre relation peut évidemment s'écrire sous l'une et l'autre des deux formes symboliques suivantes

$$E_\nu^{(n)}(x+y) = E_\nu^{(n-p)}(x + E^{(p)}(y))$$

$$E_\nu^{(n)}(x+y) = (E^{(n-p)}(x) + E^{(p)}(y))^\nu.$$

De la dernière expression on conclut qu'on a plus généralement

$$E_\nu^{(n)}(x_1 + x_2 + \cdots + x_s) = (E^{(p_1)}(x_1) + E^{(p_2)}(x_2) + \cdots + E^{(p_s)}(x_s))^\nu, \qquad (10 \text{ bis})$$

$x_1, x_2, \ldots x_s$ étant des nombres quelconques, $p_1, p_2, \ldots p_s$ étant des entiers positifs tels que $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = n$.

L'équation (10) est une généralisation de l'équation (5) et s'y réduit si $p = 0$. Si $p = 1$ on trouve

$$E_\nu^{(n)}(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s(y \mid \omega_n)\, E_{\nu-s}^{(n-1)}(x \mid \omega_1, \ldots \omega_{n-1}). \qquad (11)$$

En posant $y = 0$ il vient

$$E_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^s C_s\, E_{\nu-s}^{(n-1)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}). \qquad (12)$$

On arrive aussi à cette équation en résolvant le système des équations (6) par rapport aux $E_\nu^{(n)}(x)$. Les équations (6) et (12) sont donc, pour ainsi dire, *réciproques*.

A l'aide de l'une ou l'autre de ces relations on détermine aisément tous les polynomes $E_\nu^{(n)}(x)$. Je reproduis ici les premiers d'entre eux

$$E_0^{(n)}(x) = 1, \quad E_1^{(n)}(x) = x - \frac{1}{2}\sum_1^n \omega_s,$$

$$E_2^{(n)}(x) = x^2 - \sum_1^n \omega_s x + \frac{1}{2}\sum \omega_{s_1}\omega_{s_2},$$

$$E_3^{(n)}(x) = x^3 - \frac{3}{2}\sum_1^n \omega_s x^2 + \frac{3}{2}\sum \omega_{s_1}\omega_{s_2} x + \frac{\sum_1^n \omega_s^3 - 3\sum \omega_{s_1}\omega_{s_2}\omega_{s_3}}{4}.$$

$$E_4^{(n)}(x) = x^4 - 2\sum_1^n \omega_s x^3 + 3\sum \omega_{s_1}\omega_{s_2} x^2 + \left(\sum_1^n \omega_s^3 - 3\sum \omega_{s_1}\omega_{s_2}\omega_{s_3}\right) x - \frac{\sum \omega_{s_1}^3 \omega_{s_2} - 3\sum \omega_{s_1}\omega_{s_2}\omega_{s_3}\omega_{s_4}}{2}.$$

16. Quelle est l'expression générale des coefficients dans ces polynomes? Il est facile de le voir. Nous allons démontrer qu'ils s'expriment d'une part à l'aide des nombres d'Euler E_ν et d'autre part à l'aide des entiers C_ν. Nous donne-

rons en même temps deux méthodes nouvelles[1] pour résoudre notre équation aux différences finies.

Dans ce but j'introduis certaines formes que je désigne par $E_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n]$ et $C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n]$ ou plus brièvement par $E_\nu^{(n)}$ et $C_\nu^{(n)}$. Ces formes sont pour les polynomes d'Euler d'ordre n ce que les nombres E_ν et C_ν sont pour les polynomes d'Euler d'ordre *un*.

Nous avons défini les E_ν et les C_ν par les équations

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_{\nu-s} + \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^s \binom{\nu}{s} E_{\nu-s} = 0,$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^s C_{\nu-s} + C_\nu = 0,$$

ou symboliquement

$$(E+1)^\nu + (E-1)^\nu = \begin{cases} 0 & \nu > 0 \\ 2 & \nu = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$(C+2)^\nu + (C)^\nu = \begin{cases} 0 & \nu > 0 \\ 2 & \nu = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Je définis de même les quantités $E_\nu^{(n)}$ et $C_\nu^{(n)}$ par les relations de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s E_{\nu-s}^{(n)} + \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} (-1)^s \omega_n^s E_{\nu-s}^{(n)} = 2 E_\nu^{(n-1)}, \tag{15}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} (2\omega_n)^s C_{\nu-s}^{(n)} + C_\nu^{(n)} = 2 C_\nu^{(n-1)} \tag{16}$$

ou symboliquement

$$(E^{(n)} + \omega_n)^\nu + (E^{(n)} - \omega_n)^\nu = 2 E_\nu^{(n-1)}, \tag{17}$$

$$(C^{(n)} + 2\omega_n)^\nu + (C^{(n)})^\nu = 2 C_\nu^{(n-1)}. \tag{18}$$

Pour achever la définition je pose en particulier

$$E_\nu^{(1)}[\omega_1] = \omega_1^\nu E_\nu, \quad C_\nu^{(1)}[\omega_1] = \omega_1^\nu C_\nu.$$

[1] Si nous n'avions pas eu ce but supplémentaire nous aurions pu simplifier un peu l'analyse de ce paragraphe en tenant compte des résultats du paragraphe précédent.

On détermine ainsi successivement les quantités $E_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2]$, $E_\nu^{(3)}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$, $E_\nu^{(4)}[\omega_1, \ldots \omega_4], \ldots$ et les quantités $C_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2]$, $C_\nu^{(3)}[\omega_1, \omega_2, \omega_3], \ldots$ Les équations (13) et (14) sont pour ainsi dire les relations de récurrence qui appartiennent à l'équation aux différences finies

$$E_\nu(x+1) + E_\nu(x) = 2x^\nu.$$

Dans cet ordre d'idées on peut dire que les équations (17) et (18) sont les relations de récurrence qui appartiennent au système d'équations (3). Des équations (17) et (18) il résulte qu'on a

$$\varphi(E^{(n)} + \omega_n) + \varphi(E^{(n)} - \omega_n) = 2\varphi(E^{(n-1)}), \tag{19}$$

$$\varphi(C^{(n)} + 2\omega_n) + \varphi(C^{(n)}) = 2\varphi(C^{(n-1)}), \tag{20}$$

$\varphi(z)$ étant un polynome quelconque. Si l'on remplace $\varphi(z)$ par $\varphi\left(x + \frac{z}{2}\right)$ il vient

$$\varphi\left(x + \frac{E^{(n)} + \omega_n}{2}\right) + \varphi\left(x + \frac{E^{(n)} - \omega_n}{2}\right) = 2\varphi\left(x + \frac{E^{(n-1)}}{2}\right), \tag{21}$$

$$\varphi\left(x + \omega_n + \frac{C^{(n)}}{2}\right) + \varphi\left(x + \frac{C^{(n)}}{2}\right) = 2\varphi\left(x + \frac{C^{(n-1)}}{2}\right). \tag{22}$$

L'équation aux différences finies

$$f(x + \omega_n) + f(x) = 2\varphi\left(x + \frac{E^{(n-1)}}{2}\right)$$

admet donc la solution

$$f(x) = \varphi\left(x - \frac{\omega_n}{2} + \frac{E^{(n)}}{2}\right)$$

et l'équation aux différences finies

$$f(x + \omega_n) + f(x) = 2\varphi\left(x + \frac{C^{(n-1)}}{2}\right)$$

admet la solution

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{C^{(n)}}{2}\right).$$

Cela posé, rappelons qu'on a

$$\begin{aligned} E_\nu^{(1)}(x+\omega_1)+E_\nu^{(1)}(x) &= 2\,x^\nu \\ E_\nu^{(2)}(x+\omega_2)+E_\nu^{(2)}(x) &= 2\,E_\nu^{(1)}(x) \\ E_\nu^{(3)}(x+\omega_3)+E_\nu^{(3)}(x) &= 2\,E_\nu^{(2)}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_\nu^{(n)}(x+\omega_n)+E_\nu^{(n)}(x) &= 2\,E_\nu^{(n-1)}(x). \end{aligned} \tag{23}$$

De la première de ces équations nous avons conclu dans le paragraphe 9 que

$$E_\nu^{(1)}(x\mid\omega_1) = \left(x-\frac{\omega_1}{2}+\frac{E^{(1)}}{2}\right)^\nu.$$

De la seconde équation on conclut de même, en posant $\varphi(x)=\left(x-\frac{\omega_1}{2}\right)^\nu$, que

$$E_\nu^{(2)}(x\mid\omega_1,\omega_2) = \left(x-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+\frac{E^{(2)}}{2}\right)^\nu$$

et par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$E_\nu^{(n)}(x\mid\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_n) = \left(x-\frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}+\frac{E^{(n)}}{2}\right)^\nu$$

c'est à dire que

$$E_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}\frac{E_s^{(n)}}{2^s}\left(x-\frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}\right)^{\nu-s}. \tag{24}$$

En changeant la variable il vient

$$2^\nu E_\nu^{(n)}\left(\frac{x+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}x^s E_{\nu-s}^{(n)}. \tag{25}$$

De la première des équations (23) nous avons conclu dans le paragraphe 10 que

$$E_\nu^{(1)}(x\mid\omega_1) = \left(x+\frac{C^{(1)}}{2}\right)^\nu.$$

De la seconde équation on conclut de même, en posant $\varphi(x)=x^\nu$, que

$$E_\nu^{(2)}(x\mid\omega_1,\omega_2) = \left(x+\frac{C^{(2)}}{2}\right)^\nu$$

et par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$E_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = \left(x + \frac{C^{(n)}}{2}\right)^\nu \tag{26}$$

c'est à dire que

$$E_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \frac{C_s^{(n)}}{2^s} x^{\nu-s}. \tag{27}$$

L'étude des polynomes d'Euler est ainsi ramenée à une étude des quantités $E_\nu^{(n)}$ ou $C_\nu^{(n)}$.

17. Revenons à l'équation (15) qui définit les $E_\nu^{(n)}$. On peut, si l'on aime mieux, écrire cette relation de récurrence sous la forme

$$E_\nu^{(n)} + \binom{\nu}{2} \omega_n^2 E_{\nu-2}^{(n)} + \binom{\nu}{4} \omega_n^4 E_{\nu-4}^{(n)} + \cdots = E_\nu^{(n-1)} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Le dernier terme au premier membre est égal à $\omega_n^\nu E_0^{(n)}$, si ν est pair, mais égal à $\nu\,\omega_n^{\nu-1} E_1^{(n)}$, si ν est impair.

On voit immédiatement que $E_\nu^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$ est une forme du degré ν et *à coefficients entiers*. Remarquons en outre qu'on a $E_{2\nu+1} = 0$, et par conséquent en vertu de (28) $E_{2\nu+1}^{(n)} = 0$ quels que soient n et ν.

De cette observation on peut tirer un résultat important. Posons $x = 0$ dans l'équation (25), il vient

$$2^\nu E_\nu^{(n)}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}{2}\right) = E_\nu^{(n)}. \tag{29}$$

Le polynome $E_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \ldots \omega_n)$ *s'annule donc toujours dans le point*

$$x = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}{2},$$

si ν est impair, et cela quel que soit n.

De l'équation (16)

$$C_\nu^{(n)} + \sum_{s=1}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s 2^{s-1} C_{\nu-s}^{(n)} = C_\nu^{(n-1)} \tag{16}$$

on conclut de même que $C_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots \omega_n]$ est une forme du degré ν et *à coefficients entiers*. Pour trouver l'expression explicite de ces formes posons $x = 0$ dans l'équation (27); il vient

$$2^\nu E_\nu^{(n)}(0) = C_\nu^{(n)}. \tag{30}$$

Revenons à l'équation (11) et posons $x = y = 0$ on trouve

$$C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s C_s C_{\nu-s}^{(n-1)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}] \tag{31}$$

ce qui est la réciproque de l'équation (16). D'autre part en posant

$$y = \frac{\omega_n}{2}, \qquad x = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{n-1}}{2}$$

dans l'équation (11) il vient

$$E_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s E_s E_{\nu-s}^{(n-1)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}] \tag{32}$$

ce qui est la réciproque de l'équation (28). En posant $n = 2$ on trouve

$$C_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s C_{\nu-s} \omega_1^s \omega_2^{\nu-s}, \tag{33}$$

$$E_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s E_{\nu-s} \omega_1^s \omega_2^{\nu-s}, \tag{34}$$

et par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$C_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1!\, s_2! \ldots s_n!} C_{s_1} C_{s_2} \ldots C_{s_n} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \ldots \omega_n^{s_n}, \tag{35}$$

$$E_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1!\, s_2! \ldots s_n!} E_{s_1} E_{s_2} \ldots E_{s_n} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \ldots \omega_n^{s_n}, \tag{36}$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières, positives ou nulles de $s_1, s_2 \ldots, s_n$ qui vérifient la condition $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \nu$.

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme symbolique

$$C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n] = ({}_1C\, \omega_1 + {}_2C\, \omega_2 + \cdots + {}_nC\, \omega_n)^\nu$$
$$E_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n] = ({}_1E\, \omega_1 + {}_2E\, \omega_2 + \cdots + {}_nE\, \omega_n)^\nu.$$

On a par conséquent aussi

$$2^\nu E_\nu^{(n)}\left(\frac{x}{2} \,\middle|\, \omega_1, \ldots \omega_n\right) = (x + {}_1C\, \omega_1 + {}_2C\, \omega_2 + \cdots + {}_nC\, \omega_n)^\nu$$

$$2^\nu E_\nu^{(n)}\left(\frac{x + \omega_1 + \cdots + \omega_n}{2} \,\middle|\, \omega_1, \ldots \omega_n\right) = (x + {}_1E\, \omega_1 + {}_2E\, \omega_2 + \cdots + {}_nE\, \omega_n)^\nu.$$

On ne réduira pas les ${}_rC$ avec les ${}_sC$, ni non plus les ${}_rE$ avec les ${}_sE$. Mais lorsque le développement symbolique des seconds membres sera effectué, on remplacera $({}_sC)^\nu$ par C_ν et $({}_sE)^\nu$ par E_ν.

Les formes $E_\nu^{(n)}$ et $C_\nu^{(n)}$ sont donc des *fonctions symétriques des paramètres* $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ et il en est de même des polynomes $E_\nu^{(n)}(x)$. Ces fonctions sont en outre homogènes et du degré ν c'est à dire qu'on a

$$C_\nu^{(n)}[\lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \ldots \lambda\omega_n] = \lambda^\nu C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n], \tag{37}$$

$$E_\nu^{(n)}[\lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \ldots \lambda\omega_n] = \lambda^\nu E_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n], \tag{38}$$

$$E_\nu^{(n)}(\lambda x \,|\, \lambda\omega_1, \ldots \lambda\omega_n) = \lambda^\nu E_\nu^{(n)}(x \,|\, \omega_1, \ldots \omega_n), \tag{39}$$

λ étant un nombre quelconque.

Si ν est impair le second membre de (33) se réduit et on trouve

$$C_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = (\omega_1^\nu + \omega_2^\nu)\, C_\nu .$$

De même si ν est impair le second membre de (36) se réduit à zéro parce que $E_{2p+1} = 0$.

Les relations (31) et (32) ne sont que des cas particuliers de relations plus générales. En effet, en posant dans l'équation (10)

$$y = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_p}{2}, \quad x = \frac{\omega_{p+1} + \omega_{p+2} + \cdots + \omega_n}{2}$$

on trouve

$$E_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(p)}[\omega_1, \ldots \omega_p]\, E_{\nu-s}^{(n-p)}[\omega_{p+1}, \ldots \omega_n] = (E^{(p)} + E^{(n-p)})^\nu$$

qui se réduit à (32), si $p = 1$. Et en posant $y = x = 0$ on trouve

$$C_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s^{(p)}[\omega_1, \ldots \omega_p]\, C_{\nu-s}^{(n-p)}[\omega_{p+1}, \ldots \omega_n] = (C^{(p)} + C^{(n-p)})^\nu$$

qui se réduit à (31), si $p = 1$. De ces expressions on conclut encore qu'on a plus généralement

$$E_\nu^{(n)} = (E^{(p_1)} + E^{(p_2)} + \cdots + E^{(p_s)})^\nu,$$
$$C_\nu^{(n)} = (C^{(p_1)} + C^{(p_2)} + \cdots + C^{(p_s)})^\nu,$$

$p_1, p_2 \ldots p_s$ étant des entiers positifs qui vérifient la condition $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = n$. A l'aide de l'une ou de l'autre de ces relations on détermine aisément les $E_\nu^{(n)}$ et les $C_\nu^{(n)}$. Voici les premières de ces formes

$$E_0^{(n)} = 1, \qquad E_2^{(n)} = -\sum_{s=1}^{s=n} \omega_s^2, \qquad E_4^{(n)} = 5\sum_{s=1}^{s=n} \omega_s^4 + 6\sum \omega_{s_1}^2 \omega_{s_2}^2$$

$$C_0^{(n)} = 1, \quad C_1^{(n)} = -\sum_{s=1}^{s=n} \omega_s, \quad C_2^{(n)} = 2\sum \omega_{s_1}\omega_{s_2}, \quad C_3^{(n)} = 2\sum_{s=1}^{s=n} \omega_s^3 - 6\sum \omega_{s_1}\omega_{s_2}\omega_{s_3}.$$

18. Il y a un grand nombre de relations entre les $E_\nu^{(n)}$ et entre les $C_\nu^{(n)}$. On les déduit des équations (21) et (22) en choisissant convenablement le polynome $\varphi(x)$. Par exemple en posant $\varphi(x) = x^\nu$ on trouve

$$(x + E^{(n)} + \omega_n)^\nu + (x + E^{(n)} - \omega_n)^\nu = 2\,(x + E^{(n-1)})^\nu,$$

$$(x + C^{(n)} + 2\omega_n)^\nu + (x + C^{(n)})^\nu = 2\,(x + C^{(n-1)})^\nu.$$

En posant $x = \omega_n$ dans la première et $x = -\omega_n$ dans la seconde de ces relations on trouve

$$(E^{(n)} + 2\,\omega_n)^\nu + (E^{(n)})^\nu = 2\,(E^{(n-1)} + \omega_n)^\nu,$$

$$(C^{(n)} + \omega_n)^\nu + (C^{(n)} - \omega_n)^\nu = 2\,(C^{(n-1)} - \omega_n)^\nu.$$

Les $E_\nu^{(n)}$ s'expriment aussi par les $C_\nu^{(n)}$ et inversement. En posant $x = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)$ dans l'équation (27) il vient

$$E_\nu^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s^{(n)} (\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)^{\nu-s} = (C^{(n)} + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)^\nu.$$

En posant $x = 0$ dans l'équation (24) il vient

$$C_\nu^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} (-1)^{\nu-s} E_s^{(n)}.(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)^{\nu-s} = (E^{(n)} - \omega_1 - \omega_2 - \cdots - \omega_n)^\nu,$$

$$(-1)^\nu C_\nu^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(n)}.(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)^{\nu-s} = (E^{(n)} + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)^\nu.$$

Remarquons encore que l'équation (22) peut s'écrire comme il suit

$$\varphi(E^{(n)}(x) + \omega_n) + \varphi(E^{(n)}(x)) = 2\,\varphi(E^{(n-1)}(x)).$$

C'est le type général des relations entre les polynomes de deux ordres consécutifs. $\varphi(x)$ est un polynome quelconque de degré ν, pour fixer les idées. Remplaçons $\varphi(x)$ par $\varphi(x+y)$, y étant un nombre quelconque, et développons. Il vient

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{E_s^{(n)}(x)}{s\,!} \mathop{\nabla}_{\omega_n} \varphi^{(s)}(y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{E_s^{(n-1)}(x)}{s\,!} \varphi^{(s)}(y).$$

En appliquant aux deux membres de cette équation l'opération ∇ $n-1$ fois de suite, où ∇ porte sur la variable y, on trouve

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{E_s^{(n)}(x)}{s\,!} \mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} \varphi^{(s)}(y) = \varphi(x+y).$$

C'est le type général d'une relation de récurrence entre les polynomes d'ordre n. En posant en particulier $x=0$ ou $x=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)$ il vient

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{C_s^{(n)}[\omega_1, \ldots \omega_n]}{2^s\, s\,!} \mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} \varphi^{(s)}(y) = \varphi(y),$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{E_s^{(n)}[\omega_1, \ldots \omega_n]}{2^s\, s\,!} \mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} \varphi^{(s)}(y) = \varphi\left(y + \frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}\right).$$

19. Nous avons vu qu'on a

$$\frac{E_\nu^{(n)}(x+\omega_1)+E_\nu^{(n)}(x)}{2} = E_\nu^{(n-1)}(x \mid \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

En remplaçant x par $-x$ et en tenant compte de l'équation (39) il vient

$$(-1)^\nu \frac{E_\nu^{(n)}(-x) + E_\nu^{(n)}(\omega_1 - x)}{2} = E_\nu^{(n-1)}(x \mid -\omega_2, \ldots, -\omega_n).$$

Les polynomes $E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n)$ et $(-1)^\nu E_\nu^{(n)}(\omega_1 - x \mid \omega_1, -\omega_2, -\omega_3, \ldots, -\omega_n)$ satisfont donc tous les deux à l'équation

$$\frac{f(x+\omega_1)+f(x)}{2} = E_\nu^{(n-1)}(x \mid \omega_2, \ldots \omega_n).$$

Ces deux polynomes sont par conséquent identiques c'est à dire qu'on a

$$E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = E_\nu^{(n)}(x - \omega_1 \mid -\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$

et en remplaçant x par $x+\omega_1$

$$E_\nu^{(n)}(x+\omega_1 \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = E_\nu^{(n)}(x \mid -\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n). \tag{40}$$

De cette relation on déduit encore

$$E_\nu^{(n)}(x+\omega_1+\omega_2\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = E_\nu^{(n)}(x\,|\,-\omega_1,-\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n),$$

$$E_\nu^{(n)}(x+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_p\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = E_\nu^{(n)}(x\,|\,-\omega_1,-\omega_2,\ldots,-\omega_p,\omega_{p+1},\ldots,\omega_n), \quad (41)$$

où p prend les valeurs $1, 2, \ldots n$. Dans le cas $p=n$ la relation peut s'écrire sous la forme

$$E_\nu^{(n)}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n-x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = (-1)^\nu E_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n). \quad (42)$$

En posant $x=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)$ on voit que le polynome $E_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$, si ν est impair, admet ce point pour zéro comme nous l'avons déjà fait remarquer. En posant $x=0$ il vient

$$E_\nu^{(n)}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_p\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n) = 2^{-\nu} C_\nu^{(n)}[-\omega_1,-\omega_2,\ldots,-\omega_p,\omega_{p+1},\ldots,\omega_n] \quad (43)$$

et en particulier, si $p=n$

$$E_\nu^{(n)}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = (-2)^{-\nu} C_\nu^{(n)}[\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n].$$

En développant le premier membre suivant les puissances de $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n$ on trouve cette nouvelle relation entre les $C_\nu^{(n)}$

$$(-1)^\nu C_\nu^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s} 2^s(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)^s C_{\nu-s}^{(n)} = (C^{(n)}+2\omega_1+2\omega_2+\cdots+2\omega_n)^\nu.$$

Si l'on change le signe d'un ou de plusieurs des nombres ω la fonction $E_\nu^{(n)}[\omega_1,\ldots,\omega_n]$ n'est pas altérée. Mais où en est-il avec la fonction $C_\nu^{(n)}$? Il est facile de le voir. De l'équation (43) on conclut, en effet, qu'on a

$$C_\nu^{(n)}[\omega_1,\ldots,\omega_{p-1},-\omega_p,\omega_{p+1},\ldots,\omega_n] = -C_\nu^{(n)}[\omega_1,\ldots,\omega_p,\ldots,\omega_n] \\ + 2C_\nu^{(n-1)}[\omega_1,\ldots,\omega_{p-1},\omega_{p+1},\ldots,\omega_n].$$

20. Soit m un entier positif impair. Considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=m-1}(-1)^s E_\nu^{(n)}\left(x+\frac{s\,\omega_1}{m}\,\middle|\,\omega_1,\ldots\omega_n\right).$$

On a évidemment

$$f\left(x+\frac{\omega_1}{m}\right)+f(x) = E_\nu^{(n)}(x+\omega_1)+E_\nu^{(n)}(x)$$

et par conséquent

$$f\left(x+\frac{\omega_1}{m}\right)+f(x)=2\,E_\nu^{(n-1)}(x\,|\,\omega_2,\ldots\omega_n).$$

Mais cette équation admet aussi la solution

$$f(x)=E_\nu^{(n)}\left(x\,\Big|\,\frac{\omega_1}{m},\omega_2,\ldots\omega_n\right).$$

Ces deux solutions sont des polynomes en x. Elles sont par conséquent indentiques. On a donc

$$\sum_{s=0}^{s=m-1}(-1)^s E_\nu^{(n)}\left(x+\frac{s\,\omega_1}{m}\,\Big|\,\omega_1,\ldots\omega_n\right)=E_\nu^{(n)}\left(x\,\Big|\,\frac{\omega_1}{m},\omega_2,\ldots\omega_n\right).$$

De cette relation on déduit encore

$$\sum_{s_1=0}^{m_1-1}\sum_{s_2=0}^{m_2-1}\cdots\sum_{s_p=0}^{m_p-1}(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_p}E_\nu^{(n)}\left(x+\frac{s_1\,\omega_1}{m_1}+\frac{s_2\,\omega_2}{m_2}+\cdots+\frac{s_p\,\omega_p}{m_p}\,\Big|\,\omega_1,\omega_2\cdots\omega_n\right)$$
$$=E_\nu^{(n)}\left(x\,\Big|\,\frac{\omega_1}{m_1},\frac{\omega_2}{m_2},\ldots\frac{\omega_p}{m_p},\omega_{p+1}\ldots\omega_n\right),$$

$m_1, m_2\ldots m_p$ étant des entiers positifs impairs quelconques, p étant un des nombres $1, 2, \ldots n$. Dans le cas particulier où l'on a $p=n$ et $m_1=m_2=\cdots=m_n=m$ cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{s_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{m-1}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}E_\nu^{(n)}\left(x+\frac{s_1\,\omega_1+\cdots+s_n\,\omega_n}{m}\,\Big|\,\omega_1,\ldots\omega_n\right)=m^{-\nu}E_\nu^{(n)}(m\,x\,|\,\omega_1,\ldots\omega_n).$$

Polynomes de Bernoulli d'ordre n.

21. Passons aux polynomes de Bernoulli. Nous avons défini les nombres de Bernoulli par la relation de récurrence

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}B_{\nu-s}=\begin{cases}0, \text{ si } \nu>1,\\ 1, \text{ si } \nu=1,\end{cases}$$

ou symboliquement

$$(B+1)^\nu-B^\nu=\begin{cases}0, \text{ si } \nu>1,\\ 1, \text{ si } \nu=1.\end{cases}$$

Par analogie avec ce qui précède j'introduis certaines quantités que je désigne par $B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n]$ ou, quand il n'y a pas lieu à équivoque, par $B_\nu^{(n)}$. Je définis ces quantités par la relation de récurrence

$$\sum_{s=1}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s B_{\nu-s}^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n] = \omega_n \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}[\omega_1, \dots, \omega_{n-1}] \tag{1}$$

ou symboliquement

$$(B^{(n)} + \omega_n)^\nu - (B^{(n)})^\nu = \omega_n \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}. \tag{2}$$

Pour achever la définition je pose en particulier

$$B_\nu^{(1)}[\omega_1] = \omega_1^\nu B_\nu.$$

A l'aide de cette relation de récurrence on détermine successivement toutes les quantités $B_\nu^{(2)}, B_\nu^{(3)}, B_\nu^{(4)}, \dots$

Considérons l'équation aux différences finies

$$\underset{\omega}{\triangle} f(x) = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynome donné de degré ν. On sait trouver un polynome $f(x)$ qui satisfait à cette équation. Ce polynome est du degré $\nu + 1$ et il est entièrement défini quand on connait sa valeur dans un point quelconque, par exemple dans le point $x = 0$.

Cela posé, je définis de la manière suivante une suite de polynomes que je désigne par $B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2 \dots \omega_n)$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$ ou plus brièvement par $B_\nu^{(n)}(x)$.

$B_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1)$ est le polynome qui satisfait à l'équation

$$\underset{\omega_1}{\triangle} B_\nu^{(1)}(x) = \nu x^{\nu-1} \tag{3}$$

et à la condition

$$B_\nu^{(1)}(0 \mid \omega_1) = B_\nu^{(1)}[\omega_1].$$

$B_\nu^{(2)}(x \mid \omega_1, \omega_2)$ est le polynome qui satisfait à l'équation

$$\underset{\omega_2}{\triangle} B_\nu^{(2)}(x) = \nu B_{\nu-1}^{(1)}(x) \tag{4}$$

et à la condition

$$B_\nu^{(2)}(0 \mid \omega_1, \omega_2) = B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2].$$

Et en général $B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n)$ est le polynome qui satisfait à l'équation

$$\underset{\omega_n}{\triangle} B_\nu^{(n)}(x) = \nu\, B_{\nu-1}^{(n-1)}(x) \tag{5}$$

et à la condition

$$B_\nu^{(n)}(0 \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = B_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots, \omega_n]. \tag{6}$$

On a donc en particulier

$$B_\nu^{(0)}(x) = x^\nu$$

$$B_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) = \omega_1^\nu B_\nu\left(\frac{x}{\omega_1}\right).$$

On voit que $B_\nu^{(n)}(x)$ est un polynome en x de degré ν. Ce polynome possède des propriétés analogues à celles du polynome $B_\nu(x)$. Je dis par extension que $B_\nu^{(n)}(x)$ *est un polynome de* Bernoulli *d'ordre n et du degré ν.*

Dans le paragraphe 2 nous avons démontré que les deux conditions imposées à $B_\nu^{(1)}(x)$ entraînent qu'on a:

$$B_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(1)}[\omega_1].$$

On démontre tout à fait de la même manière que les deux conditions que nous venons d'imposer à $B_\nu^{(2)}(x)$ entraînent qu'on a

$$B_\nu^{(2)}(x \mid \omega_1, \omega_2) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(2)}[\omega_1, \omega_2].$$

Par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(n)}[\omega_1, \ldots, \omega_n]. \tag{7}$$

En dérivant les deux membres de cette équation par rapport à x on trouve

$$D_x B_\nu^{(n)}(x) = \nu\, B_{\nu-1}^{(n)}(x). \tag{8}$$

On a par conséquent

$$D_x^p B_\nu^{(n)}(x) = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-p+1)\, B_{\nu-p}^{(n)}(x). \tag{9}$$

En appliquant la formule de Taylor on trouve donc

$$B_\nu^{(n)}(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} h^s B_{\nu-s}^{(n)}(x). \tag{10}$$

En posant $h = \omega_n$ on trouve, en vertu de (5), la relation de récurrence

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s B_{\nu-s}^{(n)}(x) = \omega_n \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}(x) \tag{11}$$

qui se réduit à (1) quand x tend vers zéro.

De l'équation (5) on déduit

$$\underset{\omega_{n-1}\,\omega_n}{\triangle^2} B_\nu^{(n)}(x) = \nu(\nu-1) B_{\nu-2}^{(n-2)}(x),$$

et en général, si $p \leq n$

$$\triangle^p B_\nu^{(n)}(x) = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-p+1) B_{\nu-p}^{(n-p)}(x). \tag{12}$$

Cette équation peut, en vertu de (9), s'écrire sous la forme

$$\triangle^p B_\nu^{(n)}(x) = D_x^p B_\nu^{(n-p)}(x), \qquad p = 1, 2, \ldots n. \tag{13}$$

En posant $p = n$ on trouve en particulier que $B_\nu^{(n)}(x)$ satisfait à l'équation

$$\underset{\omega_1\cdots\omega_n}{\triangle^n} B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots \omega_n) = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+1) x^{\nu-n}. \tag{14}$$

Au lieu de définir $B_\nu^{(n)}(x)$ à l'aide des n équations susdites du premier ordre on aurait pu définir cette fonction comme le polynome qui satisfait à l'équation (14). Mais cette condition ne suffit pas pour le définir, car le polynome le plus général qui satisfait à cette équation renferme n constantes arbitraires. Il faut donc encore se donner les valeurs de $B_\nu^{(n)}(x)$ et de ses dérivées d'ordre $1, 2, \ldots n-1$ dans un point quelconque par exemple dans le point $x = 0$. Et il convient de choisir ses valeurs conformément à l'équation (7).

22. J'introduis encore une autre suite de quantités $D_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots, \omega_n]$ que je définis par la relation de récurrence

$$(D^{(n)} + \omega_n)^\nu - (D^{(n)} - \omega_n)^\nu = 2\omega_n \nu D_{\nu-1}^{(n-1)}[\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]. \tag{15}$$

Pour achever la définition je pose en particulier

$$D_\nu^{(1)}[\omega_1] = \omega_1^\nu D_\nu.$$

En développant on trouve

$$D_\nu^{(n)} + \frac{\nu(\nu-1)}{2\cdot 3}\omega_n^2 D_{\nu-2}^{(n)} + \cdots + \frac{1+(-1)^\nu}{2}\frac{\omega_n^\nu}{\nu+1} D_0^{(n)} = D_\nu^{(n-1)}[\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}].$$

Puisque $D_\nu = 0$, si ν est impair, on voit qu'on a de même $D_\nu^{(n)} = 0$, si ν est impair, et cela quel que soit n.

Le système des équations (15) est équivalent à l'unique équation

$$\varphi\left(x + \frac{D^{(n)}+\omega_n}{2}\right) - \varphi\left(x + \frac{D^{(n)}-\omega_n}{2}\right) = \omega_n \varphi'\left(x + \frac{D^{(n-1)}}{2}\right), \tag{16}$$

$\varphi(x)$ étant un polynome quelconque et $\varphi'(x)$ étant sa dérivée. De même, des équations (2), qui nous ont servi comme définition des $B_\nu^{(n)}$, on déduit

$$\varphi(x + B^{(n)} + \omega_n) - \varphi(x + B^{(n)}) = \omega_n \varphi'(x + B^{(n-1)}). \tag{17}$$

L'équation aux différences finies

$$\mathop{\triangle}_{\omega_n} f(x) = \varphi'(x + B^{(n-1)})$$

admet donc la solution

$$f(x) = \varphi(x + B^{(n)}),$$

et l'équation

$$\mathop{\triangle}_{\omega_n} f(x) = \varphi'\left(x + \frac{D^{(n-1)}}{2}\right)$$

admet la solution

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{D^{(n)}-\omega_n}{2}\right).$$

De ce dernier fait on conclut immédiatement que

$$B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \left(x - \frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2} + \frac{D^{(n)}}{2}\right)^\nu.$$

En développant on trouve

$$2^\nu B_\nu^{(n)}\left(x + \frac{\omega_1+\cdots+\omega_n}{2} \mid \omega_1, \ldots, \omega_n\right) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} x^s D_{\nu-s}^{(n)}. \tag{18}$$

On a donc en particulier

$$B_\nu^{(n)}\left(\frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}\right)=2^{-\nu}D_\nu^{(n)}. \tag{19}$$

Le polynome $B_\nu^{(n)}(x|\omega_1,\ldots,\omega_n)$ admet par conséquent le point $x=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)$ pour zéro, si ν est impair.

On peut exprimer les $D_\nu^{(n)}$ par les $B_\nu^{(n)}$ et inversement. En effet de l'équation

$$B_\nu^{(n)}(x)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}x^s B_{\nu-s}^{(n)}$$

on déduit

$$D_\nu^{(n)}=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)^s\,2^{\nu-s}B_{\nu-s}^{(n)}=(2\,B^{(n)}+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)^\nu.$$

De l'équation (18) on déduit de même

$$2^\nu B_\nu^{(n)}=\sum_{s=0}^{s=\nu}(-1)^s\binom{\nu}{s}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)^s D_{\nu-s}^{(n)}=(D^{(n)}-\omega_1-\omega_2-\cdots-\omega_n)^\nu,$$

$$(-2)^\nu B_\nu^{(n)}=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)^s D_{\nu-s}^{(n)}=(D^{(n)}+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)^\nu.$$

23. On peut écrire l'équation (17) sous la forme suivante

$$\varphi(B^{(n)}(x)+\omega_n)-\varphi(B^{(n)}(x))=\omega_n\varphi'(B^{(n-1)}(x)). \tag{20}$$

C'est le type général d'une relation de récurrence entre les polynomes d'ordre n et d'ordre $n-1$. Ici $\varphi(x)$ signifie un polynome quelconque de degré $\nu+n$, pour fixer les idées. Remplaçons $\varphi(x)$ par $\varphi(x+y)$ et développons; il vient

$$\sum_{s=0}^{s=\nu+n}\frac{B_s^{(n)}(x)}{s!}\mathop{\triangle}_{\omega_n}\varphi^{(s)}(y)=\sum_{s=0}^{s=\nu+n}\frac{B_s^{(n-1)}(x)}{s!}\varphi^{(s+1)}(y).$$

Appliquons aux deux membres de cette équation $n-1$ fois de suite l'opération $\triangle$, où $\triangle$ porte sur la variable y. On trouve

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\frac{B_s^{(n)}(x)}{s!}\mathop{\triangle^n}_{\omega_1\cdots\omega_n}\varphi^{(s)}(y)=\varphi^{(n)}(x+y). \tag{21}$$

C'est le type général d'une relation de récurrence entre les polynomes de Bernoulli d'ordre n. Ici x et y sont des variables quelconques. Si en parti-

culier $x=0$ ou $x=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)$ il vient

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\frac{B_s^{(n)}[\omega_1,\ldots,\omega_n]}{s!}\mathop{\triangle}_{\omega_1\cdots\omega_n}^n\varphi^{(s)}(y)=\varphi^{(n)}(y),$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\frac{D_s^{(n)}[\omega_1,\ldots,\omega_n]}{2^s s!}\mathop{\triangle}_{\omega_1\cdots\omega_n}^n\varphi^{(s)}(y)=\varphi^{(n)}\left(y+\frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}\right).$$

Considérons l'équation aux différences finies

$$\mathop{\triangle}_{\omega_1\cdots\omega_n}^n f(x)=\varphi^{(n)}(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynome donné, et $\varphi^{(n)}(x)$ étant sa dérivée $n^{\text{ième}}$. De la relation (21) on conclut sans peine que cette équation admet une solution $f(x)$ telle qu'on ait, quels que soient x et y

$$f(x+y)=\varphi(B^{(n)}(x)+y)=\sum_{s=0}^{s=\nu+n}\frac{B_s^{(n)}(x)}{s!}\varphi^{(s)}(y).$$

Cette propriété des polynomes de Bernoulli est assez remarquable. Nous avons supposé essentiellement que $\varphi(x)$ était un polynome mais on peut démontrer un résultat analogue dans des cas plus généraux.

24. A l'aide de la relation de récurrence (11) on peut trouver les polynomes de Bernoulli d'ordre n quand on connait les polynomes d'ordre $n-1$. On sait d'ailleurs d'une manière explicite exprimer les polynomes d'ordre n par les polynomes d'ordre inférieur à n. En effet, posons dans l'équation (21)

$$\varphi(y)=B_{\nu+n}^{(p+n)}(y\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_{p+n}),$$

p étant un entier positif quelconque. Il vient[1]

$$B_\nu^{(n+p)}(x+y\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_{p+n})=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}B_s^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n)\,B_{\nu-s}^{(p)}(y\,|\,\omega_{n+1},\ldots,\omega_{n+p}). \qquad (22)$$

Cette relation subsiste d'ailleurs si l'on permute les nombres ω d'une manière quelconque. Ce fait résulte de ce que $B_\nu^{(n)}(x)$ est une fonction symétrique de $\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_n$ comme nous allons le voir dans un moment. Ce n'est pas inutile de remarquer que l'équation (22) peut s'écrire sous la forme symbolique suivante

[1] Si $p=0$ cette équation se réduit à l'équation (10).

$$B_\nu^{(n+p)}(x+y) = (B^{(n)}(x) + B^{(p)}(y))^\nu.$$

De cette expression on conclut qu'on a plus généralement

$$B_\nu^{(n)}(x_1 + x_2 + \cdots + x_s) = (B^{(p_1)}(x_1) + B^{(p_2)}(x_2) + \cdots + B^{(p_s)}(x_s))^\nu,$$

$x_1, x_2, \ldots x_s$ étant des nombres quelconques et $p_1, p_2, \ldots p_s$ étant des entiers non négatifs qui vérifient la condition

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_s = n.$$

Si l'on pose en particulier $p = 1, y = 0$ et si l'on remplace n par $n-1$, l'équation (22) se réduit à

$$B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s B_s B_{\nu-s}^{(n-1)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}). \tag{23}$$

On peut aussi trouver cette relation en résolvant le système des équations (11) par rapport aux quantités $B_\nu^{(n)}(x)$. Les équations (11) et (23) sont donc réciproques. A l'aide de la relation de récurrence (23) on peut trouver le polynome de Bernoulli d'un ordre et d'un degré quelconque. Mais le calcul s'effectue plus aisément en passant par l'intermédiaire des quantités $B_\nu^{(n)}$ ou $D_\nu^{(n)}$. Si l'on pose $x = y = 0$ dans l'équation (22) il vient

$$B_\nu^{(n+p)}[\omega_1, \ldots, \omega_{n+p}] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)}[\omega_1, \ldots, \omega_n] B_{\nu-s}^{(p)}[\omega_{n+1}, \ldots, \omega_{n+p}].$$

Mais si l'on pose

$$x = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}{2}, \qquad y = \frac{\omega_{n+1} + \cdots + \omega_{n+p}}{2}$$

il vient

$$D_\nu^{(n+p)}[\omega_1, \ldots, \omega_{n+p}] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} D_s^{(n)}[\omega_1, \ldots, \omega_n] D_{\nu-s}^{(p)}[\omega_{n+1}, \ldots, \omega_{n+p}].$$

Soit en particulier $p = 1$ et remplaçons n par $n-1$; on trouve

$$B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s B_s B_{\nu-s}^{(n-1)}[\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}],$$

$$D_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_n^s D_s D_{\nu-s}^{(n-1)}[\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}].$$

Ces deux équations sont réciproques aux équations qui nous ont servi comme définition des $B_\nu^{(n)}$ et des $D_\nu^{(n)}$.

Si $n=2$, on trouve

$$B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_1^s \omega_2^{\nu-s} B_s B_{\nu-s} \tag{24}$$

et par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1!\, s_2! \dots s_n!} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_n^{s_n} B_{s_1} B_{s_2} \dots B_{s_n}, \tag{25}$$

$$D_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1!\, s_2! \dots s_n!} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_n^{s_n} D_{s_1} D_{s_2} \dots D_{s_n}, \tag{26}$$

les sommations étant étendues à toutes les valeurs positives ou nulles de $s_1, s_2, \dots s_n$ qui vérifient la condition $s_1 + s_2 + \dots + s_n = \nu$.

Ces équations peuvent s'écrire sous les formes symboliques

$$B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = ({}_1B\,\omega_1 + {}_2B\,\omega_2 + \dots + {}_nB\,\omega_n)^\nu,$$

$$D_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n] = ({}_1D\,\omega_1 + {}_2D\,\omega_2 + \dots + {}_nD\,\omega_n)^\nu.$$

On a par conséquent aussi

$$B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \dots, \omega_n) = (x + {}_1B\,\omega_1 + {}_2B\,\omega_2 + \dots + {}_nB\,\omega_n)^\nu,$$

$$2^\nu B_\nu^{(n)}\left(\frac{x+\omega_1+\dots+\omega_n}{2} \,\middle|\, \omega_1, \dots, \omega_n\right) = (x + {}_1D\,\omega_1 + {}_2D\,\omega_2 + \dots + {}_nD\,\omega_n)^\nu.$$

Lorsque les développements symboliques aux seconds membres seront effectués on remplacera $({}_sB)^\nu$ par B_ν et $({}_sD)^\nu$ par D_ν.

Les $B_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ et les $D_\nu^{(n)}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ sont donc des fonctions symétriques des paramètres $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ et par conséquent il en est de même du polynome $B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \dots, \omega_n)$. On voit en outre que ces fonctions sont homogènes et du degré ν, c'est à dire qu'on a

$$B_\nu^{(n)}[\lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \dots \lambda\omega_n] = \lambda^\nu B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n], \tag{27}$$

$$D_\nu^{(n)}[\lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \dots \lambda\omega_n] = \lambda^\nu D_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n],$$

$$B_\nu^{(n)}(\lambda x \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \dots \lambda\omega_n] = \lambda^\nu B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \dots \omega_n). \tag{28}$$

A l'aide de l'une ou l'autre des relations précédentes on calcule aisément toutes les fonctions $B_\nu^{(n)}$ et $D_\nu^{(n)}$. On trouve, pour les premières valeurs de ν

$$B_0^{(n)} = 1, \qquad B_1^{(n)} = -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=n}\omega_s, \qquad B_2^{(n)} = \frac{1}{6}\sum_{s=1}^{s=n}\omega_s^2 + \frac{1}{2}\sum\omega_{s_1}\omega_{s_2},$$

$$D_0^{(n)} = 1, \qquad D_2^{(n)} = -\frac{1}{3}\sum_{s=1}^{s=n}\omega_s^2, \qquad D_4^{(n)} = \frac{7}{15}\sum_{s=1}^{s=n}\omega_s^4 + \frac{2}{3}\sum\omega_{s_1}^2\omega_{s_2}^2.$$

25. Nous allons maintenant déduire quelques autres propriétés des polynomes $B_\nu^{(n)}(x)$. Revenons à l'équation (5):

$$\frac{B_{\nu+1}^{(n)}(x+\omega_n) - B_{\nu+1}^{(n)}(x)}{\omega_n} = (\nu+1)\,B_\nu^{(n-1)}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$$

et remplaçons x par $-x$ il vient

$$(-1)^{\nu+1}\frac{B_{\nu+1}^{(n)}(-x) - B_{\nu+1}^{(n)}(\omega_n - x)}{\omega_n} = (\nu+1)\,B_\nu^{(n-1)}(x\,|\,-\omega_1,\ldots,-\omega_{n-1}).$$

Les polynomes $B_{\nu+1}^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n)$ et $(-1)^{\nu+1}B_{\nu+1}^{(n)}(\omega_n - x\,|\,-\omega_1,\ldots,-\omega_{n-1},\omega_n)$ satisfont donc tous les deux à l'équation

$$\frac{f(x+\omega_n) - f(x)}{\omega_n} = (\nu+1)\,B_\nu^{(n-1)}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}).$$

Les dérivées par rapport à x de ces deux polynomes sont par conséquent indentiques c'est à dire qu'on a

$$B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = B_\nu^{(n)}(x-\omega_n\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},-\omega_n),$$

et en remplaçant x par $x+\omega_n$

$$B_\nu^{(n)}(x+\omega_n\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},-\omega_n).$$

De cette relation on déduit encore

$$B_\nu^{(n)}(x+\omega_{n-1}+\omega_n\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_{n-2},-\omega_{n-1},-\omega_n),$$

$$B_\nu^{(n)}(x+\omega_{p+1}+\cdots+\omega_n\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_p,-\omega_{p+1},-\omega_{p+2},\ldots,-\omega_n);$$

où p prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$. Dans le cas le plus important, où $p=0$, cette relation peut s'écrire sous la forme

$$B_\nu^{(n)}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n - x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = (-1)^\nu B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n). \tag{29}$$

Si l'on pose ici

$$x = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}{2}$$

on voit de nouveau que le polynome $B_\nu^{(n)}(x)$ s'annule dans le point

$$x = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}{2},$$

si ν est impair.

D'autre part en posant $x = 0$ il vient

$$B_\nu^{(n)}(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n \,|\, \omega_1, \ldots, \omega_n) = (-1)^\nu B_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots, \omega_n]. \tag{30}$$

Le polynome $B_\nu^{(n)}(x) - B_\nu^{(n)}$ admet donc, si ν est pair, les deux zéros $x = 0$ et $x = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$.

Plus généralement on sait trouver la valeur du polynome $B_\nu^{(n)}(x \,|\, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ dans tous les points $s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \cdots + s_n\omega_n$, où s_i désigne un des nombres 0 ou 1. De la formule que nous venons de démontrer il résulte en effet qu'on a

$$B_\nu^{(n)}(s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \cdots + s_n\omega_n) = B_\nu^{(n)}[(-1)^{s_1}\omega_1, (-1)^{s_2}\omega_2, \ldots, (-1)^{s_n}\omega_n].$$

D'autre part de l'équation aux différences finies que satisfait le polynome $B_\nu^{(n)}(x \,|\, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ on déduit en posant $x = 0$ qu'on a

$$B_\nu^{(n)}(\omega_i) = B_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots, \omega_n] + \omega_i \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}[\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_n], \tag{31}$$

i étant un des nombres $1, 2, \ldots n$. En comparant ces deux équations on trouve en particulier la relation

$$B_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, -\omega_i, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_n] = B_\nu^{(n)}[\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n] + \\ + \omega_i \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}[\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_n].$$

Remarquons encore qu'en développant le premier membre de l'équation (30) suivant les puissances de $(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)$ on trouve cette nouvelle relation de récurrence entre les $B_\nu^{(n)}$

$$(B^{(n)} + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)^\nu = (-1)^\nu B_\nu^{(n)}.$$

26. Soit m un entier positif quelconque. Considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=m-1} B_{\nu+1}^{(n)}\left(x + \frac{s\omega_1}{m} \,\middle|\, \omega_1, \ldots, \omega_n\right).$$

On a évidemment

$$f\left(x + \frac{\omega_1}{m}\right) - f(x) = B_{\nu+1}^{(n)}(x + \omega_1) - B_{\nu+1}^{(n)}(x),$$

et par conséquent

$$f\left(x + \frac{\omega_1}{m}\right) - f(x) = \omega_1 (\nu + 1) B_\nu^{(n-1)}(x \mid \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Mais cette équation admet aussi la solution

$$f(x) = m B_{\nu+1}^{(n)}\left(x \,\middle|\, \frac{\omega_1}{m}, \omega_2, \ldots, \omega_n\right).$$

Ces deux solutions sont des polynomes en x. Leurs dérivées sont par conséquent indentiques c'est à dire que

$$\sum_{s=0}^{s=m-1} B_\nu^{(n)}\left(x + \frac{s\omega_1}{m} \,\middle|\, \omega_1, \ldots, \omega_n\right) = m B_\nu^{(n)}\left(x \,\middle|\, \frac{\omega_1}{m}, \omega_2, \ldots, \omega_n\right). \tag{33}$$

De cette relation on déduit encore que

$$\sum_{s_1=0}^{m_1-1} \sum_{s_2=0}^{m_2-1} \cdots \sum_{s_p=0}^{m_p-1} B_\nu^{(n)}\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} + \cdots + \frac{s_p\omega_p}{m_p} \,\middle|\, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\right)$$
$$= m_1 m_2 \ldots m_p B_\nu^{(n)}\left(x \,\middle|\, \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots, \frac{\omega_p}{m_p}, \omega_{p+1}, \ldots, \omega_n\right), \tag{34}$$

$m_1, m_2, \ldots m_p$ étant des entiers positifs quelconques, p étant un des nombres $1, 2, \ldots n$. Dans le cas particulier où l'on a $p = n$ et $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$ cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{s_1=0}^{m-1} \sum_{s_2=0}^{m-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{m-1} B_\nu^{(n)}\left(x + \frac{s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \cdots + s_n\omega_n}{m} \,\middle|\, \omega_1, \ldots \omega_n\right)$$
$$= m^{n-\nu} B_\nu^{(n)}(mx \mid \omega_1, \ldots, \omega_n). \tag{35}$$

Si l'on pose $m = 2$ et si l'on remplace ω_s par $2\omega_s$ $(s = 1, 2, \ldots n)$ cette équation se réduit à

$$\mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} B_\nu^{(n)}(x \mid 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots 2\omega_n) = B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n). \tag{36}$$

Il y a encore une autre relation de ce genre qu'il convient de signaler. Soit maintenant $m_1, m_2, \ldots m_n$ des entiers positifs pairs. Considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{s_1=0}^{m_1-1} \sum_{s_2=0}^{m_2-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{m_n-1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} B_{\nu+n}^{(n)}\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} + \cdots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \mid \omega_1, \ldots, \omega_n\right).$$

En appliquant l'opération ∇ n fois de suite on trouve

$$2^n \mathop{\nabla}_{\substack{\omega_1 \\ m_1}} \mathop{\nabla}_{\substack{\omega_2 \\ m_2}} \cdots \mathop{\nabla}_{\substack{\omega_n \\ m_n}} f(x) = (-1)^n \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n \mathop{\Delta^n}_{\omega_1 \ldots \omega_n} B_{\nu+n}^{(n)}(x).$$

On a par conséquent

$$\nabla^n f(x) = k x^\nu,$$

où l'on a posé pour abréger

$$k = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n).$$

Mais cette équation admet aussi la solution

$$f(x) = k\, E_\nu^{(n)}\left(x \mid \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots, \frac{\omega_n}{m_n}\right).$$

Ces deux solutions sont des polynomes en x. Elles sont par conséquent identiques. On a donc

$$\sum_{s_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{m_n-1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} B_{\nu+n}^{(n)}\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \cdots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \mid \omega_1, \ldots, \omega_n\right)$$
$$= k\, E_\nu^{(n)}\left(x \mid \frac{\omega_1}{m_1}, \ldots, \frac{\omega_n}{m_n}\right). \tag{37}$$

On sait ainsi exprimer les polynomes d'Euler par les polynomes de Bernoulli. Dans le cas particulier où l'on a $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 2$ cette relation peut s'écrire sous une forme qui est assez remarquable. On trouve en effet

$$E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = \mathop{\Delta^n}_{\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n} \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(x \mid 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots, 2\omega_n)}{(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)}. \tag{38}$$

A l'aide de cette relation on sait déduire les propriétés des polynomes d'Euler des propriétés correspondantes du polynome de Bernoulli.

27. Je vais maintenant considérer quelques intégrales définies. Voyons d'abord ce qui se passe quand un ou plusieurs des paramètres ω tendent vers zéro.

Nous avons vu qu'on a

$$B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \ldots, \omega_n) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_1^s B_s B_{\nu-s}^{(n-1)}(x\,|\,\omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Faisons tendre ω_1 vers zéro il vient

$$B_\nu^{(n)}(x\,|\,0, \omega_2, \ldots, \omega_n) = B_\nu^{(n-1)}(x\,|\,\omega_2, \ldots, \omega_n).$$

On a par conséquent

$$B_\nu^{(n)}(x\,|\,0, 0, \ldots 0, \omega_{p+1}, \ldots, \omega_n) = B_\nu^{(n-p)}(x\,|\,\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n)$$

et en posant $x = 0$

$$B_\nu^{(n)}[0, 0, \ldots 0, \omega_{p+1}, \ldots, \omega_n] = B_\nu^{(n-p)}[\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n].$$

Cela posé, reprenons l'équation (33) divisons les deux membres par m et faisons tendre m vers l'infini il vient

$$\frac{1}{\omega_1}\int_0^{\omega_1} B_\nu^{(n)}(x+t\,|\,\omega_1, \ldots, \omega_n)\,dt = B_\nu^{(n-1)}(x\,|\,\omega_2, \ldots, \omega_n). \tag{39}$$

De l'équation (34) on déduit de même en divisant par $m_1 m_2 \ldots m_p$ et en faisant tendre les entiers $m_1, m_2, \ldots m_p$ vers l'infini

$$\frac{1}{\omega_1\omega_2\ldots\omega_p}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2}\cdots\int_0^{\omega_p} B_\nu^{(n)}(x+t_1+t_2+\cdots+t_p\,|\,\omega_1, \ldots, \omega_n)\,dt_1\ldots dt_p$$
$$= B_\nu^{(n-p)}(x\,|\,\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n). \tag{40}$$

Si $p = n$ on trouve en particulier[1]

[1] On peut aussi aisément déduire ces formules de l'équation aux différences finies à laquelle satisfait $B_\nu^{(n)}(x)$.

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 B_\nu^{(n)}(x+\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_n t_n \mid \omega_1,\ldots,\omega_n)\,dt_n = x^\nu. \qquad (41)$$

Remplaçons x par $x+s_1\omega_1+\cdots+s_n\omega_n$ ($s_i = 0, 1, \ldots m_i - 1$) et ajoutons ensemble, il vient

$$\int_0^{m_1} dt_1 \int_0^{m_2} dt_2 \cdots \int_0^{m_n} B_\nu^{(n)}(x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_n t_n)\,dt_n = \sum_{s_1=0}^{m_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{m_n-1}(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2+\cdots+s_n\omega_n)^\nu,$$

$m_1, m_2, \ldots m_n$ étant des entiers positifs quelconques.

On peut, si l'on aime mieux, écrire cette relation comme il suit

$$\sum_{s_1=0}^{m_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{m_n-1}(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2+\cdots+s_n\omega_n)^\nu$$
$$= \frac{m_1 m_2 \ldots m_n}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \mathop{\triangle^n}_{m_1\omega_1\ldots m_n\omega_n} B_{\nu+n}^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n). \qquad (42)$$

En faisant tendre x vers zéro dans l'équation (41), il vient

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 B_\nu^{(n)}(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_n t_n)\,dt_n = 0. \qquad \nu > 0 \qquad (43)$$

Cette relation est vraie quels que soient ν et n. Elle est vraie encore si l'on remplace le polynome de Bernoulli $B_\nu^{(n)}(x)$ par le polynome d'Euler $E_\nu^{(n)}(x)$, pourvu que ν soit impair.

En effet dans le paragraphe 13 nous avons démontré qu'on a

$$\int_0^1 E_\nu^{(1)}(\omega t \mid \omega)\,dt = 0,$$

si ν est impair. Et dans le paragraphe 15 nous avons démontré que

$$E_\nu^{(n)}(\omega_1 t_1+\cdots+\omega_n t_n) = \sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s} E_s^{(1)}(\omega_n t_n)\,E_{\nu-s}^{(n-1)}(\omega_1 t_1+\cdots+\omega_{n-1}t_{n-1}).$$

Par voie d'induction on démontre alors aisément que

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 E_\nu^{(n)}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n)\,dt_n = 0,$$

si ν est impair. Mais si ν est un nombre quelconque la valeur de cette intégrale est égale à

$$\frac{(-1)^n}{2^\nu} \sum \frac{\nu!}{(s_1+1)!\,(s_2+1)!\ldots(s_n+1)!} C_{s_1+1} C_{s_2+1} \ldots C_{s_n+1}\, \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \cdots \omega_n^{s_n},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières, positives ou nulles de $s_1, s_2, \ldots s_n$ telles que $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \nu$.

Remarquons enfin que l'équation (38) peut s'écrire sous la forme

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 B_\nu^{(n)}(x + \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n \,|\, 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots 2\omega_n)\,dt_n$$
$$= E_\nu^{(n)}(x \,|\, \omega_1, \ldots, \omega_n);$$

c'est ce qu'on voit en tenant compte de l'équation (8).

En posant en particulier $x = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)$ on trouve

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} dt_1 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} dt_2 \cdots \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} B_\nu^{(n)}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n \,|\, \omega_1, \ldots, \omega_n)\,dt_n = \frac{E_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n]}{2^{2\nu+n}}$$

D'autre part en posant $x = 0$, il vient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dt_1 \int_0^{\frac{1}{2}} dt_2 \cdots \int_0^{\frac{1}{2}} B_\nu^{(n)}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n \,|\, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)\,dt_n = \frac{C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n]}{2^{2\nu+n}}.$$

28. Arrêtons nous un moment au cas particulier où $n = 2$. On a en vertu de (24)

$$B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \omega_1^s \omega_2^{\nu-s} B_s B_{\nu-s}.$$

Si ν est impair tous les termes au second membre disparaissent, excepté le second et l'avant dernier. On a donc

$$B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] = -\frac{\nu}{2}\,\omega_1\,\omega_2\,(\omega_1^{\nu-2} + \omega_2^{\nu-2})\,B_{\nu-1}, \tag{45}$$

si ν est impair. Reprenons l'équation (31):

$$B_\nu^{(2)}(\omega_1 | \omega_1, \omega_2) = B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] + \omega_1\,\omega_2^{\nu-1}\,\nu\,B_{\nu-1},$$

$$B_\nu^{(2)}(\omega_2 | \omega_1, \omega_2) = B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] + \omega_1^{\nu-1}\,\omega_2\,\nu\,B_{\nu-1}.$$

Dans le cas actuel les seconds membres peuvent se réduire. Si ν est impair on trouve en substituant l'expression que nous venons d'indiquer

$$B_\nu^{(2)}(\omega_1 | \omega_1, \omega_2) = \frac{\nu}{2}(\omega_2^{\nu-2} - \omega_1^{\nu-2})\,\omega_1\,\omega_2\,B_{\nu-1},$$

$$B_\nu^{(2)}(\omega_2 | \omega_1, \omega_2) = \frac{\nu}{2}(\omega_1^{\nu-2} - \omega_2^{\nu-2})\,\omega_1\,\omega_2\,B_{\nu-1}.$$

Ces deux valeurs sont donc égales et de signes contraires. Mais si ν est pair et > 2 nos équations se réduisent à

$$B_\nu^{(2)}(\omega_1) = B_\nu^{(2)}(\omega_2) = B_\nu^{(2)}$$

parce que $B_3, B_5, B_7, \ldots$ sont nuls. Rappelons en outre que

$$B_\nu^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = (-1)^\nu\,B_\nu^{(2)}.$$

Le polynome

$$B_\nu^{(2)}(x) - B_\nu^{(2)}$$

admet par conséquent les quatre points $x = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ pour zéros, si ν est pair et plus grand que 2, et ces zéros sont en général du premier ordre. Si $\nu = 2$ ce polynome a les deux zéros $x = 0$ et $x = \omega_1 + \omega_2$.

Pour trouver les valeurs du polynome de Bernoulli d'ordre 2 dans les points $\frac{\omega_1}{2}$ et $\frac{\omega_2}{2}$ rappelons qu'on a

$$B_\nu^{(2)}(x | \omega_1, \omega_2) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s\,B_{\nu-s}(x | \omega_1)\,\omega_2^s,$$

$$B_\nu^{(2)}(x | \omega_1, \omega_2) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s\,B_{\nu-s}(x | \omega_2)\,\omega_1^s.$$

En posant $x = \frac{\omega_1}{2}$ dans la première et $x = \frac{\omega_2}{2}$ dans la seconde de ces relations on trouve

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1}{2}\,|\,\omega_1, \omega_2\right) = 2\, B_\nu^{(2)}\left[\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right] - B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2],$$

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_2}{2}\,|\,\omega_1, \omega_2\right) = 2\, B_\nu^{(2)}\left[\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right] - B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2].$$

Si ν est impair ces expressions se réduisent et on trouve en vertu de (45)

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1}{2}\,|\,\omega_1, \omega_2\right) = \frac{\nu}{2}(1 - 2^{2-\nu})\,\omega_1^{\nu-1}\,\omega_2\, B_{\nu-1},$$

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_2}{2}\,|\,\omega_1, \omega_2\right) = \frac{\nu}{2}(1 - 2^{2-\nu})\,\omega_1\,\omega_2^{\nu-1}\, B_{\nu-1}.$$

A l'aide de l'équation (35) on déduit enfin la valeur du polynome dans le point $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. En effet, en posant $x = 0$ et $n = m = 2$ on trouve, après quelques réductions

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,|\,\omega_1, \omega_2\right) = (1 + 2^{2-\nu})\, B_\nu^{(2)}[\omega_1, \omega_2] - 2\, B_\nu^{(2)}\left[\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right] - 2\, B_\nu^{(2)}\left[\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right].$$

Le second membre se réduit à zéro si ν est impair. Mais si, dans la même relation (35), on pose $x = \frac{\omega_1+\omega_2}{4}$ et $n = m = 2$, on trouve

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\,|\,\omega_1, \omega_2\right) + B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1+3\,\omega_2}{4}\,|\,\omega_1, \omega_2\right) = 2^{1-\nu}\, B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,|\,\omega_1, \omega_2\right),$$

pourvu que ν soit pair. Posons enfin dans l'équation (38) $x = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ et $n = 2$, on trouve, après quelques réductions

$$B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{4}\,|\,\omega_1, \omega_2\right) - B_\nu^{(2)}\left(\frac{\omega_1+3\,\omega_2}{4}\,|\,\omega_1, \omega_2\right) = \omega_1\,\omega_2\,\nu(\nu-1)\frac{E_{\nu-2}^{(2)}[\omega_1, \omega_2]}{2^{2\nu-1}}.$$

A l'aide de ces deux relations on trouve la valeur de notre polynome dans le point $\frac{\omega_1+\omega_2}{4}$.

Enfin en posant $x = 0$ dans l'équation (38) il vient

$$\omega_1 \omega_2 \nu (\nu - 1) 2^{2-2\nu} C^{(2)}_{\nu-2} = B^{(2)}_\nu \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) - B^{(2)}_\nu \left(\frac{\omega_1}{2}\right) - B^{(2)}_\nu \left(\frac{\omega_2}{2}\right) + B^{(2)}_\nu .$$

En substituant les valeurs que nous venons de trouver il vient

$$\omega_1 \omega_2 \nu (\nu - 1) 2^{-2\nu} C^{(2)}_{\nu-2} [\omega_1, \omega_2] = (1 + 2^{-\nu}) B^{(2)}_\nu [\omega_1, \omega_2] - B^{(2)}_\nu \left[\frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right] - B^{(2)}_\nu \left[\omega_1, \frac{\omega_2}{2}\right].$$

MM. P. Appell[1], M. Krause[2] et E. W. Barnes[3] ont étudié des polynomes voisins des polynomes $B^{(2)}_\nu(x)$. Dans ce qui précède nous avons poussé plus loin l'étude de ces fonctions. Notre point de départ a été différent de celui de ces auteurs. M. Appell a défini un polynome de Bernoulli à deux variables x et y par l'équation

$$P_\nu(x, y) = \sum_{p=1}^{p=x} \sum_{q=1}^{q=y} (p\omega_1 + q\omega_2)^\nu .$$

Ce polynome de M. Appell est égal à

$$P_\nu(x, y) = \frac{B^{(2)}_{\nu+2}(x\omega_1 + y\omega_2) - B^{(2)}_{\nu+2}(x\omega_1) - B^{(2)}_{\nu+2}(y\omega_2) + B^{(2)}_{\nu+2}(0)}{\omega_1 \omega_2 (\nu + 1)(\nu + 2)},$$

ou encore égal à

$$P_\nu(x, y) = \int_1^{x+1} dt_1 \int_1^{y+1} B^{(2)}_\nu(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 \,|\, \omega_1, \omega_2)\, dt_2 .$$

M. Barnes a d'abord introduit à l'aide d'une équation aux différences finies un polynome qui est un peu moins simple que $B^{(2)}_\nu(x)$. Mais en poursuivant ses recherches et considérant le cas général M. Barnes a préféré définir ses polynomes par ce fait que leurs dérivées figurent comme coefficients dans certains développements en séries. Nous avons partout défini les polynomes par leur propriété la plus essentielle. Le lecteur pourra juger de l'avantage que présente cette définition vis à vis de toute autre.

[1] Sur les fonctions de Bernoulli à deux variables, Archiv Math. Phys. (3) 4 (1902—03), p. 292—3.

[2] Über die Bernoulli'schen Funktionen zweier veränderlicher Grössen, Archiv Math. Phys. (3) 4 (1902—03), p. 293—5; Über Bernoulli'schen Zahlen und Funktionen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlicher Grössen, Ber. Ges. Lpz, 55 (1903), math. p. 39—62.

[3] The Theory of the double Gamma Funktion, Philos. Trans. London 196 A (1901), p. 271—85; On the Theory of the multiple Gamma Function, Trans. Cambr. philos. Soc. 19 (1904) p. 377—86.

Dans le cas particulier où tous les nombres ω_i se reduisent à 1 les $B_\nu^{(n)}$ ont été étudiés par A. CAUCHY[1], E. LUCAS[2], B. IMSCHENETZSKY[3], J. SYLVESTER[4], D. SINTZOF[5], E. GRIGORIEW[6] et N. NIELSEN[7]. Nous parlerons plus loin de ce cas particulier.

Polynomes de Bernoulli et polynomes d'Euler d'ordre négatif.

29. Jusqu'ici nous avons supposé essentiellement que l'ordre n était un entier positif. Nos relations subsistent encore pour $n = 0$, si l'on suppose que

$$B_\nu^{(0)}(x) = E_\nu^{(0)}(x) = x^\nu.$$

Mais il y a avantage à étendre la notion et à introduire des fonctions d'ordre négatif. On peut ainsi faire rentrer dans un même cadre des fonctions qui apparaissent jusqu'ici comme distinctes. Nous avons défini les fonctions d'ordre positif de sorte que:

$$\mathop{\triangle^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \frac{\nu!}{(\nu - n)!} x^{\nu - n},$$

$$\mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots \omega_n) = x^\nu.$$

Je définis *le polynome de* BERNOULLI *d'ordre* $-n$ par l'équation

$$B_\nu^{(-n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \frac{\nu!}{(\nu + n)!} \mathop{\triangle^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} x^{\nu + n}, \tag{1}$$

et *le polynome* d'EULER *d'ordre* $-n$ par l'équation

$$E_\nu^{(-n)}(x \mid \omega_1, \ldots \omega_n) = \mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} x^\nu, \tag{2}$$

n et ν étant des entiers non négatifs. On voit que $B_\nu^{(-n)}(x)$ et $E_\nu^{(-n)}(x)$ sont encore des polynomes du degré ν. De la définition il résulte immédiatement que

[1] ŒUVRES (2) 8, Paris 1890, p. 180—94.
[2] Sur les développements en séries, Bull. Soc. math. France 6 (1878), p. 57—68.
[3] Mém. Acad. Pétersbourg (7) 31 (1883), mém. nº 11.
[4] Educ. Times 39 (1883), p. 74.
[5] Bull. Soc. physico-mathématique de Kasan (1) 8 (1890), p. 291—336; id. (2) 1 (1892), p. 234.
[6] Nombres de BERNOULLI des ordres supérieurs, id. (2) 7 (1898), p. 146—202.
[7] Ann. mat. pura appl. (3) 10 (1904), p. 287—325; Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, p. 66—78.

$$\mathop{\triangle}_{\omega_{n+1}} B_\nu^{(-n)}(x\,|\,\omega_1, \ldots \omega_n) = \nu B_{\nu-1}^{(-n-1)}(x\,|\,\omega_1, \ldots \omega_{n+1}), \tag{3}$$

$$\mathop{\nabla}_{\omega_{n+1}} E_\nu^{(-n)}(x\,|\,\omega_1, \ldots \omega_n) = E_\nu^{(-n-1)}(x\,|\,\omega_1, \ldots \omega_{n+1}). \tag{4}$$

Les équations

$$\triangle^p B_\nu^{(n)}(x) = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-p+1)\, B_{\nu-p}^{(n-p)}(x), \tag{5}$$

$$\nabla^p E_\nu^{(n)}(x) = E_\nu^{(n-p)}(x) \tag{6}$$

restent donc vraies même si $p > n$.

Dans les paragraphes 15 et 24 nous avons démontré qu'on a

$$E_\nu^{(n+p)}(x+y) = \sum_{s=}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(n)}(x)\, E_{\nu-s}^{(p)}(y), \tag{7}$$

$$B_\nu^{(n+p)}(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)}(x)\, B_{\nu-s}^{(p)}(y), \tag{8}$$

x et y étant des nombres quelconques, n et p étant des entiers non négatifs. Appliquons aux deux membres de l'équation (7) l'opération

$$\mathop{\nabla^{2n}}_{\omega_1 \cdots \omega_n,\, \omega_1 \cdots \omega_n}$$

où ∇ porte sur la variable x. On retrouve l'équation (7) où n a été changé en $-n$. Appliquons ensuite aux deux membres de cette équation l'opération

$$\mathop{\nabla^{2p}}_{\omega_1 \cdots \omega_p,\, \omega_1 \cdots \omega_p}$$

où ∇ porte sur la variable y. On retrouve l'équation (7) où n et p ont été changés en $-n$ et $-p$. On peut enfin faire la même observation relativement à l'équation (8). *Les équations* (7) *et* (8) *subsistent donc pour toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives de p et de n.* Nous mentionnerons quelques cas particuliers de ces équations. Posons $p = 0$ et remplaçons n par $-n$, il vient[1]

$$E_\nu^{(-n)}(x+y) = \sum_{s=}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} y^{\nu-s} E_s^{(-n)}(x), \tag{9}$$

[1] On peut aussi déduire ces équations de la formule de Taylor.

$$B_\nu^{(-n)}(x+y)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}y^{\nu-s}B_s^{(-n)}(x). \tag{10}$$

Par analogie avec ce qui précède je pose

$$B_\nu^{(-n)}=B_\nu^{(-n)}(0),$$

$$C_\nu^{(-n)}=2^\nu E_\nu^{(-n)}(0),$$

$$D_\nu^{(-n)}=2^\nu B_\nu^{(-n)}\left(-\frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}\right),$$

$$E_\nu^{(-n)}=2^\nu E_\nu^{(-n)}\left(-\frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}\right).$$

Alors il résulte des équations (9) et (10) que les polynomes d'ordre négatif s'expriment par les $B_\nu^{(-n)}$ etc. de la même manière que les polynomes d'ordre positif s'expriment par les $B_\nu^{(n)}$ etc. Il s'agit donc de trouver les fonctions $B_\nu^{(-n)}$ etc. Dans ce but posons $x=y=0$ dans l'équation (8). Il vient

$$B_\nu^{(-n-p)}=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}B_s^{(-n)}B_{\nu-s}^{(-p)} \tag{11}$$

et cette relation subsiste si l'on remplace B par C, par D ou par E. Cela posé, on arrive aisément à trouver l'expression explicite des fonctions $B_\nu^{(-n)}$ etc. On a d'abord

$$B_0^{(-n)}=C_0^{(-n)}=D_0^{(-n)}=E_0^{(-n)}=1,$$

$$B_\nu^{(-1)}[\omega]=\frac{\omega^\nu}{\nu+1}, \qquad C_\nu^{(-1)}[\omega]=2^{\nu-1}\omega^\nu,$$

pour toutes les valeurs positives de ν et

$$E_\nu^{(-1)}[\omega]=\omega^\nu, \qquad D_\nu^{(-1)}[\omega]=\frac{\omega^\nu}{\nu+1},$$

si ν est pair. Mais si ν est impair on a $D_\nu^{(-1)}=E_\nu^{(-1)}=0$.

De ce dernier fait on conclut immédiatement qu'on a toujours

$$D_\nu^{(-n)}=E_\nu^{(-n)}=0,$$

si ν est impair, et cela quel que soit n. Par voie d'induction on démontre ensuite que

$$B_\nu^{(-n)}[\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{(s_1+1)!\,(s_2+1)!\dots(s_n+1)!}\,\omega_1^{s_1}\,\omega_2^{s_2}\dots\omega_n^{s_n},$$

$$C_\nu^{(-n)}[\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1!\,s_2!\dots s_n!}\,C_{s_1}^{(-1)}[\omega_1]\dots C_{s_n}^{(-1)}[\omega_n],$$

les sommations étant étendues à toutes les valeurs entières, nulles ou positives de $s_1, s_2, \dots s_n$ qui vérifient la condition $s_1 + s_2 + \dots + s_n = \nu$.

Si ν est pair on trouve

$$E_\nu^{(-n)}[\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{s_1!\,s_2!\dots s_n!}\,\omega_1^{s_1}\,\omega_2^{s_2}\dots\omega_n^{s_n},$$

$$D_\nu^{(-n)}[\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n] = \sum \frac{\nu!}{(s_1+1)!\,(s_2+1)!\dots(s_n+1)!}\,\omega_1^{s_1}\,\omega_2^{s_2}\dots\omega_n^{s_n},$$

les sommations étant étendues aux mêmes valeurs de $s_1, s_2, \dots s_n$ *en exceptant celles qui sont impaires.*

Revenons aux équations (7) et (8) et posons $p = -n$. Il vient

$$(x+y)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} E_s^{(n)}(x)\,E_{\nu-s}^{(-n)}(y), \tag{12}$$

$$(x+y)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)}(x)\,B_{\nu-s}^{(-n)}(y), \tag{13}$$

et en particulier si $y = 0$

$$x^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} 2^{-s}\,C_s^{(-n)}\,E_{\nu-s}^{(n)}(x),$$

$$x^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(-n)}\,B_{\nu-s}^{(n)}(x).$$

A l'aide de ces relations de récurrence on sait trouver les polynomes de Bernoulli et les polynomes d'Euler d'ordre n *sans passer par l'intermédiaire des polynomes d'ordre inférieur à* n. Remarquons en outre que ces équations peuvent s'écrire comme il suit

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{C_s^{(-n)}}{2^s\,s!}\,\frac{d^s E_\nu^{(n)}(x)}{dx^s} = x^\nu,$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{B_s^{(-n)}}{s!}\,\frac{d^s B_\nu^{(-n)}(x)}{dx^s} = x^\nu.$$

Les polynomes de Bernoulli et les polynomes d'Euler d'ordre quelconque (positif ou négatif) satisfont donc à des équations différentielles linéaires et à coefficients constants. Et ces équations n'admettent aucune autre solution rationnelle.

Posons enfin $x = y = 0$ dans l'équation (13); il vient

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)} B_{\nu-s}^{(-n)} = 0. \tag{14}$$

Dans cette équation le second membre est égal à 0, si $\nu > 0$, mais égal à 1, si $\nu = 0$. Nous avons défini la forme $B_\nu^{(n)}$ par un système de n relations de récurrence. Ce système peut donc se remplacer par l'unique équation (14) qui lui est équivalente. Surtout quand il s'agit de trouver $B_\nu^{(n)}$ pour une grande valeur de n il est préférable de se servir de cette équation.

Relativement aux fonctions $C_\nu^{(n)}$, $D_\nu^{(n)}$ et $E_\nu^{(n)}$ on peut faire la même remarque, car l'équation (14) subsiste si l'on remplace B par C, par D ou par E. Il faut donc commencer par calculer les fonctions $E_\nu^{(-n)}$ et $D_\nu^{(-n)}$ qui sont d'une nature plus simple que les fonctions d'ordre positif.

30. Tout ce que nous avons dit des polynomes d'ordre positif reste vrai mutatis mutandis pour les polynomes d'ordre négatif. C'est trop évident pour que j'aie besoin de m'y arrêter. Je veux donner seulement un exemple. Dans le paragraphe 26 nous avons établi pour les polynomes d'ordre positif les deux relations suivantes

$$\mathop{\triangle^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} B_\nu^{(n)}(x \,|\, 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots 2\omega_n) = D_x^{(n)} E_\nu^{(n)}(x \,|\, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n),$$

$$\mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} B_\nu^{(n)}(x \,|\, 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots 2\omega_n) = B_\nu^{(n)}(x \,|\, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n).$$

Je dis que ces relations sont vraies encore si l'on remplace n par $-n$. En effet on a

$$\mathop{\triangle}_{\omega} \mathop{\nabla}_{\omega} = \mathop{\nabla}_{\omega} \mathop{\triangle}_{\omega} = \mathop{\triangle}_{2\omega}$$

et par conséquent

$$\mathop{\triangle^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} \mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} f(x) = \mathop{\triangle^n}_{2\omega_1 \cdots 2\omega_n} f(x),$$

$$\mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} \mathop{\triangle^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} f(x) = \mathop{\triangle^n}_{2\omega_1 \cdots 2\omega_n} f(x).$$

Posons $f(x) = x^\nu$ dans la première de ces relations et $f(x) = x^{\nu+n}$ dans la seconde, il vient

$$\mathop{\triangle^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} E_\nu^{(-n)}(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = D_x^n B_\nu^{(-n)}(x|2\omega_1, 2\omega_2, \ldots 2\omega_n),$$

$$\mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} B_\nu^{(-n)}(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = B_\nu^{(-n)}(x|2\omega_1, 2\omega_2, \ldots 2\omega_n).$$

c. q. f. d.

31. On sait exprimer les moyennes et les différences d'une fonction par ses dérivées. En effet soit $f(x)$ une fonction analytique, holomorphe au voisinage du point $x = 0$. Appliquons aux deux membres de l'équation

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}$$

l'opération ∇^n, il vient

$$\mathop{\nabla^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(\nu)}(0) \frac{E_\nu^{(-n)}(x)}{\nu!}.$$

Mais en appliquant l'opération $\triangle^n$ on trouve

$$\mathop{\triangle^n}_{\omega_1 \cdots \omega_n} f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(\nu+n)}(0) \frac{B_\nu^{(-n)}(x)}{\nu!}.$$

Ces deux séries convergent si les valeurs absolues des nombres x et ω sont suffisamment petites.

Soit par exemple $f(x) = e^{xt}$ il vient

$$2^{-n}(e^{\omega_1 t} + 1)(e^{\omega_2 t} + 1) \cdots (e^{\omega_n t} + 1)\, e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} E_\nu^{(-n)}(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n),$$

$$\frac{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \cdots (e^{\omega_n t} - 1)}{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n t^n}\, e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(-n)}(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n).$$

Ces deux séries convergent pour toutes les valeurs des variables x et t. Nous en mentionnerons les trois cas particuliers suivants

$$\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t \ldots \cos \omega_n t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu}^{(-n)},$$

$$\frac{\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \ldots \sin \omega_n t}{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n t^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} D_{2\nu}^{(-n)},$$

$$\frac{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \cdots (e^{\omega_n t} - 1)}{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n t^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(-n)}. \tag{15}$$

Quelle est maintenant la fonction génératrice des $B_\nu^{(n)}$? Nous venons de voir que notre définition de ces formes est équivalente à l'équation (14):

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)} B_{\nu-s}^{(-n)} = \begin{cases} 0, & \nu > 0 \\ 1, & \nu = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Elles se déterminent uniquement par cette équation quand on y pose successivement $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ On en conclut que la fonction génératrice des $B_\nu^{(n)}$ est la réciproque de la fonction génératrice des $B_\nu^{(-n)}$ c'est à dire qu'on a

$$\frac{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n t^n}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \cdots (e^{\omega_n t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}; \tag{16}$$

car en multipliant terme à terme les équations (15) et (16) on trouve

$$1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s^{(n)} B_{\nu-s}^{(-n)}.$$

Les coefficients de la série (16) satisfont donc bien à l'équation (14). Pour trouver la fonction génératrice du polynome $B_\nu^{(n)}(x)$ rappelons qu'on a

$$B_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(n)}.$$

Multiplions la série (16) par la série

$$e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} x^\nu.$$

Il vient

$$\frac{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n t^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \cdots (e^{\omega_n t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n). \tag{17}$$

On démontre de la même manière que

$$\frac{2^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t}+1)(e^{\omega_2 t}+1)\cdots(e^{\omega_n t}+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} E_\nu^{(n)}(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n). \qquad (18)$$

La série (17) converge pour toutes les valeurs de x si le module de t est inférieur au plus petit des nombres

$$\left|\frac{2\pi}{\omega_1}\right|, \left|\frac{2\pi}{\omega_2}\right|, \ldots \left|\frac{2\pi}{\omega_n}\right|.$$

La série (18) converge si le module de t est inférieur à la moitié de ces nombres.

On aurait pu arriver un peu plus directement aux équations (17) et (18) en partant des équations aux différences finies. Considérons par exemple la fonction au premier membre de (18). Cette fonction est holomorphe au voisinage du point $t=0$. Elle se développe par conséquent en série suivant les puissances de t. Les coefficients dans cette série sont des polynomes en x. Cela posé, appliquons aux deux membres de l'équation (18) l'opération ∇^n, il vient

$$e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \nabla^n E_\nu^{(n)}(x).$$

Il en résulte que

$$\nabla^n E_\nu^{(n)}(x) = x^\nu$$

Les coefficents de la série sont par conséquent les polynomes d'Euler d'ordre n. c. q. f. d.

En posant $x = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)$ dans les équations (17) et (18) on trouve en particulier

$$\frac{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n t^n}{\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \ldots \sin \omega_n t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} D_{2\nu}^{(n)},$$

$$\text{séc}\, \omega_1 t\, \text{séc}\, \omega_2 t \ldots \text{séc}\, \omega_n t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu}^{(n)}.$$

Nous mentionnerons encore le cas particulier où $n=1$, $\omega_1=1$. En ce cas on trouve

$$t \operatorname{cos\acute{e}c} t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} D_{2\nu}, \quad |t| < \pi,$$

$$\operatorname{s\acute{e}c} t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu}, \quad |t| < \frac{\pi}{2},$$

$$t \cot t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2t)^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu}, \quad |t| < \pi,$$

$$\operatorname{tg} t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} C_{2\nu+1}, \quad |t| < \frac{\pi}{2}.$$

Un cas particulier.

32. Jusqu'ici les paramètres ω_i ont été des nombres quelconques. Supposons maintenant que tous les ω_i tendent vers *un* et voyons ce qui arrive. L'équation (17) du dernier paragraphe se réduit à

$$\frac{t^n e^{xt}}{(e^t - 1)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} B_{\nu}^{(n)}(x), \quad |t| < 2\pi. \tag{1}$$

Dérivons par rapport à t, il vient

$$\frac{(n + xt) t^{n-1} e^{xt}}{(e^t - 1)^n} - \frac{n t^n e^{(x+1)t}}{(e^t - 1)^{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} B_{\nu+1}^{(n)}(x),$$

d'où en réduisant

$$\frac{t^{n+1} e^{(x+1)t}}{(e^t - 1)^{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} \left\{ \frac{n-\nu}{n} B_{\nu}^{(n)}(x) + \frac{x\nu}{n} B_{\nu-1}^{(n)}(x) \right\}.$$

Mais en comparant ce développement avec le développement (1) on trouve

$$B_{\nu}^{(n+1)}(x+1) = \frac{n-\nu}{n} B_{\nu}^{(n)}(x) + \frac{x\nu}{n} B_{\nu-1}^{(n)}(x).^{1}$$

En tenant compte de l'équation

$$B_{\nu}^{(n+1)}(x+1) - B_{\nu}^{(n+1)}(x) = \nu B_{\nu-1}^{(n)}(x)$$

[1] De cette équation on déduit, en posant $x = 0$, que $B_{\nu}^{(n+1)}(1) = \frac{n-\nu}{n} B_{\nu}^{(n)}$.

on peut éliminer $B(x+1)$ et on trouve

$$B_\nu^{(n+1)}(x) = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) B_\nu^{(n)}(x) + (x-n)\frac{\nu}{n} B_{\nu-1}^{(n)}(x). \tag{2}$$

Cette relation est démontré si n est un entier positif. Elle est vraie encore si n est négatif. C'est ce qu'on voit en dérivant la fonction génératrice des polynomes d'ordre négatif. On le démontre aussi de la manière suivante. Considérons l'identité

$$\triangle^n(\varphi(x)\psi(x)) = (\triangle^n\varphi(x))\psi(x) + \binom{n}{1}(\triangle^{(n-1)}\varphi(x+1))\triangle\psi(x) + \cdots + \varphi(x+n)\triangle^n\psi(x),$$

et posons

$$\varphi(x) = x^{\nu+n-1}, \qquad \psi(x) = x.$$

Il vient

$$\triangle^n x^{\nu+n} = (x+n)\triangle^n x^{\nu+n-1} + n\triangle^{n-1} x^{\nu+n-1}.$$

Mais cette relation est identique à celle qu'on obtient en remplaçant n par $-n$ dans l'équation (2).

En dérivant la fonction génératrice des polynomes d'Euler on démontre de la même manière que ces polynomes satisfont à la relation

$$E_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{2}{n} E_{\nu+1}^{(n)}(x) - \frac{2}{n}(x-n) E_\nu^{(n)}(x), \tag{3}$$

n étant un entier positif ou négatif.

Posons $\nu = n$ dans l'équation (2). Il vient

$$B_n^{(n+1)}(x) = (x-n) B_{n-1}^{(n)}(x).$$

Mais comme on a $B_0^{(1)}(x) = 1$ il en résulte que

$$B_n^{(n+1)}(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n). \tag{4}$$

On a donc en particulier

$$B_n^{(n+1)} = (-1)^n n!,$$

$$D_n^{(n+1)} = (-1)^{\frac{n}{2}} 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \ldots (n-1), \qquad \text{si } n \text{ est pair},$$

$$D_n^{(n+1)} = 0, \qquad \text{si } n \text{ est impair}.$$

De l'équation (4) on déduit

$$B_n^{(n)}(x) = \int_x^{x+1} (t-1)(t-2)\ldots(t-n)\,dt,$$

d'où en particulier

$$B_n^{(n)} = \int_0^1 (t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,dt,$$

$$-\frac{1}{n} B_{n+1}^{(n)} = \int_0^1 t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,dt.$$

De l'équation (4) on déduit de même qu'on a

$$B_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{\nu!}{n!} \frac{d^{n-\nu}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{d\,x^{n-\nu}}, \tag{5}$$

si $\nu \leq n$. On a donc en particulier

$$B_{n-1}^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-n}\right],$$

$$B_n^{(n+2)} = (-1)^n n!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right),$$

$$D_n^{(n+2)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+1} 2^n \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2, \qquad \text{si } n \text{ est pair.}$$

Voici une autre relation qui est plus remarquable. En posant $n = 1$ dans l'équation (2) on trouve

$$B_\nu^{(2)}(x) = \nu(\nu-1)\left\{(x-1)\frac{B_{\nu-1}(x)}{\nu-1} - \frac{B_\nu(x)}{\nu}\right\}.$$

En posant $n = 2$ et en substituant l'expression de $B_\nu^{(2)}(x)$, que nous venons de trouver, il vient

$$B_\nu^{(3)}(x) = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2}\left\{(x-1)(x-2)\frac{B_{\nu-2}(x)}{\nu-2} - (2x-3)\frac{B_{\nu-1}(x)}{\nu-1} + \frac{B_\nu(x)}{\nu}\right\}.$$

Par voie d'induction on démontre qu'on a en général

$$B_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{\nu!}{n!\,(\nu-n-1)!}\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s}{s!}\frac{B_{\nu-n+s}(x)}{\nu-n+s}D_x^s(x-1)(x-2)\cdots(x-n). \tag{6}$$

Dans le cas actuel les polynomes de Bernoulli d'un ordre positif quelconque s'expriment donc linéairement par les polynomes d'ordre *un*[1].

Pour les polynomes d'Euler il en est de même. On a d'abord pour les polynomes d'ordre deux

$$\frac{1}{2}E_\nu^{(2)}(x) = -(x-1)E_\nu(x) + E_{\nu+1}(x).$$

En effet, remplaçons x par $x+1$ et ajoutons ensemble il vient

$$\frac{E_\nu^{(2)}(x+1)+E_\nu^{(2)}(x)}{2} = E_\nu(x). \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Je dis qu'on a en général

$$E_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{2^n}{n!}\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^{n-s}}{s!}E_{\nu+s}(x)\,D_x^s(x-1)(x-2)\cdots(x-n). \tag{7}$$

Pour le démontrer remplaçons x par $x+1$, il vient

$$E_\nu^{(n+1)}(x+1) = -\frac{2^n}{n!}\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^{n-s}}{s!}E_{\nu+s}(x)\,D_x^s\,x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

$$+\frac{2^{n+1}}{n!}\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^{n-s}}{s!}x^{\nu+s}D_x^s\,x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

Mais le dernier terme au second membre est nul en vertu de la formule de Taylor. On a donc

$$E_\nu^{(n+1)}(x+1) = -\frac{2^n}{n!}\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^{n-s}}{s!}E_{\nu+s}(x)\,D_x^s(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

$$-\frac{2^n}{(n-1)!}\sum_{s=1}^{s=n-1}\frac{(-1)^{n-s}}{s!}E_{\nu+s}(x)\,D_x^s(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

En ajoutant cette équation à l'équation (7) il vient

[1] L'expression (6) se réduit à l'expression (5) si $\nu \leq n$.

$$\frac{E_\nu^{(n+1)}(x+1)+E_\nu^{(n+1)}(x)}{2}=\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^{n-1-s}}{s!}E_{\nu+s}(x)D_x^s(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Le polynome défini par l'équation (7) possède donc la propriété qui s'exprime par la relation

$$\frac{E_\nu^{(n+1)}(x+1)+E_\nu^{(n+1)}(x)}{2}=E_\nu^{(n)}(x).$$

Mais c'est la propriété qui nous a servi comme définition des polynomes d'EULER et ces polynomes sont uniquement déterminés par cette propriété. La relation (7) est par conséquent démontrée.

Faisons tendre x vers zéro dans les équations (7) et (6), il vient

$$C_\nu^{(n+1)}=\frac{2^n}{n!}\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}2^{-s}C_{\nu+s}B_{n-s}^{(n+1)},$$

$$B_\nu^{(n+1)}=\frac{\nu!}{n!\,(\nu-n-1)!}\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}\frac{B_{\nu-s}}{\nu-s}B_s^{(n+1)}.$$

Ces deux formules sont des généralisations de celles du paragraphe 12.

33. Parmi les nombreuses relations de récurrence entre les nombres $B_\nu^{(n)}$ il y en a une qui mérite d'être signalée. Développons le polynome $B_\nu^{(\nu+1)}(x)$ suivant les puissances de x, il vient[1]

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-\nu)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}x^s B_{\nu-s}^{(\nu+1)}. \tag{8}$$

D'autre part de l'équation (22) paragraphe 24 il résulte qu'on a

$$B_\nu^{(n+\nu+1)}(x)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}B_s^{(n)}(x)\,B_{\nu-s}^{(\nu+1)}.$$

En comparant ces deux équations on trouve la relation symbolique:

[1] On conclut de cette relation que $(-1)^s\binom{\nu}{s}B_s^{(\nu+1)}$ est un entier positif, si $s\leq\nu$. L'importance de ces nombres a été reconnue pour la première fois par STIRLING.

$$(B^{(n)}+x-1)(B^{(n)}+x-2)\cdots(B^{(n)}+x-\nu)=B_\nu^{(n+\nu+1)}(x). \tag{9}$$

En posant respectivement $x=0, 1, \nu+n, \nu+n+1$ on trouve les quatres relations de récurrence suivantes

$$(B^{(n)}-1)(B^{(n)}-2)\cdots(B^{(n)}-\nu)=B_\nu^{(n+\nu+1)},$$

$$B^{(n)}(B^{(n)}-1)(B^{(n)}-2)\cdots(B^{(n)}-\nu+1)=\frac{n}{n+\nu}B_\nu^{(n+\nu)},$$

$$(B^{(n)}+n)(B^{(n)}+n+1)\cdots(B^{(n)}+n+\nu-1)=(-1)^\nu\frac{n}{n+\nu}B_\nu^{(n+\nu)},$$

$$(B^{(n)}+n+1)(B^{(n)}+n+2)\cdots(B^{(n)}+n+\nu)=(-1)^\nu B_\nu^{(n+\nu+1)}.$$

Si $n=1$ ces équations se réduisent à

$$(B-1)(B-2)\cdots(B-\nu)=(-1)^\nu\,\nu!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu+1}\right),$$

$$B(B-1)(B-2)\cdots(B-\nu+1)=(-1)^\nu\frac{\nu!}{\nu+1},$$

$$(B+1)(B+2)\cdots(B+\nu)=\frac{\nu!}{\nu+1},$$

$$(B+2)(B+3)\cdots(B+\nu+1)=\nu!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu+1}\right),$$

où les B sont les nombres de Bernoulli. Pour trouver une relation analogue entre les $D_\nu^{(n)}$ remplaçons dans l'équation (9) x par $x+\frac{n}{2}$; il vient

$$\left(\frac{D^{(n)}}{2}+x-1\right)\left(\frac{D^{(n)}}{2}+x-2\right)\cdots\left(\frac{D^{(n)}}{2}+x-\nu\right)=B_\nu^{(n+\nu+1)}\left(\frac{n}{2}+x\right),$$

d'où en particulier

$$(D^{(n)}+\nu-1)(D^{(n)}+\nu-3)(D^{(n)}+\nu-5)\cdots(D^{(n)}-(\nu-1))=D_\nu^{(n+\nu+1)},$$

$$(D^{(n)}-n-2)(D^{(n)}-n-4)\cdots(D^{(n)}-n-2\nu)=2^\nu B_\nu^{(n+\nu+1)},$$

$$(D^{(n)}-n)(D^{(n)}-n-2)\cdots(D^{(n)}-n-2\nu+2)=2^\nu\frac{n}{n+\nu}B_\nu^{(n+\nu)}.$$

Si $n=1$ ces équations se réduisent à

$$(D+\nu-1)(D+\nu-3)(D+\nu-5)\cdots(D-(\nu-1)) = \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}}}{\nu+1}\, 2^\nu \left(\frac{\nu}{2}!\right)^2,$$

$$(D-3)(D-5)(D-7)\cdots(D-2\nu-1) = (-2)^\nu\, \nu!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu+1}\right),$$

$$(D-1)(D-3)(D-5)\cdots(D-2\nu+1) = (-2)^\nu \frac{\nu!}{\nu+1}.$$

On a encore

$$(D-2)(D-4)(D-6)\cdots(D-2\nu)$$
$$= \frac{(-1)^\nu}{\nu+1}\, 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2\nu+1)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2\nu+1}\right).$$

Dans la première de ces relations on suppose que ν est pair. Si ν est impair le second membre se réduit à zéro.

34. Nous allons maintenant développer le polynome de Bernoulli en série de facultés. Soit $f(x)$ un polynome du degré ν. On a en vertu de la formule d'interpolation de Newton

$$f(x+y) = f(y) + \sum_{s=1}^{s=\nu} \frac{x(x-1)\cdots(x-s+1)}{s} \triangle^s f(y).$$

Posons $f(x) = B_\nu^{(n)}(x)$, on trouve

$$B_\nu^{(n)}(x+y) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_{\nu-s}^{(n-s)}(y)\, x(x-1)\cdots(x-s+1). \tag{10}$$

Si $\nu > n$ il figure dans ce développement à la fois des polynomes d'ordre positif et des polynomes d'ordre négatif. Posons $y = 0$ ou $y = 1$ il vient

$$B_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_{\nu-s}^{(n-s)}\, x(x-1)\cdots(x-s+1),$$

$$B_\nu^{(n+1)}(x) = (n-\nu)\sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} \frac{B_{\nu-s}^{(n-s)}}{n-s}(x-1)(x-2)\cdots(x-s).$$

Nous mentionnerons quelques cas particuliers de cette formule remarquable. Soit d'abord $n = 0$, il vient

$$(x+y)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_{\nu-s}^{(-s)}(y)\, x(x-1)\cdots(x-s+1),$$

$$x^\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_{\nu-s}^{(-s)}\, x(x-1)\cdots(x-s+1).$$

C'est le développement d'une puissance positive de x en série de facultés. La dernière équation est réciproque à l'équation (8). Soit pour abréger

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-s+1) = x^{[s]}$$

et posons, dans l'équation (10), $n=\nu+1$ il vient

$$(x+y)^{[\nu]} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} x^{[s]}\, y^{[\nu-s]}.$$

On en conclut qu'on a plus généralement

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{[\nu]} = \sum \frac{\nu!}{s_1!\, s_2!\cdots s_n!}\, x_1^{[s_1]}\, x_2^{[s_2]}\cdots x_n^{[s_n]},$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs non négatives des s_i qui vérifient la condition $s_1+s_2+\cdots+s_n=\nu$. C'est la formule du polynome des factorielles.

Posons enfin $\nu=n$ dans l'équation (10), divisons par x et faisons tendre x et y vers zéro, il vient

$$\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{n-s+1} \frac{B_s^{(s)}}{s!} = 1.$$

C'est une relation de récurrence entre les nombres $B_n^{(n)}$. Ces nombres figurent comme coefficients dans plusieurs développements en séries. On trouve, pour les premières valeurs de n

$$B_1^{(1)} = -\frac{1}{2}, \qquad B_2^{(2)} = \frac{5}{6}, \qquad B_3^{(3)} = -\frac{9}{4}, \qquad B_4^{(4)} = \frac{251}{30}, \qquad B_5^{(5)} = -\frac{475}{12}.$$

Entre ces nombres on a aussi la relation

$$\sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} \frac{B_s^{(s)}}{s!} = (-1)^n \frac{B_n^{(n)}}{n!}$$

qu'on déduit de même de l'équation (10).

De la formule d'interpolation de NEWTON en déduit encore par un calcul facile ces deux séries nouvelles

$$B_{2\nu}^{(n)}\left(x+\frac{n}{2}\right)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{2\nu}{2s}2^{2s-2\nu}D_{2\nu-2s}^{(n-2s)}x^2(x^2-1^2)(x^2-2^2)\cdots(x^2-(s-1)^2),$$

$$2^{2\nu+1}B_{2\nu+1}^{(n)}\left(\frac{x+n}{2}\right)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{2\nu+1}{2s+1}D_{2\nu-2s}^{(n-2s-1)}x(x^2-1^2)(x^2-3^2)\cdots(x^2-(2s-1)^2).$$

35. Voici un autre résultat qu'on peut tirer de la formule de NEWTON

$$f(x+y)=f(x)+\sum_{s=0}^{s=\nu}\frac{y(y-1)\cdots(y-s+1)}{s!}\triangle^s f(x). \tag{11}$$

Dans le paragraphe 31 nous avons vu qu'on peut exprimer les différences d'une fonction par ses dérivées. Inversement on sait exprimer les dérivées d'un polynome d'une manière simple à l'aide de ses différences. En effet dérivons par rapport à y et posons ensuite $y=0$ ou $y=-1$ il vient

$$f'(x)=\sum_{s=1}^{s=\nu}(-1)^{s-1}\frac{\triangle^s f(x)}{s},$$

$$f'(x-1)=\sum_{s=1}^{s=\nu}(-1)^{s-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{s}\right)\triangle^s f(x).$$

Soit en particulier $f(x)=B_{\nu+1}(x)$, il vient

$$B_\nu(x)=\sum_{s=0}^{s=\nu}(-1)^s\frac{\triangle^s x^\nu}{s+1},$$

$$B_\nu(x-1)=\sum_{s=0}^{s=\nu}(-1)^s\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{s+1}\right)\triangle^s x^\nu.$$

De même, dérivons n fois par rapport à y dans les deux membres de l'équation (11) et posons ensuite $y=0$ ou $y=-1$, on trouve en vertu de l'équation (5)

$$f^{(n)}(x)=n\sum_{s=0}^{s=\nu}\frac{B_s^{(s+n)}}{s!}\frac{\triangle^{s+n}f(x)}{s+n},$$

$$f^{(n)}(x-1)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\frac{B_s^{(s+n+1)}}{s!}\triangle^{s+n}f(x),$$

$f(x)$ étant un polynome quelconque de degré $\nu + n$. Soit en particulier

$$f(x) = B_{\nu+n}^{(n)}(x)$$

il vient

$$B_\nu^{(n)}(x) = n \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{B_s^{(s+n)}}{s!} \frac{\triangle^s x^\nu}{s+n},$$

$$B_\nu^{(n)}(x-1) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{B_s^{(s+n+1)}}{s!} \triangle^s x^\nu.$$

Pour les polynomes d'Euler d'un ordre positif quelconque on trouve de même

$$E_\nu^{(n+1)}(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \frac{(-1)^s}{2^s} \binom{s+n}{n} \triangle^s x^\nu$$

et en particulier si $n = 0$

$$E_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\nu} (-1)^s \frac{\triangle^s x^\nu}{2^s}.$$

36. Revenons aux équations (2) et (3)

$$B_\nu^{(n+1)}(x) = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) B_\nu^{(n)}(x) + (x-n) \frac{\nu}{n} B_{\nu-1}^{(n)}(x), \tag{2}$$

$$E_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{2}{n} E_{\nu+1}^{(n)}(x) - \frac{2}{n}(x-n) E_\nu^{(n)}(x), \tag{3}$$

et faisons tendre x vers zéro. Il vient

$$B_\nu^{(n+1)} = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) B_\nu^{(n)} - \nu B_{\nu-1}^{(n)}, \tag{12}$$

$$C_\nu^{(n+1)} = 2 C_\nu^{(n)} + \frac{1}{n} C_{\nu+1}^{(n)}. \tag{13}$$

D'autre part on a

$$B_\nu^{(n+1)} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} B_s B_{\nu-s}^{(n)},$$

$$C_\nu^{(n+1)} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} C_s C_{\nu-s}^{(n)}.$$

En réduisant à l'aide des équations (12) et (13) on trouve

$$B_\nu^{(n)} = -\frac{n}{\nu}\sum_{s=1}^{s=\nu}(-1)^s\binom{\nu}{s}B_s B_{\nu-s}^{(n)}, \tag{14}$$

$$C_{\nu+1}^{(n)} = -n\sum_{s=0}^{s=\nu}(-1)^s\binom{\nu}{s}C_s C_{\nu-s}^{(n)}. \tag{15}$$

A l'aide des équations (12) et (13) ou des équations (14) et (15) on peut déterminer successivement tous les $B_\nu^{(n)}$ et $C_\nu^{(n)}$. Comme on a

$$B_0^{(n)} = C_0^{(n)} = 1 \tag{16}$$

on voit que les $B_\nu^{(n)}$ et les $C_\nu^{(n)}$ sont des polynomes en n de degré ν. On trouve pour les premières valeurs de ν

$$B_1^{(n)} = -\frac{n}{2},\qquad B_2^{(n)} = \frac{n(3n-1)}{12},\qquad B_3^{(n)} = -\frac{n^2(n-1)}{8},$$

$$B_4^{(n)} = \frac{n(15n^3-30n^2+5n+2)}{240},\qquad B_5^{(n)} = -\frac{n^2(n-1)(3n^2-7n-2)}{96}.$$

$$C_1^{(n)} = -n,\qquad C_2^{(n)} = n(n-1),\qquad C_3^{(n)} = -n^2(n-3),$$

$$C_4^{(n)} = n(n-1)(n^2-5n-2),\qquad C_5^{(n)} = -n^2(n^3-10n^2+15n+10).$$

A l'aide des relations

$$D_\nu^{(n)} = (2B^{(n)}+n)^\nu,\qquad E_\nu^{(n)} = (C^{(n)}+n)^\nu$$

on détermine ensuite les $D_\nu^{(n)}$ et les $E_\nu^{(n)}$. On sait que ces nombres sont nuls si ν est impair. Pour les premières valeurs paires de ν on trouve

$$D_0^{(n)} = 1,\qquad D_2^{(n)} = -\frac{n}{3},\qquad D_4^{(n)} = \frac{n(5n+2)}{15},\qquad D_6^{(n)} = -\frac{n(35n^2+42n+16)}{63}.$$

$$E_0^{(n)} = 1,\qquad E_2^{(n)} = -n,\qquad E_4^{(n)} = n(3n+2),\qquad E_6^{(n)} = -n(15n^2+30n+16),$$

$$E_8^{(n)} = n(105n^3+420n^2+588n+272),$$

$$E_{10}^{(n)} = -n(945n^4+6300n^3+16380n^2+18960n+7936).$$

Jusqu'ici l'ordre n a été essentiellement un entier, d'abord positif et puis positif ou négatif. Mais ici une extension nouvelle se présente à l'esprit, extension qui n'avait pas de sens dans le cas général. En *définissant* les $B_\nu^{(n)}$ et les $C_\nu^{(n)}$ comme

les polynomes en n qui satisfont aux équations (12), (13) et (16) on peut considérer n comme une variable continue, réelle ou complexe. On arrive ainsi à quatre suites de polynomes en n. En se reportant au paragraphe 31 on voit que ces polynomes figurent comme coefficients dans les séries suivantes

$$\frac{t^n \cos nt}{(\sin t)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2t)^{2\nu}}{(2\nu)!} B_{2\nu}^{(n)}, \qquad |t| < \pi$$

$$\frac{t^n \sin nt}{(\sin t)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{(2t)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} B_{2\nu+1}^{(n)}, \qquad |t| < \pi$$

$$\left(\frac{t}{\sin t}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} D_{2\nu}^{(n)}, \qquad |t| < \pi$$

$$\frac{\cos nt}{(\cos t)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} C_{2\nu}^{(n)}, \qquad |t| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin nt}{(\cos t)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} C_{2\nu+1}^{(n)}, \qquad |t| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{(\cos t)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} E_{2\nu}^{(n)} \qquad |t| < \frac{\pi}{2}.$$

Nous ferons une autre fois l'étude plus complète de ces polynomes qui se rattachent aux polynomes de Bernoulli de la manière que nous venons d'indiquer.

BIBLIOGRAPHIE.

Johann Ambrosius Barth.

Leipzig.

MACH, ERNST, Die Leitgedanken meiner naturwissenschaftlichen Erkenntnisslehre und ihre Aufnahme durch die Zeitgenossen. Sinnliche Elemente und naturwissenschaftliche Begriffe. Zwei Aufsätze. — 31 pp. 8. 1919. M. 2: —.

MARCH, ARTHUR, Theorie der Strahlung und der Quanten. Mit 36 Fig. — VII + 182 pp. 8. 1919. Geh. M. 12: —; geb. M. 14: —

Grundbegriffe d. Strahlungslehre. Der Kirchhoff'sche Satz. Der Strahlungsdruck. Satz v. Boltzmann—Stefan. Das Wien'sche Verschiebungsgesetz. Elektrodynam. Theorie d. Strahlung. — Die Hypothese d. Energieelemente. Entropie u. Wahrscheinlichkeit. Das Planck'sche Strahlungsgesetz. Die zweite Plank'sche Theorie. — Theorie d. spezif. Wärme. Die Planck'sche Konstante als Wirkungsquantum. — Theorie d. Balmerserie. Theorie d. Feinstruktur. Theorie d. Starkeffektes. — Quantentheorie u. Thermodynamik. Absolut. Wert d. Entropie.

G. Bell & Sons, Ltd.

London.

FAWDRY, R. C., Dynamics. (Bell's Mathematical Series. Gen. Editor: William P. Milne.) — VIII + 355 + XVI pp. 8. 1919 5 s.

Kinematics. Falling bodies. Kinetics. The first law of motion. The sec. law of motion. Work, power, a. energy. Miscellan. examples. Impulse a. momentum. Composition of velocities, accelerations a. forces. Relative velocity. Motion in a circle. Miscellan. ex. — Differentiation. Velocity. Parabolic motion. Integration. Distance integral. Work integral. Rotating bodies. Moments of inertia. First a. second laws of rotation. Miscell. ex. Harmonic motion. Vector momentum. Turbines. Coefficient of restitution. Third law of rotation. Conservation of angular momentum. Rotation. Instantaneous centre. Motion relat. to the C. of G. General equations of motion for a rigid body in a plane. Miscell. ex. Answers.

Milne, John, The analytical geometry of the straight line and the circle. (Bell's Mathematical Series.) — XII + 243 pp. 8. 1919. 5 s.

Coordinates. The linear equation. Angles a. gradients. Perpendiculars. The circle having the origin as centre. Chords, tangents a. normals. More about coordinates. Concurrency a. collinearity. Homogeneous equat. of second degree. Gen. equat. to a circle. Tangents, normals, chords of contact. Conjugate points. Poles a. polars. Orthogonal a. coaxal circles. Answers.

Silberstein, L., Projective Vector Algebra. An algebra of vectors independent of the axioms of congruence and of parallels. — 78 pp. 8. 1919.

Introduct. remarks. Addition of two coinitial vectors defined. The associative law. Sum of collinear vectors. Multiple of a vector. Submultiple of a vector. The concept of equality of non-coinitial vectors. Difference of vectors. Negative scalar factors. Addition of vectors with »ideal» termini. On the use of the above vector algebra. Vector equations of straights a. of planes. Miscell. examples. Pascal's theorem. vector sum for variable t-line. Conic ranges a. pencils. — On the non-metrical sum of angles of a triangle. Linear vector operators. Project. collineations. Index.

Albert Bonnier.

Stockholm.

Oseen, C. W., Atomistiska föreställningar i nutidens fysik. Tid, rum och materia. Femton föreläsningar. (Tidskrift f. elem. Mat., Fys. o. Kemi, Tvångsfria tilläggshäften. I.) — 201 pp. 8. 1919. Kr. 9: —

Inledn. Den kinet. teorien f. en ideal gas. Satsen om energiens lika fördeln. Boltzmanns entropisats. Perrins bevis f. molekylernas exist. Den Brownska molekylarrörelsen. Andra bev. f. molekylernas exist. Bevis f. elektronernas exist. Värmestrålningens teori. Spec. värmet hos fasta kroppar. Gasernas ultraröda absorpt. Fotoelektr. effekten. Den Bohrska atomteorien. Vidareutv. av den Bohrska atomteor.

I vilk. mening kan rummet sägas vara krökt? Michelsons förs. Lorentz's relativitetsteori. Einsteins teori. Einsteins spec. relat. teori. Den relativistiska dynamiken Den allm. relativ. teorien.

Cambridge University Press.

Cambridge.

Fowler, R. H., The elementary differential geometry of plane curves. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. N:r 20) — VI + 105 pp. 8. 1920. 6 s.

Introd. The element. properties of tangents a. normals. The curvature of plane curves. The theory of contact. The theory of envelopes. Singular points of plane curves. Asymptotes of plane curves.

Hatton, J. L. S., The theory of the imaginary in geometry together with the trigonometry of the imaginary. — VI + 216 pp. 8. 1920. 18. sh. Bd.

Imaginary points and lengths on real straight lines. Imag. straight lines. Properties of semi-real figures. — The circle with a real branch. The conic with a real branch. — Angles betw. imagin. straight lines. Measurement of imagin. angles a. of lengths on imaginary straight lines. Theorems connected with projection. — The general conic. — The imagin. conic. — Tracing of conics a. straight lines. — The imagin. space. — Index.

Royal Society of London, Catalogue of scientific papers. Fourth series. (1884—1900). Vol. 14. (C- Fittig). 1024 pp. 4. 1915. £ 3. 3 s. — Vol. 15. (Fitting—Hyslop). VI + 1012 pp. 4. 1916. £ 3. 3 s.

University of Calcutta.

Calcutta.

Ganguli, Surendramohan, Lectures on the theory of plane curves, delivered to post-graduate students in the University of Calcutta. — Part 1. X + 138 pp. 8. 1919. — Part 2. XIII + 345 (+ 17 pp. fig.) 8. 1919.

1. Introd. Theory of plane curves. Singular points on curves. Polar curves. Covariant curves. — The Hessian. Polar reciprocal curves. Foci of curves. The analyt. triangle — Asymptotes. Syst. of curves.

2. Curves of the third ord. Cubic curves. Harmonic properties of cub. curves. Canonical forms. Unicursal cubics. Special cubics. Invariants a. covariants of cub. curves. Curves of the fourth ord. Quart. curves. Trinodal quartics. Bicircul. quartics. Circul. cubics as degenerate bicircul. quartics. Special quart. curves. Appendices.

Armand Colin.

Paris.

La vie universitaire à Paris. Ouvrage publ. sous l. auspices du Conseil de l'Université de Paris, par Paul Boyer, Maurice Caullery, Alfred et Maurice Croiset, Émile Durkheim, H. Gautier, Louis Havet, F. Larnaude, Ernest Lavisse, Henri Marcel, Edmond Perrier, Maurice Prou, G. H. Roger. Avec 92 photographies hors le texte. — 231 pp. 8. 1918. Fr. 12: —.

1. L'Université de Paris: L'histoire de l'Université, par E. Durkheim. Organisation générale de l'Université de Paris, par E. Durkheim. La Faculté d. lettres, par A. Croiset. La faculté d. sciences, par M. Caullery. L'Ecole normale sup., par E. Lavisse. La Faculté de droit, par F. Larnaude. La Faculté de médecine, par G. H. Roger. L'Ecole supérieure de pharmacie, par H. Gautier. — Les établissements d'ensignement sup. en dehors de l'Université: Introduction, par E. Durkheim. Le Collège de France, par M. Croiset. Le Muséum national d'histoire naturelle, par

E. Perrier. L'Ecole pratique d. Hautes-Etudes: Section d. sciences historiques et philologiques, par L. Havet. Section d. sciences religieuses. — L'Ecole nationale d. langues orientales vivantes, par P. Boyer. L'Ecole nationale des Chartes, par M. Prou L'Ecole du Louvre, par H. Marcel. Table d. illustrations.

Columbia University Press.

New York.

Keyser, Cassius J., The human worth of rigorous thinking. Essays and adresses. — 314 pp. 8. 1916. Dol. 1:75. Bd.

The human worth of rigor. thinking. The human significance of mathematics. The humanization of the teach. of math. The walls of the world; or concern. the fig. a. the dimens. of the universe of space. Math. emancipations: dimensionality a. hyperspace. The universe a. beyond: the exist. of the hypercosmic. The axiom of infinity: a new presupposit. of thought. The perman. basis of a liberal education. Graduate math. instruction for grad. students not intend. to become mathematicians. The source a. funct. of a university. Research in American univ. Principia mathematica. Concern. multiple interpretat. of postulate systems a. the »existence» of hyperspace. Math. productivity in the U. S. Mathematics.

Wood, R. W., Researches in physical optics. Part 2: Resonance radiation and Resonance spectra. (Columbia University, New York. Publication N:r 8 of the Ernst Kempton Adams fund.) — VIII + 184 pp. 4. 1919.

Plane grating spectrographs of long focus. The resonance spectra of iodine. Resonance spectra of iodine. The series of resonance spectra. Band a. line spectra of iodine. Zeeman-effect for complex lines of iodine. A photometric study of the fluorescence of iodine. The magnetooptics of iodine vapors. The flourescence of gases excited by ultra-Schumann waves. A further study of the flouresc. produced by ultra-Schumann rays. Scattering a. reg. reflection of light by an absorbing gas. Separation of close spectrum lines for monochromatic illumination. Photometric investigat. of the superficial reson. of sodium vapor. The separate excitation of the centres of emission of the D lines of sodium. Reson. radiation of sodium vapor exited by one of the D lines. Plates.

Librairie Croville—Morant.

Paris.

Montessus de Ballore, R. de, Introduction à la théorie des courbes gauches algébriques. Cours libre professé à la Faculté des sciences de Paris. Recueilli et réd. par M. Vogt. — 112 pp. 4. 1918. (Autogr.)

H. Dunod & E. Pinat.

Paris.

Dorgeot, T. E., Cinématique théorique et appliquée. — 272 pp. 4. 1919. Fr. 36: —

Du mouvement en général. Mouvem. uniforme. Mouvem. varié. Mouvem. uniformément varié. Mouvem. unif. accéléré avec vitesse initiale. Mouvem. unif. retardé. Représentation graph. de l'équat. : $E = \frac{v^2}{2a}$· Lois de la chute d. corps. Mouvem. projeté. Composit. d. mouvements. Propriétés du plan incliné. Mouvem. de rotation. Mouvem. d'un corps parallèlement à un plan. Transmission et transform. du mouvem. Mouvem. circ. continu. Transmiss. et transform. Transmiss. du mouvem. circul. continu entre deux axes rectangulaires non situés dans le même plan. Renseignem. prat. s. l. engrenages. Equipages ou trains de roues dentées. Transform. du mouvem. continu en circulaire cont. au moyen d'intermédiaires flex. Transmiss. du mouvem. circul. à l'aide d'interméd. rigides. Changements de vitesses p. engrenages. Transf. du mouvem. circ. cont. en rectiligne continu ou réciproquement. Transf. du mouvem. circ. cont. en rectiligne alternatif ou réciproquement. Transf. du mouvem. circ. cont. en rectiligne alternatif p. contact direct. Distribut. de la vapeur. Guidages articulés pour le mouvem. rectiligne. Cames. Encliquetages. Transf. du mouvem. rectiligne cont. en rectiligne cont. Transf. du mouvem. rectil. alternatif en rectil. alternat. Transf. du mouvem. circ. alternatif en circulaire et en rectiligne alternat. Organes d'arrêt ou arrêtages. Régulateurs d. appareils destinés à la mesure du temps. Appareils de mesure de la vitesse.

Dorgeot, E., La mécanique appliquée, théorique, numérique et graphique. A l'usage des constructeurs- mécaniciens, Bureaux d'études, ingénieurs, élèves des Ecoles Techniques, dessinateurs, etc. — 613 pp. 4. 1918. Fr. 32: 50.

Statique et dynamique: Mouvement uniforme. Mouvement varié. Mouvem. uniformément varié. Mouvements simultanés. Chute des corps. Mesure et travail d. forces. Forces concourantes. Démonstration du théorème d. moments. Moments d. forces par rapp. à un axe. Equilibre d. machines simples. Moments d'inertie. Force centrifuge. Procédé graph. pour trouver la pression de la vapeur dans un cylindre pendant la détente. Polygones funiculaires. Choc d. corps. Résistances passives. — Résistance d. matériaux: Efforts de traction longitudinale et de tension. Efforts de compression. Statique graph. ou graphostatique. Efforts de glissement ou de cisaillement. Efforts transversaux ou de flexion. Applicat. de la graphostatique d. l'étude d. poutres posées sur deux appuis. Résist. à la flexion d. dents de roues d'engrenage. Résist. au flambage d. pièces chargées debout. Efforts de torsion. Calcul d. pièces de machines. Epaisseur et rivures d. chaudières à vapeur. Réservoirs métall. Résist. d. plaques circulaires et rectangulaires. Chaines et cables. Courroies. Bielles et manivelles.

L. Ehlermann.
Dresden.

Dronke, J., & Lötzbeyer, Ph., Mathematische Aufgaben für die Oberstufe höherer Lehranstalten. — VII + 230 pp. 8. 1914.

Arithmetik u. Algebra. Planimetrie. Ebene Trigonometrie. Stereometrie u. sphär. Trigonometrie. Analytishe Geometrie. Aufgab. aus d. elem.-synthet. Geometrie d. Kegelschnitte. Neure Geom. Analysis. Tabellen.

Lötzbeyer, Ph., Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive. Mit Anhang: Darstellende Geometrie des Geländes. — XII + 132 pp. 8. 1918.

Allgem. Die schiefe Parallelprojektion. Gerade Parallelprojekt. Schattenbestimm. d. Parallelprojekt. — Perspektive. Das Schnittverfahren. Das Fluchtpunktverf. Schattenbest. d. Perspekt. — Darstell. Geom. d. Geländes. Darstell. v. Geländeflächen.

Ernest Flammarion.
Paris.

Lecornu, Léon, La Mécanique, les idées et les faits. (Bibliothèque de Philosophie scientifique.) — 304 pp. 8. 1918. Fr. 5: 75.

Considérations générales. Passage de la géométrie à la mécanique. Coup d'oeil historique. Principes de la mécan. moderne. Statique. La dynamique. Mécanique d. fluides. Les machines. L'avenir de la mécanique.

G. Freytag.
Leipzig.

Lesser, Oskar, Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Ausg. A. Teil 1: Für die mittleren Klassen der Realgymnasien und Oberrealschulen Preussens. 6:te Aufl. Mit 15 Fig. 203 pp. 8. 1918. M. 3: — geb. — Teil 2: Für die oberen Klassen der Realanstalten. 4:te Aufl. Mit 34 Fig. (Schwab-Lesser, Mathematisches Unterrichtswerk . . . , Ausg. A, Bd 1, T. 1—2.) — 262 pp. 8. M. 4: 50 geb.

1. Einführ. Die Grundrechnungsarten d. Arithmetik. Gleichungen v. erst. Grad m. er. Unbek. Anwend. d. Gleich. v. erst. Grad m. er. Unbek. Gleich. v. erst. Grad m. zwei u. mehr. Unbek. Das Ausziehen d. Quadratwurzel. Potenzen, Wurzeln u. Log. Quadrat. Gleich. m. er. Unbek. Gleich. v. zweit. Grad m. zwei Unbek.

2. Auflös. v. Gleich. v. erst. Grad m. zwei u. mehr. Unbek. Quadrat. Gleich. m. zwei Unbek. Arithm. Reihen. Geom. Reihen. Die ganze rationale Funktion $y = a_0 x^n + a_1^{n-1} + \cdots + a_n$. Benutzung d. Parabeln $y = f(x)$ zur näherungsweise Best. d. reellen Wurzeln num. Gleich. Best. d. Wurzeln er. kub. Gleich. durch Rechn.

Komplexe Zahlen. Alg. Funktionen verwickelterer Art u. ihre Derivierten. Transzendente Funkt. Reihenentwicklungen (Schmiegungsparabeln). Auswertung unbest. Ausdr. Max. u. Min. Die Integration.

Lesser, Oskar, Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte und der analytischen Geometrie. Ausg. A: Für Realanstalten. Mit 71 Fig. 3:te Aufl. (Schwab-Lesser, Mathematisches Unterrichtswerk . . . , Ausg. A, Bd 3, T. 1.) — 209 pp. 8. 1918. M. 3: — geb.

Die grundleg. Eigensch. d. ebenen Schnitte es. gerad. Kreiskegels. Weitere Untersuch. d. Eigensch. d. Kegelschnitte. Der Kegelschnitt als Bild es. Kreises. Der Kegelschnitt als harm. Bild es. Kreises. — Geschichtl. Notizen. Best. es. Punktes durch Koordinaten. Die gerade Linie. Der Kreis. Die Kegelschnitte. Anwend.: Geom. Örter. — Anwend. zur Differentialrechn. u. zur darst. Geometrie: Kurvenuntersuchungen. Raumgeometrie.

Lesser, Oskar, Lehr-und Übungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. T. 1. Ausg. B: Für die mittleren Klassen der Gymnasien, besorgt von Carl Heinr. Müller. Mit 12 Fig. (Schwab-Lesser, Mathematisches Unterrichtswerk . . . , Ausg. B, Bd 1, T. 1.) — 162 pp. 8. 1914. M. 2: — geb.

Zur Einführ. Die Grundrechnungsarten d. Arithmetik. Gleich v. erst. Grad m. er. Unbek. Anwend. d. Gleich. v. erst. Grad m. er. Unbek. Gleich v. erst. Grad m. zwei u. mehr. Unbek. Das Ausziehen d. Quadratwurzel. Potenzen, Wurzeln, Log. Quadrat. Gleich. m. er. Unbek.

Schneider, Adolf, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik und Algebra. Für Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten. Mit 33 Fig. (Schwab-Lesser, Mathematisches Unterrichtswerk . . . , Bd 1.) — 285 pp. 8. 1915. M. 3: 40.

Einführung. Die Grundrechnungsarten d. Arithmetik. Das Ausziehen d. Quadratwurzel. Gleichungen v. erst. Grade m. einer Unbekannten. Anwend. d. Gleich. v. erst. Gr. m. einer Unbek. Gleichungen v. erst. Gr. m. zwei u. mehr. Unbek. Potenzen, Wurzeln u. Logarithmen. Quadrat. Gleich. m. einer Unbek. Gleich. v. zweit. Gr. m. zwei Unbek. Arithm. Reihen. Geom. Reihen. Kombinatorik. Der binom. Lehrsatz. Komplexe Zahlen. Näherungsweise Best. d. reellen Wurzeln v. Gl. höh. Grades.

Schneider, Adolf, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. Für Lehrer- u. Lehrerinnenbildungsanstalten. Teil 1—2. (Schwab-Lesser, Mathematisches Unterrichtswerk . . . , Bd 2). — T. 1: Planimetrie, Grundlehren d. Kegelschnitte u. d. analytischen Geometrie. 270 pp. 8. 1918. M. 3: 40. — T. 2: Ebene Trigonometrie, Stereometrie u. sphärische Trigonometrie. 262 pp. 8. 1915. M. 3: 40.

1. Die geom. Grundgebilde. Punkt, Linie, Fläche. Zwei Geraden in d. Ebene. Der Winkel. Die Kreislinie. Ebene Fig. Winkel an parallelen Geraden. Geschlossene Beweisform. Achsiale Symmetrie. Fundamentalaufg. Fundamentalsätze v. Dreieck.

Die Grundaufg. d. Dreiecks. Kongruenz d. Dreiecke. Dreiecksaufg. Zentrische Symmetrie. Das Parallelogr. Das Trapez. Merkw. Punkte im Dreieck. Kreisbogen, Sehnen u. Tang. Peripheriewinkel. Übungsaufg. Zwei Kreise. Ein- u. umbeschrieb. Fig. Flächenvergl., Verwandl. u. Teilung ebener Fig. Flächenberechn. ebener Fig. Verhältnisgleich. v. Strecken. Üb.-aufg. Ähnlichkeit geradlin. Fig. Die regelmäss. Vielecke. Umfang u. Inhalt d. Kreises. Anw. d. Algebra auf d. Geom. Harmon. Punkte u. Strahlen. Pol u. Polare am Kreise. Aufg. Transversalen im Dreieck. Ähnlichkeitspunkte u. Ähnlichkeitsachsen bei Kreisen. Potenzlin. Das Appollonische Probl. Kegelschnitte. Analyt. Geometrie.

2. Einl. Die trig. Funktionen. Berechn. rechtwinkl. u gleichschenkl. Dreiecke. Erweit. d. Funktionsbegriffs f. belieb. Winkel. Die Berechn. schiefwinkl. Dreiecke. Additionstheoreme. Erweit. d. Goniometrie. Dreiecksberechn. — Das Zeichnen räuml. Gebilde. Geraden u. Ebenen im Raume. Winkel v. Ebenen u. Geraden. Die körperliche Ecke. Das Prisma. Die Pyramide. Der Eulersche Satz. Die regelm. Körper. Krumme Flächen. Der Zylinder. Der Kegel. Die Kugel. Die grundleg. Eigensch. d. ebenen Schnitte es. gerad. Kreiskegels. — Sphär. Fig. Trigon. d. Dreikants. Aufgaben aus d. math. Erdkunde. Grundlehren u. Hauptaufg. d. sphär. Astronomie.

Gauthier-Villars & Cie.

Paris.

INGHIRAMI, G., Table des nombres premiers et de la décomposition des nombres de 1 à 100 000. Revue et corr. par le Dr. PROMPT et suivie de la table des bases des nombres tessaréens de 1 à 20 000. — XX + 36 pp. 8. 1919. Fr. 5: —.

DE LA VALLÉE POUSSIN, C., Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Professées à la Sorbonne. (Collection de monographies sur la théorie d. fonctions, publ .... Émile Borel.) — VIII + 150 pp. 8. 1919. Fr. 8: — (Majorat. temp. 50 %).

Théorèmes de Weierstrass. Géneralités. Approximation par les séries de Fourier. Approximat. par l. sommes de Fejér. Méthode générale propre à abaisser la borne précédemment assignée à l'approximation. Théorèmes réciproques. Propriétés différentielles que suppose un ordre donné d'approximation. Approx. par polynomes, réduction à une approx. trigonométrique. Polynome d'approx. minimum. Approximation trigon. minimum. Fonctions analytiques présentant d. singularités polaires. Fonctions analyt. présentant certaines singularités polaires (points critiques d'ordre s). Approx. trigon. des fonctions entières.

NIEWENGLOWSKI, B., & GÉRARD, L., Leçons de géométrie élémentaire. Conformes aux programmes du 27 juillet 1905 pour les classes de Première C et D et de Mathématiques A et B: 1. Géométrie plane. 2e éd. 354 pp. 8. 1918. — 2. Géométrie dans l'espace. 330 pp. 8. 1907.

1. Introd. Des angles. Des parallèles. Polygones, triangles. Perpendiculaires et obliques. Cas d'égalité d. triangles. Parallélogrammes. — Arcs et cordes d'un cercle. Tangentes et normales. Positions relatives de deux cercles. Mesure d. angles. Constructions. Déplacement d'une figure plane. — Vecteurs. Lignes proportionnelles. Homothétie. Similitude. Sinus, cosinus etc. Relations métriques. Rapport anharmonique etc. Cercles orthogonaux. Polaires. Inversion. Polygones réguliers. Longueur de la circonférence. — Mesure d. aires. Comparaison d. aires.

2. Le plan. Droites et plans parallèles. Angles de droites non situées dans le même plan. Droite et plan perpendiculaires. Angles dièdres. Plans perpendiculaires. Plans parallèles. Projections orthogon. Angles polyèdres. Translat. et rotation. — Généralités s. l. polyèdres. Volume du prisme. Volume de la pyramide. Symétrie. Homothétie et similitude. — Notions s. l. surfaces coniques, cylindriques et de révolution. Cylindre et cône de révolut., aire de la surf. latérale. Développement, volume. Prem. notions s. la sphère. Fig. tracées s. la sphère. Aire et volume de la sphère. — Ellipse. Hyperbole. Parabole. Propriétés communes aux trois courbes. Hélice. — Inversion. Notions de perspect. Rapport anharmon. Div. harmon. Faisceaux harmon. Polaire. Exerc. Cercles orthog. Points conjugués. Polaire et pôle. Théorème fond. Construct. de la polaire. Plan radical. Sphères orthog. Plan polaire et pôle p. rapp. à une sphère. Inverseurs. Project. stéréogr. Sinus, cosinus etc. Relations fondamentales. Etc. etc. — Symétries du cube et de l'octaèdre reg. Exerc. — Vecteurs.

PETROVITCH, MICHEL, Les spectres numériques. Préf. de M. Émile Borel. — VIII + 110 pp. 8. 1919. Fr. 5:— (Majorat. temp. 50 %).

Introd. Spectres numériques: Spectres numériques et leurs éléments. La génératrice spectrale. La caractéristique spectrale principale. La caractéristique spect. qualitative. La correspondance entre une suite d'entiers et l. éléments de ses spectres. Le spectre en tant que nombre décimal. — Un mode de correspondance entre l. fonctions d'une variable et l. suites de nombres entiers. — Spectres d. fonctions d'une variable. — La méthode spectrale: Principe de la méthode. Quelques applications arithmétiques. Procédé spectral d'évaluation d. intégrales définies. Détermination spectrale d. fonctions.

Ginn & Company.

Boston. U. S. A.

HANCOCK, HARRIS, Theory of maxima and minima. — V + 192 pp. 8. 1917. Dol. 3:— Bd.

Funct. of one variable: Ordinary max. a. minima. Extraord. max. a. min. Funct. which have derivatives only on definite positions. Funct. which have only one-sided diff. quotients of a cert. order for a value $x = x_0$. Upper a. lower limits of a one-val. funct. which is continuous f. values of the arg. within a definite interval. — Funct. of sev. variables: Ord. max. a. min. Relat. max. a. min. — Funct. of two variables: Ord. extremes. Incorrectness of deduct. made by earlier a. many mod. writers. Diff. attempts to improve the theory. — The Scheeffer theory: Gen. criteria f. a greatest

a. a least value of a funct. of two var., in partic. the extraord. extremes. Homogen. funct. Extremes f. funct. that are not homogen. The method of Victor v. Dantscher. Funct. of three var. — Max. a. min. of funct. of sev. variables that are subject. to no subsidiary conditions: Ord. extremes. Theory of the homogen. quadrat. forms. Appl. of the theory of quadr. forms to the probl. of max. a. min. stated in §§ 47—51. — Theory of max. a. min. of funct. of sev. var. that are subj. to subsid. conditions. Relat. max. a. min. Theory of homogen. quadr. forms. Appl. of the criteria just found to the probl. of this chapter. — Special cases: The pract. appl. of the criteria that have been hitherto given a. a meth. founded upon the theory of funct., which often renders unnecess. these criteria. Ex. of improper extremes. Cases in which the subsid. condit. are not to be regarded as equat. but as limitations. Gauss' princ. The reversion of ser. — Cert. fundament. concept. in the theory of analyt. funct. Analyt. dependence. Alg. depend. Alg. structures in two var. Meth. of finding all ser. for y which belong to a k-ply sing. point.

Ginn and Company, Mathematical portraits and pages, collected and arranged by David Eugene Smith. — 24 pp. 8. 1916.

Sir Isaac Newton. Isaac Barrow. John Wallis. Nicholas Saunderson. Brook Taylor. The craft of nombrying. The title page of Tonstall's De arte supputandi. A page from Recorde's Ground of artes. A page from Recorde's Whetstone of witte. Title-page of the Stratioticos by Leonard and Thomas Digges.

Lehmer, Derrick Norman, An elementary course in synthetic projective geometry. — XIII + 123 pp. 8. 1917. Dol. 1, 24. Bd.

One-to-one corresp. Relations betw. fundamental forms in one-to-one corresp. w. each other. Combinat. of two projectively related fundam. forms. Point-rows of the sec. ord. Pencils of rays of the sec. ord. Poles a. polars. Metrical propert. of the con. sect. Involution. Metr. prop. of involut. On the hist. of synthet. project. geom.

Mc Clenon, Raymond Benedict, Introduction to the elementary functions. With the editorial coöperation of William James Rusk. — IX + 244 pp. 8. 1918. Dol. 2, 40. Bd.

The graphical representation. Funct. a. their graphs. Applicat. of graph. represent. to elem. algebra. Introduct. to the trigonometr. functions. Some simple fractional a. irrat. funct. The locus probl. The straight line a. the circle. The parabola, ellipse, a. hyperbola. Simultan. equat. Further study of the trig. funct. Polar coördinates. The exponent. a. log. functions. Introd. to the different. calculus. Proof that the diagonal of a square is incommens. with its side. Laws of operation with radicals. To construct a segm. having a rat. length. To construct the square root of any given segm. Simult. lin. equat. in two unknown quantities. The quadr. equat. in one unknown quant. Index.

Veblen, Oswald, & Young, John Wesley, Projective geometry. Vol. 1. — 342 pp. 8. 1910. Dol. 4, 80. Bd.

Introd. Theorems of alignment a. the principle of duality. Projection, section, perspectivity. Elem. configurations. Projectivities of the primit. geom. forms of one, two a. three dimens. Harmonic construct. a. the fundament. theorem of project. geometry. Conic sections. Algebra of points a. one-dimens. coördinate syst. Coörd. systems in two- a. three-dimens. forms. Projectivities in one-dimens. forms. Geom. constructions. Invariants. Project. transformations of two-dimens. forms. Families of lines. Index.

Veblen, Oswald, & Young, John Wesley, Projective geometry. Vol. 2. — XII + 511 pp. 8. 1918. Dol. 5. — Bd.

Foundations. Elem. theorems on order. The affine group in the plane. Euclid. plane geom. Ordinal a. metric properties of conics. Inversion geom. a. related topics. Affine a. Euclid. geom. of three dimensions. Non-Euclidean geometries. Theorems on sense a. separation.

Smith, David Eugene, Number stories of long ago. — 136 pp. 8. (8 col. inserts) 1919. Dol. 0, 56. Bd.

How Ching a. An-nam a. Menes counted. How Ahmes a. Lugal a. Chang wrote their numbers. How Hippias a. Daniel a. Titus wrote their numbers. How Gupta a. Mohammed a. Gerbert wrote their numbers. How Robert a. Wu a. Caius added numbers. How Cuthbert a. Leonardo a. Johann multiplied numbers. How Filippo a. Adriaen a. Michael divided numbers. Ahmes a. Heron a. Jakob despair of ever learning fractions. Number puzzles before the log fire. Curious probl. before the log fire.

Jul. Gjellerup.

København.

Andersen, A. F., Bohr, Harald, & Mollerup, Johs., Nyere Undersøgelser over Integralregningen. Tre Foredrag holdt i Matematisk Forening (København). — 63 pp. 8. 1917. Kr. 4: —

En Punktmængdes Maal, af Harald Bohr. — Det Riemann'ske Integralbegreb, af A. F. Andersen. — Det Lebesgue'ske Integralbegreb, af Johs. Mollerup.

Andersen, A. F., Bohr, Harald, & Mollerup, Johs., Cesàro's Summabilitetsmetode med Anvendelse paa Fourier'ske og Dirichlet'ske Rækker. Tre Foredrag holdt i Matematisk Forening (København). 51 + 20 + 25 pp. 8. 1919. Kr. 5: —

Andersen, A. F., Chistensen, H., Petersen, Richard, Eksamensopgaver i Matematisk Analyse og Geometri ved den Polytekniske Læreanstalt. — 24 pp. 8. 1920.

Bohr, H., Bonnesen, T., Mollerup, Johs., & Pàl, J., Elementerne af de algebraiske Tals Teori. Fire Foredrag holdt i Matematisk Forening (København). — 115 pp. 8. 1920.

Algebraiske Tal og Tallegemer, af JULIUS PÀL. — Det geometriske Grundlag for den algebraiske Talteori, af T. BONNESEN. — Idealtoriens hovedsætning. (Et Ideals Opløselighed i Primidealer), af HARALD BOHR. — K $(\sqrt{-1})$; K $(\sqrt{-3})$; K $(\sqrt{-5})$ af JOHANNES MOLLERUP.

FRIIS-PETERSEN, FR., & JESSEN, J. L. W., Aritmetik og Algebra for det toaarige Præliminærkursus. I. 63 pp. 8. 1920. — II. 63 pp. 8. 1919. Kr. 3.—

I. Addition. Subrakt. Nul, posit. og negat. Tal. Multiplik. Div. Ligninger af første Grad. Proportioner. Potens I. Polynomiers Div. Talteori. Decimalbrøk. II. Rod. Ligninger. Polynomiet af and. Grad. Grænseværdier. Potens II. Differensrækker. Kvotientrækker. Logaritmer. Eksponent. Ligninger. Rentesregn.

C. W. K. Gleerup.

Lund.

BJÖRLING, C. F. E., Övningsuppgifter i differentialkalkyl och algebraisk analys. — 63 pp. 8. 1920. Kr. 4: 75.

Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag.

København.

NIELSEN, NIELS, Lærebog i Trigonometri. 2den gennemsete Udg. — 76 pp. 8. 1917.

Abscisser og Vinkler. De trigon. Funktioner. Trigon. Ligninger. Trekantens Opløsning. Andre Anvend. paa Trekantens Opløsning. Tilnærmet praktisk Beregn.

D. C. Heath & Co.

Boston, New York, Chicago.

BURKHARDT, HEINRICH, Theory of functions of a complex variable. Author. tranlation from the 4th German ed. with the addition of figures and exercises by E. S. E. RASOR. — 445 pp. 8. 1913. Dol. 4: 20.

Complex numbers a. their geometrical representation. Rational funct. of a complex variable a. the conformal representat. determined by them. Definit. a. theorems on the theory of real variables a. their funct. Single-valued analytic funct. of a compl. var. Many-valued analytic funct. of a compl. var. General theory of functions. Index.

CAJORI, FLORIAN, Notes on the history of geometry and algebra. — 25 pp. 8. 1911. 10 c.

COHEN, ABRAHAM, An introduction to the Lie theory of one-parameter groups. With applications to the solution of differential equation. — 254 pp. 8. 1911. Dol. 2: 24. Bd.

Lie's theory of one-parameter groups. Diff. equat. of the first order. Miscellan. theorems a. geometrical applications. Diff. eq. of the sec. a. higher orders. Linear part. diff. equat. of the first ord. Ordin. diff. equat. of the sec. order. Contact transformations. Appendix.

Karpinski, Louis C., Benedict, Harry Y., & Calhoun, John W., Unified mathematics. — VIII + 522 pp. 8. 1918. Dol. 2: 80. Bd.

Numbers of algebra. Applicat. of alg. to arithmetic. Exponents a. logarithms. Graphical represent. of functions. The lin. a. quadrat. functions of one variable. Straight-line a. two-point formulas. Trig. funct. Tables a. applicat. Applicat. of trig. functions. Arithm. series a. arithm. interpolation. Geom. series a. applicat. to annuities. Binom. series a. applicat. Right triangles. The circle. Addition formulas. Trig. formulas for oblique lines. Solut. of triangles. The ellipse. The parabola. The hyperbola. Tangents a. normals to sec. degree curves. Applicat. of conic sections. Poles, polars, a. diameters. Alg. transformations a. substitut. Solut. of num. alg. equat. Wave motion. Laws of growth. Polar coördinates. Compl. numb. Solid analytic geometry: Points a. lines. Solid analytics: First degree equat. a. eq. in two var. Quadratic surf. Tables.

S. Hirzel.

Leipzig.

Planck, Max, Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper. Zum Gebrauch bei Vorträgen, sowie zum Selbstunterricht. Mit 12 Fig. — 193 pp. 8. 1919. M. 9: 50.

Einleit. Allg. Bewegungsgesetze eines stetig ausgedehnten Körpers: Kinematische Getze. Dynam. Gesetze. — Unendlich kleine Deformationen: Feste Körper. Allgemeines. Gleichgewichtszustände fester Körper. Schwingungsvorgänge in fest. Körpern. Schwingungsvorg. in Flüssigkeiten u. Gasen. — Endl. Deformationen: Allgem. Wirbelfreie Bewgungen. Wirbelbeweg. Reibung.

Ulrico Hoepli.

Milano.

Garuffa, E., L'Aviazione. Aeroplani-idrovolanti-eliche. Teoria. Calcolo. Costruzione. Manovre. Descrizione d. apparati. Pilotaggio. Misure e strumenti di bordo 2: a ed. Rif. e aument. con 893 incisioni. (Manuali Hoepli.) — XXIV + 955 pp. 8. 1919. L. 20.

L'aeroplano in gen. Nomenclatura d. sue parti. Studio gen. d. resist. dell'aria sulle superfici mob. e fisse, norm. ed oblique. L'aeroplano. Equaz. gen. Equaz. di equilib. Varie condiz. di funzionamento. Studio d. aeropl. col metodo d. polari Eiffel. L'equilib. d. aeropl. Movimenti in curva. Azioni d. vento sugli aeropl. Dai monoplani ai multipl. Norme gen. per compilare il progetto di un aeropl. Sistemi di comando appl. agli aeropl. Costruz. d. aeropl. Carrelli di atterramento. Prove stat. Montaggio d.

apparati. Prove di volo. Le eliche di propuls. La forza motrice negli aeropl. Descriz. d. princ. tipi di aeropl. Monopl. I biplani. I tripl. ed i multipl. in gen. Idrovolanti o idro-aeropl. Ortotteri ed elicotteri. Paracadute. Il pilotaggio d. aeropl. L'oceano atmosf. La velocità d. aeropl. Princ. strumenti a dispos. d. aviazione p. la condotta e. aeropl. e le loro applic. Brevetti p. piloti. Il presente e l'avvenire d. aeropl.

Loria, Gino, Metodi di geometria descrittiva. 2:a ed. riv. e migl. con 121 fig. (Manuali Hoepli). — XX + 353 pp. 8. 1919. L 6: —

Pref. Natura e scopo d. geom. descr. Convenzioni ed avvertenze. Strumenti concessi al geom. Metodo d. doppia projez. ortogon. (Met. di Monge). Metodo d. projez. centrale. Metodo d. paini quotati. Assonometria teorica. Fotogrammetria teorica.

Marcolongo, R., Il problema dei tre corpi. Da Newton (1686) ai nostri giorni. (Manuali Hoepli). — VIII + 168 pp. 8. 1919. L. 4: 50.

Lavori d. geometri d. secolo XVIII. Riduz d. equaz. differenz. all'ordine minimo. Problema d. n corpi. Casi particolari. Integrali algebrici ed unif. d. probl. d. n corpi. Soluzioni appross. per serie infinite, p. ser. trigonometr. Ricerche di Sundman. Il probl. ristretto d. tre corpi. Soluz. periodiche. Elenco d. autor. cit.

Pascal, Ernesto, Lezioni di calcolo infinitesimale. P. 1: Calcolo differenziale. 4:a ed. riv. (Manuali Hoepli). XII + 313 pp. 8. 1918. L. 4: 50. — P. 3: Calcolo delle variazioni e delle differenze finite. 2:a ed. XI + 325 pp. 8. 1918. L. 4: 50.

1. Funzioni reali di variab. reali. Derivate di una funz. Sviluppabilità in serie d. funz. Studio d. div. modi di variare di una funz. nelle vicinanze di un punto. Alc. applicaz. analit. Applicaz. geom. Principii di geom. diff.

Pincherle, S., Geometria metrica e trigonometria. 8: a ed. con 47 incis. (Manuali Hoepli). — VIII + 160 pp. 8. 1918. L. 3: —.

Introd. Le fig. rettilinee. Ciclometria. — Le fig. poliedriche. I corpi rotondi. — Le funzioni goniometr. La risoluzione d. triangoli.

Librairie scientif. Kündig.

Genève.

Turc, Albert, Introduction élémentaire à la géométrie Lobatschewskienne. Ouvrage posthume, publ. d'après les notes de l'auteur. — 170 pp. 8. 1914. Fr. 4:20.

Préf. L'espace lobatschewskien. La géométrie lobatschewsk. Des lignes trigonométriques hyperbol. Théorie de M. Gérard. Relat. fondament. entre l. côtés et l'un d. angles d'un triangle. Formules relat. aux triangles quelconques. Form. relat. aux triangles rectangles. Des parallèles et de l'ange de parallélisme. De l'horicycle et de l'unité nat. de longueur. De l'hypercycle. D. quadrilatères trirect. Constructions géom. élément. Limite de la géom. lobatschewsk. De la non existence de la similitude. D. aires planes. Limite d. aires planes. Surfaces d. corps ronds. Théorème s. l. intégrales corresp. aux volumes. Vol. d. corps ronds. Limites d. surf. et d. vol. d. corps ronds. Conclusion.

Maurice Lamertin.

Bruxelles.

LECAT, MAURICE, Pensées sur la science, la guerre, et sur des sujets très variés, glanées par M- L-. — VIII + 480 pp. 8. 1919. Fr. 32.

Universidad Nacional de La Plata.

La Plata (Rep. Argentina)

Universidad Nacional de La Plata. Publicaciones de la Facultad de ciencias fis., mat. y astr. Memoria, corresp. a 1918. No. 8 — 136 pp. 8. 1920.

Universidad Nacional de la Plata. Memoria gen. de la Facultad. Labor d. año transcurr. de 1918. Memorias parciales de l. profesores. Oct. asamblea gen. de profesores. Datos estadisticos.

Universidad Nacional de La Plata, Publicaciones de la Facultad de ciencias fisicas, matemáticas y astronómicas. Contribución al estudio de la ciencias fisicas y matemáticas. Ser. mat.-fis. Vol. II, entrega 5:a. 1919.

RAMÓN G. LOYARTE, El amortiguamiento en osciladores lineales. HUGO BROGGI, Sobre la integral $\int_0^x e^{u^2} du$. RICARDO GANS, Alg. probl. referentes a la teoria de particulas coloidales. TEÓFILO ISNARDI, Contribut. al estudio de las soluciones coloidales. R. GANS, La teoria del freno electromagnético. LEONOR SARLO VILLEGAS, Aparato de ultrafiltración según Gans. (Chaque communication est précédée d'un extrait en français).

Longmans Green & Co.

London.

BATEMAN, H., Differential equations. (Longmans' Modern Mathematical Series.) — XI + 306 pp. 8. 1918. 10 s. 6 d. Bd.

Diff. equat. a. their solut. Integrating factors. Transformations. Geom. applicat. Diff. equat. with partic. solutions of a specified type. Partial diff. equat. Total diff. equat. Partial diff. equat. of the sec. order. Integrat. in series. The solut. of linear diff. equat. by means of definite integrals. The mechanic. integrat. of diff. equat. Miscell. ex.

BURNSIDE, WILLIAM SNOW, & PANTON, ARTHUR WILLIAM, The theory of equations. With an introduction to the theory of binary algebraic forms. (Dublin University Press Series.) Vol. 1—2. Vol. 1. 8th ed. 1918. 8. XIV + 286 pp. 10 s. 6 d. — Vol. 2. 6th ed. 1916. 8. IX + 298 pp. 10 s. 6 d. Bd.

1. Introd. Gen. properties of polynomials. Gen. properties of equations. Relations betw. the roots a. coefficients of equat., with applicat. to symmetric functions of

the roots. Transform. of equations. Solut. of reciprocal a. binom. equat. Algebr. solut. of the cubic a. biquadratic. Prop. of the derived funct. Symm. functions of the roots. Limits of the roots of equat. Separation of the roots of equat. Solut. of numer. equat. Complex numb. a. the complex variable. Notes: Alg. solut. of equat. Solut. of numer. equat. The proposit. that every equat. has a root.

2. Determinants. Eliminat. Calcul. of symm. funct. — Seminvariants a. semicovariants. Covariants a. invariants. Covar. a. invar. of the quadratic, cubic a. quartic. Covar. a. invar. of combined forms. — The Tschirnhausen transf. Hermite's a. Sylvester's theorems. Miscell. theor. Geom. transformations. — Substitutions in gen. Multiple-val. funct. a. groups. The Galois resolv. The alg. solut. of equat. Notes: Determ. Combin. forms. The quintic a. its concomit. The sextic a. its concomit. Illustr. Determinat. of the unique tern. form.

Carslaw, H. S., The elements of non-euclidean plane geometry and trigonometry. (Longmans' Modern Math. Series.) With diagr. — XII + 179 pp. 8. 1916. 5 s. Bd.

The parallel postulate, a. the work of Saccheri, Legendre a. Gauss. The work of Bolyai, Lobatschewsky, a. Riemann, the found. of the non-euclid. geom. The hyperbol. plane geom. The hyperbol. plane trigonom. Measurements of length a. area, w. the aid of the infinitesim. calculus. The elliptic plane geom. The ellipt. trigonom. The consistency of the non-euclid. geom. a. the impossibility of proving the parallel postulate.

Rusell, Bertrand, Mysticism and logic and other essays. 3rd impr. — VI + 234 pp. 8. 1919. 7 s. 6 d. Bd.

Mysticism a. logic. The place of science in a liberal educat. A free man's worship. The study of mathemat. Mathemat. a. the metaphysicians. On scientif. method in philosophy. The ultimate constituents of matter. The relat. of sense-data to phys. On the not. of cause. Knowledge by acquaintance a. knowl. by descript.

Macmillan and Co, Ltd.

London.

Durell, Clement, V., Modern geometry. The straight line and circle. — X + 145 pp. 8. 1920. 6 sh.

Similar polygons. Homothetic circles a. centres of similitude. Pantograph. Areas. Constructions. — Ratio of triangles. Transversal property. Apollonius' circle. Ptolemy's theorem. — Notation. Circumcentre, Orthocentre, centroid, incentre, excentres. Nine-point circle. The Euler line. Properties of O, I, H. — Concurrency a. collinearity. Vector geometry a. statical applications. Harmonic ranges a. pencils. The quadrangle a. quadrilateral. Orthogonal circles. Poles a. polars. Inversion. Coaxal circles. Index.

Muir, Thomas, The theory of determinants in the historical order of development. Vol. 3: The period 1861 to 1880. — XXVI + 503 pp. 8. 1920. 35 sh. Bd.

Determinants in general, from 1860 to 1880. Determin. a. linear equat., from 1861 to 1878. Axisymmetric determin., from 1846 to 1879. Symmetric determin. that are not axisymm., from 1862 to 1879. Alternants, fr. 1860 to 1879. Compound determin., fr. 1862 to 1880. Recurrents, fr. 1858 to 1879. Wronskians, fr. 1862 to 1874. Jacobians, fr. 1862 to 1877. Skew determin. a. Pfaffians, fr. 1861 to 1880. Orthogonants, fr. 1855 to 1879. Persymm. determin., fr. 1836 to 1879. Bigradients, fr. 1859 to 1880. Hessians, fr. 1862 to 1879. Circulants, fr. 1861 to 1880. Continuants, fr. 1850 to 1880. Multilineants, up to 1877. Cubic a. n- dimension. determin., up to 1880. Sketch a. bibliograph. list. Bordered determ., up to 1880. Determ. whose elements are combinatory numbers, up to 1880. Zero-axial determin., up to 1888. The less common special forms, fr. 1839 to 1880. Alphabet. list of auth. whose writings are reported on.

Johannes Müller.

Amsterdam.

Brouwer, L. E. J., Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. T. 1: Allgemeine Mengenlehre. (Verhand. d. K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Erste Sect., Deel XII, No. 5) — 43 pp. 8 1918. — T. 2: Theorie der Punktmengen. (Verhand. Akad. Amsterdam, Erste Sect., Deel XII, No. 7.) — 33 pp. 8. 1919. M. 1:60.

P. Noordhoff.

Groningen.

Barrau, J. A., Analytische meetkunde. Deel 1: Het platte vlak. — XI + 408 pp. 8. 1918. Fl. 10:20. (Noordhoff's verzameling v. wiskund. werken).

De coördinaten en hare transformaties: Het stelkundige vlak. Het meetkund. vlak. Projectiviteit en collineatie. — Vereischte stelkund. voorkennis. De cirkel en de imag. elementen. De involuties v. d. tweed. graad. Pool en poollijn. De kromme v. d. tweed. graad in collineatie m. d. cirkel. — Coördinaten in het algem. Meetkund. plaatsen. Algebr. krommen. — Pooleigensch., classificatie. De verzameling d. kegelsneden van h. vlak. Eigensch. v. kegelsneden, afgeleid m. behulp v. lineaire verzamelingen. De figuur v. twee kegelsneden. Eigensch. v. bundels en scharen. Netten en weefsels. Hoogere verzamel. De kegelsnede als puntenreeks en raaklijnenbundel. — De kegelsnede als grondslag v. Niet-Euclid. maatbepaling. — De λ- matrix. Classific. v. bundels en scharen; collineaties en correlaties. — De meetkunde als Invariantentheorie.

Gonggrijp, B., Nieuwe Methoden op het gebied der algebra'ische en transcendente vergelijkingen. — 103 pp. 8. 1917. Fl. 2:70.

Oplossing van Hoogere-Machts-Vergelijkingen d. middel van Kettingbreuken. Algem. Benaderings-Methode v. de reëele en complexe wortels v. (numericke) algebraïsche en transcend. vergelijkingen. Voortzetting d. Benadering. Uitbreiding d. methode v. Newton. De Kepler'sche Vergelijking. Rechtstreeksche Bewijzen v. de Grondstelling v. d. Theorie d. Algebraïsche Vergelijkingen. Nieuwe rechtstreeksche oplossing v. de Cubische Vergelijking. Onderzoek v. de rechtstreeksche oplosbaarheid van Hoogere-Machts-Vergelijkingen d. middel v. Determinanten. — Grafiek v. de Sinusoide ter (benaderde) graphische oplossing d. Kepler'sche Vergelijk. Gewijzige Sinusoide. Drie systemen rechte lijnen.

Mannoury, G., Over de sociale betekenis van de wiskundige denkvorm. Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van buitengewoon hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam op Maandag 8 Oktober 1917. — 23 pp. 8. 1917. Fl. 0:75.

Schuh, Fred., Leerboek der theoretische rekenkunde. Deel 1: Natuurlijke getallen en cardinaalgetallen. Het rekenen in talstelses en met positieve en negat. getallen. Binomium v. Newton en de stellingen v. Fermat en Euler. Onbepaalde vergelijkingen en kenmerken v. deelbaarheid. Ontbinding d. faculteiten. — 21 pp. 8. 1919. Fl. 10:20 geb.

Inleid. Natuurlijke getallen in verb. met het tellen. Optelling v. nat. getallen. Aftrekking v. nat. getallen. Vermenigvuldiging v. nat. getallen. Machtsverheffing v. nat. get. Deeling v. nat. get. Verdere eigenschappen betr. deelbaarheid. Oneindige hoeveelheden en cardinaalgetallen. — De rekenregels m. het getal nul. Permutaties en combinaties. Binomium v. Newton en toepasingen daarvan. Eigensch. betr. de deelers v. een getal. Talstelsels. Het rekenen in talstelsels. — Stelsels getallen, waarbij de aftrekking onbeperkt mogelijk is. Het stelsels d. geheele getallen. Aftrekking m. geheele get. And. invoeringswijzen d. negat. getallen. Gebruik v. de neg. get. — Onbepaalde vergelijk. Kenmerken v. deelbaarheid. Deelbaarh. d. faculteiten. Not. Lijst d. taf. Reg. Corr. et add.

Stieltjes, Thomas Jan, Oeuvres complètes. Publ. par les soins de la Société Mathématique d'Amsterdam. Tome 2. — IV + 603 pp. 4. 1918. Fl. 30: —

Sur le nombre d. pôles à la surf. d'un corps magnét. (Note, prés. par M. Hermite). Recherches sur quelq. séries semi-convergentes. (Thèse de doct.) Note s. un développem. de l'intégrale $\int_0^a e^{x^2}\,dx$. Sur l. séries qui procèdent suiv. l. puissances d'une variable. (Note prés. par M. Hermite). S. l. racines de l'équat. $X_n = 0$. Ex. d'une fonct. qui n'existe qu'à l'intérieur d'un cercle. Note s. la multiplicat. de deux séries. Table d. valeurs d. sommes $S_k = \sum_1^a n^{-k}$. S. l. max. et min. d'une fonct. étendue s. une

surf. fermée. S. une généralisat. de la formule d. accroissements finis. Note s. l'intégrale $\int_a^b f(x)\, G(x)\, dx$. S. l'équat. d'Euler. S. la réduct. de la différentielle ellipt. à la forme normale. (Note, prés. par M. Darboux). S. l. transformat. lin. de la différent. ellipt. $\frac{dx}{\sqrt{X}}$. S. le dével. de l'expression

$$\{R^2 - 2\,R\,r[\cos u \cos u' \cos (x - x') + \sin u \sin u' \cos (y - y')] + r^2\}^{-1}.$$

S. l. dérivées de séc x. (Note prés. p. M. Hermite). S. un développ. en fraction continue. (Note prés. p. M. Hermite). S. l. réduction en fract. continue d'une série procédant suiv. l. puissances descend. d'une variable. Extrait d'une lettre adr. à M. Hermite. S. un passage de la théorie analyt. de la chaleur. S. le développ. de log. $\Gamma(a)$. S. la fonct. exponentielle. (Extr. d'une lettre adr. à M. Hermite). S. la valeur asymptot. d. polyn. de Legendre. S. l. polynômes de Legendre. S. l. racines de la fonct. sphér. de sec. espèce. Note s. l'intégrale $\int_0^x e^{-u^2}\, du$. S. la théorie d. nombres. S. quelq. intégrales déf. et leur développ. en fract. continues. Note s. quelq. fract. continues. S. une applicat. d. fractions contin. (Note prés. p. M. Picard). Recherches s. l. fractions continues. (Mém. prés. p. M. Hermite). (Extr. p. l'aut.) Recherches s. l. fract. continues. S. la loi de réciprocité de Legendre. (Article réd. d'après un manuscrit inédit). Étude s. l'intégrale $\int_0^a x^{k-1} e^x\, dx$. (Art. réd. d'après un ms. inédit). S. cert. inégalités dues à M. P. Tchebycheff. (Art. réd. d'après un ms. inédit). Notes.

DE VRIES, H., »De vierde dimensie«, eene inleiding tot de vergelijkende studie der verschillende meetkunden. — XII + 142 pp. 8. 1915. Fl. 3: 90. geb. (Noordhoff's verzameling v. wiskundige werken.)

Voorw. Inleid. De Euclidische meerdimens. meetkunde. Niet-Euclidische meetkunde.

D. van Nostrand Company.

New York.

THOMAS, ROBERT GIBBES, Applied calculus. Principles and applications, essentials for students and engineers. 45 exercices. 166 Fig. — 490 pp. 8. 1919. Dol. 3: —. Bd.

1. Diff. calculus: Introd. Functions. Differentials. Rates. Differentiation. Derivatives. Limits. Algebraic funct. Log. a. exponential funct. Trigonometric funct. Inverse trig. funct. Successive differentiation. Acceleration. Curvi-linear motion. Geom. a. mechan. application. Max. a. min. Inflexion points. Curvature. Evolutes. Change of the indep. variable. Functions of two a. more var. —

2. Integral calculus: Integration. Standards forms. Def. integrals. Areas. Integral curves. Lengths of curves. Curve of a flex. cord. Integrat. as the limit of a sum. Surf. a. vol. Succ. integration. Mult. integrals. Surf. a. vol. Mom. of inertia. Center of gravity. Applicat. Pressure. Stress. Attraction. Inf. series. Integrat. by series. Taylor's theorem. Expansion of funct. Indet. forms. Diff. equations. Applicat. Central forces.

Open Court Publishing Company.

Chicago.

Shaw, James Byrnie, Lectures on the philosophy of mathematics. — VI + 206 pp. 8. 1918. Dol. 1: 50. Bd.

Meaning of the philosophy of math. Number a. the arithmetizat. of math. Arrangements a. math. tactic. Logistic a. the reduction of math. to logic. Operators a. the reduct. of math. to algorithms. Hypernumbers a. the reduct. of math. to algebra. Processes a. the reduct. of math. transmutations. Inferences a. the reduct. of math. to systems of logic. Form as a central principle. Theory of invariants. Mathematics as the theory of funct. Theory of equat. Sources of math. reality. The methods of math. Validity of math. Central principles of math. Index.

Rignano, Eugenio, Essays in scientific synthesis. Transl. by J. W. Greenstreet. — 254 pp. 8. 1918. Dol. 2: —. Bd.

Pref. to the English ed. The role of the theorist in the sciences of biology a. sociology. The synthet. value of the evolution theory. Biolog. memory in energetics. On the mnemic origin a. nature of the affective tendencies. What is consciousness? The religious phenomenon. Historic materialism. Socialism. Ind. of auth. cited. Ind. of subj.

Casa Editrice V. Porta.

Piacenza.

Caminati, Carlo e Pietro, Nuovo manuale italiano logaritmico-trigonometrico con sette o dieci decimali. Fasc. 1: 61 pp. 8. 1918. L. 3: 50 (Aumento 25 %). — Fasc. 2: 35 pp. 8. 1919. L. 3: 50.

1. Teoria elementare dei logaritmi. Teoria e tavole per il calcolo dei logaritmi volgari, con sette decimali, di qualunque numero dato minore di 10^8. Teoria e tavole par il calcolo del numero corrispond. ad un logaritmo volg. dato, con sette decimali.

2. Tavola di logaritmi delle funzioni circolari a sette decimali, per uso d. scuole secondarie.

Princeton University Press.

Princeton, U. S. A.

Volterra, Vito, The theory of permutable functions. Lectures delivered at Princeton University October, 1912. (Louis Clark Vanuxem Foundation). — 66 pp. 8. 1915. 1 Dol. Bd.

Rivingtons, Publishers.

London.

HEATH, R. S., Solid geometry, including the mensuration of surfaces and solids. 4th ed. — 123 pp. 8. 1919. 4 s. Bd.

Lines perpend. to planes. Parallel lines. Parall. planes. Lines parall. to planes. Dihedral angles. Lines in space. Solid angles. — Prisms a. parallelepipeds. Pyramids. Sim. polyhedra. The reg. polyhedra. — The cylinder. The cone. The sphere. Spher. geom. Polar triangles. Equality of spher. triang. Areas of spher. surf. Vol. of a sphere. Miscell. ex. Append. Furth. miscel. exercices.

MAYO, C. H. P., Elementary calculus. — XX + 345 + XXXIX pp. 8. 1919. 10 s. Bd.

Definit. Limits. Different. coefficients. The use of a diff. coeff. Max. a. min. values. The function. notation. A funct. of a function. The diff. coeff. of log x and e^x. Circul. measure of an angle. Polar coordinates. Second a. higher diff. coeff. Furth. considerat. of max. a. min. values. Small errors a. approximat. The differential of an arc of a curve. Curve tracing. Taylor's theor. The integral calc. Integral as the limit of a sum. Applicat. of the integr. calc. to phys. problems. Reduct. of integr. to stand. forms. Part. fract. Changing the var. Integrat. by parts. Illustr. of the meth. of integrat. The length of an arc of a curve. Solids of revolut. Successive integr. Furth. appl. of the int. calc. to phys. probl. Diff. equat. Diff. coeff. of a funct. of two indep. variables. Asymptotes. Sing. points. Examples. Answers.

H. L. Schlapp.

Darmstadt.

HEIL, JOHAN, Das letzte Fermatsche Theorem und seine Lösung. Mit einer graphischen Darstellung. 2:e verb. Aufl. (Nachträge zu der in englischer Sprache demnächst in Pittsburgh erscheinenden III. Aufl.) — 28 pp. 8. 1918.

Vorw. Kurzer Abriss d. Entstehungsgeschichte. Einleitung. Das parabolische Gesetz d. pythagoräischen Zahlen. (Prämisse). Hauptbeweis. Biographie des Entdeckers. Schlussbemerk.

F. Schuler.

Chur (Schweiz).

MERZ, KARL, Parallelflächen und Centralfläche eines besonderen Ellipsoides und die Steinersche Fläche. Beispiel einer quadratischen Transformation. — 54 pp. 3. Fig. Taf. 8. 1914.

MERZ, K., Zur Erkenntnistheorie über Raum und Zahl. Aus historischem der Steinerschen Fläche. 48 pp. 8. 1917. Separatabdr. aus d. Jahresbericht d. Naturforsch. Ges. Graubündens.

MERZ, K., Zur Erkenntnis-Theorie über Raum und Zahl. Vortrag, geh. 6. Okt. 1917 im Verein schweizerischer Mathematiklehrer. — 16 pp. 8. Separatabdr. aus der Schweiz. Päd. Zeitschrift, 1918, H. 1/2.

MERZ, K., Anschauung und Begriff in den Naturwissenschaften. 25 pp. 8. 1918. Separatabdruck aus d. 58. Jahresbericht d. Naturforsch. Gesellchaft Graubündens.

Julius Springer.

Berlin.

BECK, H., Koordinaten-Geometrie. Bd 1: Die Ebene. — 432 pp. 8. 1919. M. 38: 75 geb.

FRAENKEL, ADOLF, Einleitung in die Mengenlehre. Eine gemeinverständl. Einführung in das Reich d. unendl. Grössen. — 155 pp. 8. 1919. M. 12: 50.

HURWITZ, ADOLF, Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen. — 74 pp. 8. 1919. M. 8: 80.

LUDWIG, W., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. T. 1: Das rechtwinklige Zweitafelsystem. — 135 pp. 8. 1919. M. 10: —.

RIEMANN, B., Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Neu hrsg. und erläutert von H. WEYL. — 47 pp. 8. 1919. M. 7: —.

SCHLICK, MORITZ, Allgemeine Erkenntnislehre. (Naturw. Monographien u. Lehrbücher hrsg. von ARNOLD BERLINER & AUGUST PÜTTER. 1.) — 346 pp. 8. 1918. M. 25: 50 geb.

SCHLICK, MORITZ, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Zur Einführung in das Verständnis der Relativitäts- und Gravitationstheorie. 2., stark verm. Aufl. — 85 pp. 8. M. 6: 50.

B. G. Teubner.

Leipzig.

DOEHLEMANN, KARL, Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. 2:e verb. Aufl. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd 510.) — 108 pp. 8. 1919. Kart. M. 2: —; geb. M. 2: 65. Hierzu Teuerungszuschläge.

Vorw. Das persp. Bild. Der gerade Riss. Die Schnittmethode. Der Satz v. Fluchtpunkt. Andere Bestimm. es. persp. Bildes. Darstell. es. möglichst einfach geleg. Quadrates d. Grundebene. Anw. dieser Konstrukt. Tiefenmasstab. Darst. beliebiger geradlin. Fig. d. Grundebene. Darst. einfacher Körper, die sich auf d. Grundeb. erheben. Schiefe Linien im Raume. Der photogr. Apparat. Die Wahl d. Distantz. Unzugängl. Dist.- u. Fluchtpunkte. Gleichzeit. Anw. d. verschied. Methoden. Die Darst. d. Kreises. Einf. Schattenkonstrukt. Künstl. Freiheiten. Literat. Reg.

Hegemann, Ernst, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. (Aus Nat. u. Geisteswelt, Bd 609.) — 127 pp. 8. 1919. Kart. M. 2: —; geb. 2: 65. Hierzu Teuerungszuschläge.

Einl. Fehlertheorie. Bestimm. er. Grösse durch mehrfache Messung. Die vorlieg. Fehler rühren von Messungsdifferenzen her. Ausgleich. vermittelnder Beobacht. Ausgleich. bedingter Beobacht. Fehlergesetz u. Ableit. d. Methode d. kleinsten Quadrate.

Lichtenstein, L., Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Sonderabdr. aus Encyklopädie d. math. Wissenschaften. II, 3. H. 3.

Lietzmann, W., Der Pythagoreische Lehrsatz. Mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. 2:e durchges. u. verm. Auflage. (Math.-phys. Bibliothek, Bd 3). — IV + 69 pp. 8. 1917. M. 1: 40. Hierzu Teuerungszuschläge.

Einiges aus d. Geschichte des pythag. Lehrsatzes. Zerlegungsbeweise. Der pyth. Lehrsatz im Euklid. System. Pyth. Lehrsatz u. Ähnlichkeitslehre. Funktionsbetracht. Pythag. Zahlen. Das Fermatsche Probl. Einiges üb. die Literatur zum pyth. Lehrsatz.

Luckey, P., Einführung in die Nomographie. T. 2: Die Zeichnung als Rechenmaschine. (Math.-phys. Bibliothek, Bd. 37.) — 63 pp. 8. 1920. M. 1: 40. Hierzu Teuerungszuschläge.

Funktionsleitern. Netztafeln. Graph. Auswärtung auf funktionalen Papieren. Eine Fluchtentafel. Die Fluchtentafeln aus drei parall. Leitern. Andere Lagen v. drei geradlin. Leitern. Zwei Leitern geradlin. u. parallel, die dritte krummlin. Verschiedenerlei and. Nomogramme. Setzt sich die Nomographie durch?

Mendelssohn, Walter, Einführung in die Mathematik. (Aus Natur u. Geisteswelt, Bd 503.) — 113 pp. 8. 1918. Kart. M. 2: —; geb. 2: 65. Hierzu Teuerungszuschläge.

Vorw. Wert d. Math. Wissenschaft u. Leben. Die Zahlen. Die Geometrie. Die Schlussweisen. Der Funktionsbegriff. Der Grenzbegr. Die Reihen. Die Mathemat. als Wissenschaft. Das Erlernen d. Math.

Poske, F., & von Hanstein, R., Der naturwissenschaftliche Unterricht an den höheren Schulen. (Schriften d. Deut. Ausschusses f. d. math. u. naturw. Unterricht. 2. Folge. H. 5) — 33 pp. 8. 1918. M. 1: 40. Hierzu Teuerungszuschläge.

Schürer, Fritz, Integraldifferenzen- und Differentialdifferenzengleichungen. (Preisschriften gekrönt und hrsg. von d. Fürstl. Jablonowskischen Gesell. zu Leipzig. 46.) — 69 pp. 4. 1919. M. 7: 20. (Hierzu Teuerungszuschläge).

Friedr. Vieweg & Sohn.

Braunschweig.

Einstein, A., Ueber die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. (Gemeinverständlich). 6:e Aufl. (Sammlung Vieweg. H. 38.) — IV + 83 pp. 8. 1920. Geh. M. 2: 80 + 60 % Teuerungsaufschlag.

Laue, M. von, Die Relativitätstheorie. Bd 1: Das Relativitätsprinzip der Lorentztransformation. 3:e vermehrte Aufl. Mit 24 Abb. (Die Wissenschaft, hrsg. von Prof. Dr. Eilhard Wiedemann, Bd 38.) — XIII + 292 pp. 8. 1919. M. 9: — geh. — M. 11:40 geb. + 60 % Teuerungsaufschlag.

Die Problemstellung: Das räumliche Bewegungssystem u. d. Zeitmass. Die relativitätsprinzipe d. klassischen Mechanik u. d. Elektrodynamik. Die empirischen Grundlagen f. d. Elektrodynamik bewegter Körper. — Die älteren Theorien d. Elektrodynamik bewegter Körper: Historische Uebersicht. Die Theorie von Heinrich Hertz. Die Elektronentheorie. — Die Relativitätstheorie, kinemat. Teil: Die Lorentz-Transformation. Die Einsteinsche Kinematik. Minkowskis geometr. Interpretation d. Lorentz-Transformat. Die Lorentz-Transformat. als imaginäre Drehung. — Weltvektoren u.-tensoren: Vierer- u. Sechservektoren. Die algebraischen Vektoroperationen. Vektorielle Differentialoperat. Welttensoren. — Die Elektrodynamik d. leeren Raumes nach d. Relativitätsprinzip: Die Transformation d. elektromagnet. Feldes im leeren Raume. Die Transformat. d. Kraftdichte, Energie- u. Impulsatz. Anwendungen. Gleichförm. Bewegung geladener Körper. Die Theorie d. Trouton-Noble'schen Versuches. Ungleichförmig bewegte Ladungsträger. Das Elektron u. sein Feld bei d. Hyperbelwegung. — Die Minkowskische Elektrodynamik d. ponderablen Körper: Die Transformation d. Feldgleichungen I bis IV. Die Transform. d. Gleichungen V bis VII. Anwend. Energie u. ponderomotorische Kraft. Der Strahlungsdruck. — Dynamik: Die Dynamik d. Massenpunktes. Die Grundlagen d. Dyn. d. Kontinua. Die Tensortransform. f. d. mechan. Energie, den Impuls u. die Spannungen. Die absolut. u. d. relat. (elastichen) Spannungen. Beispiele f. d. quasistationäre, adiabatische, isopieistiche Dynamik. Die Erhaltung d. Drehimpulses. Das vollst. statische Syst. Thermodynamik. Die Dyn. d. Hohlraumstrahlung. Hydrodynamik. Flüssigkeiten geringster Zusammendrückbarkeit. Rückblicke u. Ausblicke. — Anh.: Geom. Bezeichnungen. Vektor u. Tensorbezeichn. Die verschied. Arten d. Zeitdifferentiation. Bezeichn. u. Massystem d. physikal. Grössen.

Valentiner, Siegfried, Die Grundlagen der Quanthentheorie in elementarer Darstellung. 2:e erweit. Aufl. (Sammlung Vieweg. H. 15.) — X + 92 pp. 8. 1919. Geh. M. 3: 60 + 60 % Teuerungsaufschlag.

Historisches. Der Weg zum Planck-schen Strahlungsgesetz. Prüfung. d. Gesetzes a. d. Erfahrung. Energieaustausch zwischen Oszillatoren, Hohlraumstrahlung u. Atom. Die Gleichung Einsteins. Erweiterung d. Quantentheorie. Quantentheorie d. Spektrallinien.

Schlömilch, O., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Grosse Ausg. mit einem Anhang chemischer und physikalischer Konstanten revid. von Prof. D:r Karl Scheel. 7:te Aufl. — XXVI + 186 pp. 8. Geb. M. 3: 20 + 60 % Teuerungsaufschlag.

Die Briggschen Logarithmen d. natürl. Zahlen von 1 bis 10909. Tafel z. Verwandl. d. Briggschen Logarithmen in natürliche. Briggsche u. natürl. Log. oft vorkomm. Zahlen. Dimensionen d. Erdsphäroids in geogr. Meilen, von denen 15 auf einen Grad d. Äquators gehen, usw. Sinuslog. f. d. ersten 10 Sekunden. Länge d. Kreisbögen

f. d. einzelnen Grade, Minuten u. Sekunden f. d. Halbmesser Eins. Die natürl. goniometr. Funktionen d. Winkel v. 10 zu 10 Minuten. Reduktion d. Tang. auf Tang. d. halben Winkel. Die Log. d. goniometr. Funktionen d. Winkel v. Min. zu Min. Reziproke Werte. Quadratwurzeln, Kubikwurz. u. nat. Log. d. Zahlen von 1 bis 100. Ellipsenquadranten. Sterblichkeitstafel. Physikal. u. chem. Konstanten.

Vereinigung Wissenschaftlicher Verleger.

Berlin & Leipzig.

BACHMANN, PAUL, Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung. — VIII + 160 pp. 8. 1919. Kr. 6: —

Fermats Theorem. Die descente infinie. Beisp. v. Fermat; nach Legendres Darst. Unmöglichk. d. Gleich. $x^4 \pm y^4 = z^2$. Folger. Unmöglichk. d. Gleich. $z^3 + 1 = q^2$. Die Gl. $x^{2n} + y^{2n} = z^2$. Redukt. d. Ferm. Theorems auf die Gl. $x^p + y^p + z^p = 0$. Abelsche Form. Gemeins. Grundlage d. Beweise für $p = 3$ u. $p = 5$. Unmögl. d. Gl. $x^3 + y^3 = z^3$, nach Euler u. Legendre. Unmögl. d. Gl. $x^3 + y^3 = 2z^3$ u. Folger. Die Gl. $x^3 + y^3 = Az^3$, nach Legendre. Unmögl. d. Gl. $x^5 + y^5 = z^5$, nach Dirichlet. Die Gl. $x^5 + y^5 = Az^5$. Die Gl. $x^{14} + y^{14} = z^{14}$. Neue Grundl. d. Untersuch. Formeln f. $(x + y + z)^p - x^p - y^p - z^p$ u. $(x + y)^p - x^p - y^p$. Bem. v. Cauchy. Ein 2. Ausdr. f. $(x + y)^p - x^p - y^p$. And. Ausdr. f. $(x + y + x)^p - x^p - y^p - z^p$, u. Folger. Die Ausdr. $y^2 + yz + z^2$, $y^2 - yz$ u. ihre analog gebild., ihr grösster gem. Teiler. Die Wendtschen Formeln, insbes. $u^p + u'^p + u''^p = 2puu'u''$. P. Form. f. d. Rest v. $\frac{2^p - 2}{p}$, $\frac{3^p - 3}{p}$ (mod. p). Neue Grundl. d. Betracht. Die Kongruenz $x^p + y^p + z^p \equiv 0$ (mod. p), u. Folger. Beding. f. die Lösbark. d. Gl. $x^p + y^p + z^p = 0$ im Falle I. Die Kongr. $x^p + y^p + z^p \equiv 0$ (mod. $\pi = 2hp + 1$). Legendres Bed. f. d. Lösbark. d. Gl. $x^p + y^p + z^p = 0$ im Falle I. And. Formulier. durch Wendt. Bed. f. d. Lösbark. d. Gl. im Falle II, nach Wendt. Sätze v. Legendre üb. ihre Unm. im Falle I. Dicksons bez. Untersuch. Dicksons Beweis, dass d. Anzahl d. Primzahlen $\pi = 2hp + 1$, f. welche $x^p + y^p + z^p \equiv 0$ (mod. π) in Zahlen, prim zu π, unmögl. ist, nur endl. ist. Beweis v. J. Schur, Hilfssats aus d. Kombinationslehre. Hurwitz' bez. Untersuch. d. allgem. Kongruenz $ax^p + by^p + cz^p \equiv 0$ (mod. π). Kummers neue Behandl. u. Verallg. d. Fermatproblems. Grundbetracht. üb. Zahlenkörper u. ihre Ideale. Gauss' Bew. f. d. Unmögl. v. $x^3 + y^3 + z^3 = 0$. Hilfsbetracht. aus d. Theorie d. Kreisteilungskörpers. Kummers Bew. d. verallg. Ferm. Theorems f. reg. Primzahlexpon. Herleit. d. Kummerschen Kongruenzbed. f. d. Ferm. Gl. im Falle I. Die Funktionen $P_i(xyy)$ od. $P_i(t)$. Sätze v. Mirimanoff u. Kummer. Mirimanoffs Funkt. $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$. Seine Umform. d. Kummersch. Kongruenzbed. Das Wieferichsche Kriter. $\frac{2^p - 2}{p} \equiv 0$ (mod. p); bez. Bem. v. Mirimanoff u. Frobenius. Ein Satz üb. d. Wurzeln v. $\varphi_{l-1}(t) = 0$. Mirimanoffs Verallgem. d. Untersuch. v. Wieferich. Vereinf. u. Forts. d. Untersuch. v. Mirimanoff durch Frobenius. Weit. Kriter. v. Frobenius u. Vandiver. Neue Begr. solcher Kriter. d. Furtwängler. Furtwänglers neue Formul. d. Kummersch. Kongruenzbed. Unters. v. Bernstein u. von Hecke. Maillets Verallgem. d. Fermatprobl. Rückbl. u. Ausschau. Fueters Problemstell. Bem.

Dingler, Hugo, Die Grundlagen der Physik. Synthetische Prinzipien der mathematischen Naturphilosophie. — XV + 157 pp. 8. 1919. M. 11: — + 25 % T.

Erkenntnistheoretische u. logische Grundlagen: Die Tageswelt. Das Zweckprinzip. Die Bestimmungslehre (synthetische Logik). Synthet. Mathematik. — Die Grundlagen d. Physik: Die neue Methode. Die Synthese. Die Bezugssysteme. Die Mechanik. — Anwendungen: Weitere Konsequenzen. Die Metaphysik. Anwendungen d. Exhaustionstheorie. Die Geschichte.

Doehlemann, Karl, Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. 4:e verb. Aufl. Mit 91 Fig. (Sammlung Göschen. 72.) — 182 pp. 8. 1918. Kr. 0: 95.

Die Perspekt. Beziehung d. Grundgebilde. Harmon. Gebilde. Die Projekt. Beziehung d. einförm. Grundgebilde. Die Projekt. Bezieh. auf d. gleichen Träger. Die Kegelschnitte als Erzeugn. projekt. Grundgeb. erster Stufe. Die Polarentheorie d. Kegelschnitte. Die Kegel- u. Regel-Flächen zweit. Ordn. als Erzeugn. projekt. Grundgeb. Reg.

Haas, Arthur, Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Bd 1. Mit 50 Abb. — VII + 384 pp. 8. 1919. Kr. 15: 20, geb.

Einleit. — Das Beharrungsprinz. u. d. Kraftbegriff. Das zweite Newtonsche Bewegungsgesetz. Die ungleichförm. geradlin. Beweg. Die rechtwinkl. Auflös. d. krummlin. Beweg. Die nat. Bewegungsgleich. Die bewegungsgl. in ebenen Polarkoordin. Die Ableit. d. Newtonschen Gravitationsprinz. aus d. Keplerschen Ges. d. Planetenbeweg. Flächengeschwindigkeit u. stat. Mom. Die lebend. Kraft u. das Potential. Die Vektorgrössen. Die Grundreg. d. Vektorrechn. Die mechan. Grundformeln in vekt. Schreibweise. — Der Satz v. Massenmittelpkt. Der Satz v. d. Erhalt. d. gesamten Drehimpulses. Der Satz v. d. Erhalt. d. mech. Energie. — Das Prinz. d. virt. Verrückungen. Das Prinz. v. D'Alembert u. die allg. Bewegungsformel v. Lagrange. Die Gewinn. d. partikul. Bewegungsgleich. aus d. allg. Bewegungsformel v. Lagrange. Das Hamiltonsche Prinz. Die generalis. Bewegungsgleich. v. Lagrange. — Die Geschwindigkeit d. Relativbew. Die Beschleunig. d. Relativbew. Das mechan. Relativitätsprinz. — Das Bild d. starr. Körpers. Translat. u. Rotat. es. starr. Körpers. Die Zusammensetz. d. an einem starr. Körper angreif. Kräfte. Die Rotat. um eine feste Achse. Das Trägheitsmom. als Tensorgrösse. Die Eulerschen Gleich. — Das Bild d. deform. Körpers. Das Vektorfeld d. Geschwindigk. Strömung, Wirbel u. Dilatation. Der Satz v. Gauss. Der Satz v. Stokes. Der Satz v. Green. Der Spannungszustand in einem deformierb. Körper. Die hydrodyn. Grundgleich. — Das Gesetz v. Coulomb. Das elektrostat. Feld. Das magnetostat. Feld. Der elektr. Strom. Das Gesetz v. Biot u. Savart u. die erste Hauptgl. d. elektromagnet. Feldes. Die ponderomotor. Wirk. zw. elektr. Strömen. Die Induktionsströme u. die zweite Hauptgl. d. elektromagnet. Feldes. Der Einfl. d. Zwischenstoffes auf d. elektr. u. magnet. Erscheinungen. Die Theorie d. dielektr. Polarisation. Die Grundlagen d. Maxwellschen Theorie. Der Satz v. Poynting. Die Maxwellsche Gleich. f. homog. quellenfreie Isolatoren. — Die lin. harmon. Schwing. Die Diff. gleich. d. harmon. Schwing. Die ellipt. Schwing. Die gedämpfte Schwing.

Die erzwung. Schwing. Die ebene Welle. Die Kugelwelle. — Die Wellennatur d. Lichtes. Die Interferenz d. Lichtes. Die Transversalität d. Lichtschwing. Die elektromagn. Wellen. u. die elektr. Natur. d. Lichtes. Das Reflex.- u. d. Brechungsgesetz. Die Gleich. v. Fresnel. Die Polarisat. durch Reflex. u. Brechung. Die tot. Reflexion. Das opt. Verhalten d. Metalle. Die Ausbreit. d. Lichtes in Kristallen. — Das elektrolyt. Grundgesetz v. Faraday. Die Grundgleich. d. Elektronentheorie. Die Kathodenstrahlen. Die elektromagn. Masse. Der Lichtdruck. Die Dispers. d. Lichtes. Die Grundlag d. Magnetooptik. Die Molekularströme. Die Röntgenstrahlen. Die Radioaktivität. Die elektr. Theorie d. Materie. Anhang.

Jäger, Gustav, Theoretische Physik. 1. Mechanik u. Akustik. Mit 24 Fig. 5:e verb. Aufl. (Sammlung Göschen 76.) — 167 pp. 8. 1919. Kr. 0: 95.

Mechanik es. Masspunkts. Mechan. starrer Körper. Mechan. nichtstarrer Punktsyst. Elastizitätstheorie. Hydromechan. Akustik.

Loewy, Alfred, Lehrbuch der Algebra. T. 1: Grundlagen der Arithmetik. — VI + 398 pp. 8. 1915. Kr. 5: 60 + 25 % geb.

Die ganz. posit. Zahlen u. ihre Addit. Die vollst. Zahlenreihe. Die Add. belieb. ganzer Zahlen. Rechnungsreg. f. d. Add. belieb. ganzer Zahlen. Die Multipl. ganz. posit. Zahlen u. die hierf. gült. Rechnungsreg. Relation, Äquival. u. Ordnungsfähigk. d. Elem. es. Syst. Verknüpfbares Syst. Gruppe. Definit. es. Körpers u. einige f. ihn. gült. Sätze. Die Multiplikat. d. ganz. neg. Zahlen. D. Körper d. rational. Zahlen. Unabhängigk. d. zehn. Körperpostulate. Die Ordnungsfähigk. d. rat. Zahlen. Weit. Eigensch. d. rat. Zahlen. — Erweit. d. Syst. d. rat. Zahlen zum Syst. aller reeller Zahlen. Vier Hilfssätze z. Bild. reeller Zahlen. Gleichheit, Addit. u. Multipl. im Geb. d. reell. Zahlen. Einteil. d. reell. Zahlen. in posit. u. neg. Die reell. Zahlen bilden en. Körper. Multipl. neg. Zahlen. Die Ordnungsfähigk. d. reell. Zahlen. Vergl. er. reell. Zahl. m. d. rat. Zahlen ihrer Definitionsfolg. Herleit. einiger fund. Gleich. u. Ungleich. Dezimalbrüche. Kettenbrüche. Die Aufl. d. Diophantischen Gleich. erst. Grades m. zwei Unbek. d. Kettenbrüch. Period. Kettenbrüche u. quadrat. Gleich. m. ganzzahl. Koeff. Eigensch. d. Syst. d. reell. Zahlen. Zusammengehör. Definitionsfolgen, die aus belieb. reell. Zahlen besteh. Rat. Operat. bei reell. Zahlen. — Die iteriert. Gruppenelem. Die Wurzelgruppe u. einige f. sie gült. Sätze. Isomorphismus zweier Gruppen. Einige Sätze f. d. Elem. es. Körpers, die in bez. auf die Add. eine Wurzelgr. bilden. Isomorphismus zweier Körper. Abstr. Definit. d. rat. Zahlen. Körper, deren Elem. sechs Ungleichheitspostulaten gnügen. Die reell. Zahlen u. d. Punkte er. Gerad. — Die Potenz m. ganzzahl. Expon. Das Wurzelziehen. Die Potenz m. rat. Expon. Die Potenz m. irrat. Expon. Der Logarithmus. Elem. Einführ. d. Exponentialfunkt. f. d. Basis e u. d. nat. Log. Das arithm.-geom. Mittel u. verw. Algorithmen. Die Kreismess. — Ob. u. unt. Grenze er. Zahlenmenge. Begr. d. Schnittes. Gattung v. Objekt., die als Zahlen verw. werden können. Häufungsstelle. Lim. sup. u. Lim. infer. Konverg. Folgen. Die vier Fundamentaloperat. bei Grenzwerten u. d. regul. Folgen als Zahlen. Die Irrationalzahl nach Weierstrass. Grenzwerte f. d. nat. Log. u. d. Exponentialfunkt. Unendl. Reihen. Unendl. Reihen m. posit. Gliedern u. Potenzreih. Abs. u. relat. Konvergenz unendl. Reihen. Elem. d. Kombina-

torik u. d. binom. Satz f. ganze posit. Expon. Die Exponentialreihe u. d. Berechn. d. Zahl *e*. Der bin. Satz f. belieb. Expon. Die log. Reihe u. weiteres üb. d. num. Berechn. v. Log. Unendl. Produkte. Ergänz.

Newton, Cotes, Gauss, Jacobi, Vier grundlegende Abhandlungen über Interpolation und genäherte Quadratur (1711, 1722, 1814, 1826). Übers. bzw. hrsg. und mit einem erläuternden Anhang versehen von Arnold Kowalewski. Mit 6 Fig. — VI + 104 pp. 1917. 8. Kr. 1: 92 + 75 %. Br.

Die Differentialmethode (Von Isaac Newton, 1711). — Über die Newtonsche Differentialmethode (Von Roger Cotes, 1722). — Neue Meth. z. näherungsweisen Auffindung v. Integralwerten. (Von Carl Friedrich Gauss, 1814). Über Gauss' neue Meth., die Werte d. Integrale näherungsw. zu finden. (Von Carl Gustav Jacob Jacobi, 1826). — Anhang: Newton. Cotes. Gauss. Jacobi.

Schaeffer, Clemens, Die Prinzipe der Dynamik. Mit 6 Fig. — 76 pp. 8. 1919. Kr. 3: 40 + 25 %.

Das Prinz. d. virtuellen Verrückungen f. holonome skleronome Bedingungsgleich. Das Prinz. d. virt. Verrückungen f. rheonome u. nichtholon. Bedingungsgleich. Das Prinz. v. d'Alembert. Das Energieprinz. bei skleron. u. rheonomen Bedingungsgleich. Wirkl., Übergangs- u. variierte Beweg. Allg. Variation (Var. d. Zeit). Allg. Koordin.; wahre u. nichtholon. Koordin. Das Hamilton'sche Prinz. d. stationären Wirk. u. seine Äquivalenz m. d. d'Alembert'schen Prinz. Die Lagrange'schen Gleich. f. holon. u. nichtholon. Koordinaten. Anw. d. erweit. Lagrange'schen Gleich. auf die Euler'schen Gleich. d. starren Körpers. Die Hölder'sche Transformat. Die verschied. Formen d. Prinz. d. kleinsten Wirk. Die Kanon. Gleich. v. Hamilton. Allg. Variation d. Hamilton'schen Prinzipalfunkt. Die Hamilton'sche Differentialgleich. f. d. Prinzipalfunkt. u. die Integrale d. Bewegungsgleich. Jacobi's Umkehrung d. Hamilton'schen Theorems z. wirkl. Bestimmung d. Integrale. Üb. die Integrat. d. Hamilton'schen part. Differentialgleich. Dass Gauss'sche Prinz. d. kleinsten Zwanges. Die Gibbs-Appell'sche Form. d. Bewegungsgleich.

Scheffers, Georg, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- u. Integralrechnung und in die analytische Geometrie. 4:e verb. Aufl. Mit 438 Fig. — X + 746 pp. 1919. 8. geb. Kr. 18: 40 + 25 %.

Vorl. Überblick. Das Messen d. Grössen. Konstanten, Veränderliche, Funkt. Koordinaten. — Lin. Funkt. Quadrat. Funkt. Grenzwerte, Unendlichkleines, Differentiale u. Differentialquotienten. Diff. quot. v. Summen, Produkten u. Brüchen. Ein Rückbl. — Ganze Funktionen. Üb. d. Aufl. v. Gleich. Gebrochene Funkt. Die Kettenreg. Beisp. — Die Gerade. Der Kreis. Die Ellipse. Die Hyperbel. Schiefwinkl. Koordin. Dreieckskoordin. — Funkt. m. demselb. Differentialquot. Das Integral. Beisp. z. Flächenmessung. Verschied. Anw. d. Integralbegriffs. — Der nat. Logarithmus. Berechn. d. nat. Log. Eigensch. d. nat. Log. Der gew. Log. Ein Rückbl. u. Folger. — Das Gesetz d. organ. Wachsens. Exponentialfunktionen u. Exponentialkurven. Polarkoordin. u. log. Spiralen.

Beisp. — Die Goniometr. Funkt. Anw. d. goniometr. Funkt. Period. Vorgänge. Die zyklometr. Funkt. — Die Differentialquotienten u. Differentialkurven. Kennzeichen es. Maximums od. Min. Krümmung, Evolute u. Evolventen. Geradlin. Beweg. Krummlin. Beweg. — Der Mittelwertsatz. Die Formel v. Lagrange. Die Taylorsche Formel. Versch. Anw. d. Taylorschen Form. — Allg. Integrationsverf. Übersicht u. Anw. Besond. Integrationsverf. Die Fouriersche Reihe. — Part. Differentiation. Differentiat. unentwick. Funkt. Grundbegr. d. analyt. Geom. d. Raumes. Funkt. d. Ortes in d. Ebene. Rückbl. u. Schlussbem. — Anh. Taf.

Schmid, Theodor, Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie. — 40 pp. 4. 1911. Ganze Samml. in Mappe Kr. 3: 20.

Anordn. zweiter gusseiserner Pfeiler. Ankerplatte. Wandkasten I, II, III. Befestigungsschraube m. Mutter, Unterlegscheibe u. Schlüssel. Formen d. Schraubenkpofes. Kleine Befestigungsschrauben. Kesselniete. Druckwindkessel. Kugelventil. Kuppelungen. Flanschenformstücke I. Schubstange. Kleine Schubstange. Exzenterstange. Muffenformstücke. Flanschenformstücke II. Bewegungsschraube m. Rechts- u. Linksgewinde. Gewindearten f. Befestigungsschrauben.

Sethe, Kurt, Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist. Ein Beitrag zur Geschichte von Rechenkunst und Sprache. Mit 3 Taf. (Schriften d. Wissenschaftl. Gesellschaft in Strassburg 25. Heft). — VIII + 147 pp. 4. 1916. Kr. 11:20.

Das Ziffernsyst. d. Ägypter. Die Ziffern. Die Gruppierung d. Ziff. Die Zusammenstellung zusammenges. Zahlen. Kardinalzahlen. Die höchsten Zahlwörter. Die Zahlwörter von 1 bis 20 u. ihr Verhältn. zu d. semitischen Zahlwörtern. Spuren and. Zählsyst. im Ägyptischen u. die Zahlwörter v. 30 bis 90. Runde od. heil. Zahlen. Zahlabstrakta. Die Konstruktion d. Kardinalzahlworte. Bruchzahlen. Das Rechnen m. Stammbrüchen. Stammbruchtafeln. Die Halbierungsteil. Die dreiteil. Die Stammbrüche m. belieb. Nennerzahl. Komplementbrüche. Das Verhältn. zwischen Komplement- u. Stammbruchbezeichn. Ordinalzahlen. Der Ordinalzahlausdr. m. *mh.* »füllend». Der erste. Der Ordinalzahlausdr. m. *ntj.* »welcher». Der Ordinalzahlausdr. durch das Partizip es. Zahlverbums. Die ordinalzahlworte m. Ableitungssuffix *-nw.* Das Ordinalzahlwort z. Bezeichn. d. Gefährten. Das Ordinalzahlwort ben. nach d. vorhergeh. Kardinalzahl. Distributivzahlen. Nachtr. u. Bericht. Reg.

Gebr. Vogt.

Papiermühle (Sachs.-Altbg).

Neuhaus, Otto, Zinsen und Zinseszinsen. Das bequemste Rechnen für Jedermanns Hausbedarf. Ein Buch für Alle, enthaltend das tägliche Rechnen, Buch- u. Bankauszüge Zins-, u. Rentenrechnung etc. ohne Logarithmen, jedoch mit zwangloser Einführung in diese machtvolle Rechenstütze. Zugabe: Unbegrenzter Wochentag-Kalender. — 80 pp. 8. 1919.

Verhältnisse u. Gleichungen. Zinsrechn. Die Contocorrent-Rechn. Die Zinses-zinsrechn. Tabelle. Die zusammengesetzte Zinseszinsrechn. Tab. Die Verbind. d. einf. m. d. zusammengesetzten Zinseszinsrechn. Die Rentenrechn. Die Annuitätsrechn. Die Logarithmen. Tabelle.

Williams & Norgate.

London.

Hobson, J. A. The science of wealth. (Home University Library of Modern Knowledge.) — 256 pp. 8. 2 s. Bd.

The meaning of wealth. The business a. the trade. The industr. syst. How the industr. syst. works. Costs a. surplus. Unproduct. surplus. Wages. Profits. Exchange a. prices. Demand a. supply. The labour movement a. state socialism. Foreign trade. Human values.

Russell, Bertrand, The problems of philosophy. New a. rev. ed. (Home University Library of Modern Knowledge.) — 255 pp. 8. 1919. 2 s. Bd.

Appearance a. reality. The existence of matter. The nature of matter. Idealism. Knowlegde by acquaint. a. knowl. by descript. On induction. On our knowl. of gen. principles. How a priori knowl. is possible. The world of universals. On our knowl. of univers. On intuit knowl. Truth a. falsehood. Knowl., error. a. prob. opinion. The limits of philos. knowledge. The value of philos. Bibliogr. note. Index.

Nicola Zanichelli.

Bologna.

Pincherle, Salvatore, Lezioni di calcolo infinitesimale, dettate nella R. Università di Bologna. 2da ed. riveduta. — 785 pp. 8. 1920. Lire 40: —.

Pref. Introd. — Calcolo diff.: Le funzioni di una variabile in senso gen. Le funz. elementari. Derivate e differenziali p. le funz. di una var. Ulter. proprietà d. funz. derivabili di una var. Sviluppo di Taylor p. le funz. di una var. e sue applicaz. Funz. di più variabili. Funz. implicite. Svil. de Taylor p. le funz. di più var., e sue applicaz. L'integraz. definita. Calcolo d. integrali. Integr. generalizz. Integrazione d. funz. di forma analit. sempl. L'integraz. nei campi a due dimens. L'integraz multipl. — Applicaz. geom. del calcolo infinites.: Le curve piane. Quadratura e rettificaz. d. curve piane. Le curve sghembe. Le superf. Volumi. Area d. superf. curve. Esercizi. — Equaz. diff.: Generalità. I teoremi d'esist. p. l'equaz. d. primo ord. Le equaz. d. primo ord. Cenni s. equaz. di ordine sup. Equaz. lineari. Cenni s. equaz. alle derivate parziali. Nota A. B.

United States Naval Institute.

Annapolis, Md.

Brown, Stimson J., & Capron, Paul, The Calculus. (Revised). An elementary treatise on the differential a. integral calculus, with practical applications. Prep. for the use of the midshipmen of the United States Naval Academy. — VIII + 288 pp. 8. 1912.

Derivatives a. differentials. Analyt. geometry. Max. a. min. Integration. Space coördinates. Areas, volumes, arcs, a. surf. Series. Mean values. Centers of gravity. Moments of inertia.

U. S. Naval Observatory.

Washington.

Annual Report of the *Naval Observatory* for the fiscal year 1919. (Appendix N:o 2 to the Annual Report of the Chief of the Bureau of Navagation 1919). — 23 pp. 8. 1919.

United States Naval Observatory, Publications. Second Series. Vol. IX, Parts III, IV and Appendix. — VIII + 290, XLIX + 116, 100 pp. 4. 1918.

Part III: Observations made with the nine-inch transit circle 1908—1911, under the direction of F. B. Littell. Reduced under the direction of W. S. Eichelberger.

Part IV: Observations made with the nine-inch transit circle 1912—1913, under the direction of F. B. Littell. Reduced under the direction of H. R. Morgan.

Appendix: Determination of the difference of longitude between Washington and Paris 1913—14. Reduced under the direction of F. B. Littell and G. A. Hill.

Department of the Interior Bureau of Education.

Washington.

Archibald, Raymond Clare, The training of teachers of mathematics for the secondary schools of the countries represented in the International Commission on the teaching of mathematics. With the edit. cooperation of D. E. Smith, W. F. Osgood & J. W. A. Young. (Department of the Interior Bureau of Education. Bulletin, 1917, No. 27). — 289 pp. 8. 1918.

Introd. — Australia. Austria. Belgium. Denmark. England. Finland. France. Germany. Hungary. Italy. Japan. Netherlands, The. Roumania. Russia. Spain. Sweden. Switzerland. United States, The. Summary a. comparative remarks. — Appendices: *England:* Cambridge local examinations, senior students. Oxford a. Cambridge schools, examination board. University of London matriculation examin. — Entrance scholarships examin. papers, Cambridge Univ. *France:* Concours for admission to the Ecole Normale Supérieure a. for the Courses de licenses in 1913. Agrégation d. sciences math. *Germany;* Reifeprüfungen. Lehramtsprüfungen. *Japan:* Examination questions.

Department of Commerce U. S. Coast and Geodetic Survey.

Washington.

These publications will be sent free of charge, upon application to the office, so long as the supply for free distribution lasts. After that they can be procured from the Superintendent of Documents, Washington, D. C., for the prices quoted in each case.

Special Publications:

No. 52. Adams, Oscar, S., Lambert projection tables for the United states. 243 pp. 8. 1918. 25 c.

No. 57. ADAMS, OSCAR, S., General theory of polyconic projections. 174 pp. 8. 1919. 25 c.

No. 59. BOWIE, WILLIAM, & ADAMS, OSCAR, S., Grid system for progressive maps in the United States. 227 pp. 8. 1919. 25 c.

No. 60. ADAMS, OSCAR S., A study of map projections in general. 24 pp. 8. 1919. 5 c.

Carnegie Institution of Washington.

Washington.

DICKSON, LEONARD EUGENE, History of the theory of numbers. Vol. 1: Divisibility and primality. — XII + 486 pp. 4. 1919.

Perfect, multiply perf., a. amicable numbers. Formulas for the numb. a. sum of divisors, probl. of Fermat a. Wallis. Fermat's a. Wilson's theor., generalizations a. converses; symm. functions of 1, 2, ..., $p-1$, mod. p. Residue of $(u^{p-1}-1)/p$ mod. p. Euler's Φ-funct., generalizat.; Farey series. Period. dec. fractions; period. fractions; factors of $10^n \pm 1$. Primitive roots, expon., indices, binom. congruences. Higher congr. Divisibility of factorials a. multinom. coefficients. Sum. a. numb. of divisors. Miscell. theorems on divisib., greatest com. divisor, least com. multiple. Criteria f. divisib. by a given numb. Factor tables, lists of primes. Meth. of factoring. Fermat numb. $F_n = 2^{2^n} + 1$. Factors of $a^n \pm b^n$. Recurr. series; Lucas' u_n, v_n. Theory of prime numb. Inversion of funct.; Möbius' funct. $\mu(n)$; numer. integrals a. derivat. Prop. of the digits of numb. Author index. Subj. ind.

Jos. Kösel'sche Buchhandlung.

Kempten und München.

LENGAUER, JOS., Analytische Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht an Gymnasien. 2:e Aufl. — VII + 113 pp. 8. 1918.

Der Punkt. Die Gerade. Verm. Aufgaben. Der Kreis. Verm. Aufg. Die Parabel. Aufgab. Die Ellipse. Aufgab. Die Hyperbel. Aufg. Das Tangentenproblem. Aufg.

Selbstverlag Dr Ernst Rudolph Cruewell.

Bülowstr. 100, Berlin, W.

CRUEWELL, ERNST RUDOLPH, Die beiden Grundprobleme der Mathematik. A. Das Problem der mathematischen Messkunst. Der Satz des Pythagoras. B. Das Problem der Differentialrechnung. Die Brücke des Differential. Gemeinverständliche Ableitung beider Probleme mittelst einfacher Buchstabenrechnung. — 8 pp. 8. 1920. M. 16: —.

SUR LES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES ET SUR L'EXPRESSION DE LA FONCTION HYPERGÉOMÉTRIQUE PAR UNE DÉRIVÉE GÉNÉRALISÉE.

PAR

J. KAMPÉ DE FÉRIET

à PARIS.

(Extrait d'une lettre à M. P. APPELL.)

Je vais m'efforcer de vous présenter un résumé très bref de l'état actuel des recherches que j'ai entreprises dans ma Thèse »sur les fonctions hypersphériques», en suivant la voie que vous avez indiquée dans votre Mémoire[1] des »Rendiconti» de 1913.

Au Chapitre IV de ma Thèse (p. 69) j'ai donné les formules qui permettent de calculer les coefficients $A_{m_1,\cdots m_p}$ et $B_{m_1,\cdots m_p}$ du développement d'une fonction $F(x_1,\cdots x_p)$ de p variables réelles, sous l'une ou l'autre forme:

$$F(x_1,\cdots,x_p) = \Sigma A_{m_1,\cdots m_p} V^{(s)}_{m_1,\cdots m_p}(x_1,\cdots,x_p), \tag{1}$$

$$F(x_1,\cdots,x_p) = \Sigma B_{m_1,\cdots m_p} U^{(s)}_{m_1,\cdots m_p}(x_1,\ldots,x_p); \tag{2}$$

mais comme je l'ai écrit au début même de ce Chapitre: »reste à savoir dans quels cas la série (1),..., converge effectivement et représente la fonction $F(x_1,\ldots,x_p)$ dans le domaine $X_p = 1 - x_1^2 - \cdots - x_p^2 \geq 0$; nous ne ferons pour le moment qu' effleurer la question». Et je démontre (p. 70) que si les $\left|\dfrac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_p^{m_p}}\right|$ vérifient une certaine inégalité on peut affirmer la convergence de la série (1). Pour la

[1] P. APPELL: »Les polynomes $V_{m,n}$ d'HERMITE et leurs analogues rattachés aux potentiels à q variables». (Rend. Circ. Math. di Palermo, t. XXXVI, 1913, p. 203—212).

série (2) j'obtiens des résultats plus généraux grâce à ce que j'ai pu former (p. 73) une majorante qui lui est simplement liée.

Mais au point de vue de l'Analyse Moderne la question de la représentation d'une fonction arbitraire $F(x_1, \ldots, x_p)$ par une série de fonctions hypersphériques $U^{(s)}$ ou $V^{(s)}$ était loin d'être épuisée; je considérais seulement ce Chapitre IV comme la base de travaux ultérieurs. L'idée se présentait naturellement d'essayer de souder la question à la Théorie générale des équations intégrales.

Les résultats que j'ai obtenus dans cette voie sont résumés en partie dans une Note des Comptes-Rendus (Tome 162 — p. 747 — séance du 15 mai 1916): »sur une équation intégrale de seconde espèce admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales». Considérant sur l'hypersphère S deux points $M(x_1, \ldots, x_n, \varphi)$ et $P(y_1, \ldots, y_n, \psi)$, je démontre qu'une fonction hypersphérique U vérifie la relation:

$$2\frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}U(P) = \mu(\mu+n)\int\limits_{(S)}^{n+1} V_n(M,P)\,U(M)\,d\sigma_{n+1}.$$

Dans cette équation intégrale — en posant:

$$\cos\gamma = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n + \sqrt{X_n}\sqrt{Y_n}\cos(\varphi-\psi),$$

$$\xi = \cos^2\frac{\gamma}{2},$$

le noyau $V_n(M,P)$ est une fonction $V_n(\xi)$ dont je donne l'expression:

$$n\,V_n(\xi) = \int_0^1 \frac{1}{v}\left[(1-\xi v)^{-n} - 1\right](1-v)^{\frac{n-1}{2}}\,dv.$$

Je suis d'ailleurs revenu sur la question et dans une nouvelle Note aux Comptes-Rendus (Tome 164 — p. 856, — séance du 29 mai 1917): »sur la formation d'équations intégrales admettant les fonctions hypersphériques comme solutions fondamentales», j'ai indiqué »un procédé permettant de former sans peine un grand nombre de noyaux nouveaux». Je pars d'un théorème que j'ai énoncé (avec une seule variable x):

Soit $F(x)$ une fonction représentée, dans l'intervalle $(-1 \leq x \leq +1)$, par la série uniformément convergente:

$$F(x) = \Sigma A_n U_n^{(s)}(x),$$

la fonction:

$$K(x,y) = \int_0^\pi F[xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\cos\omega]\sin^{s-1}\omega\, d\omega$$

admet dans le domaine $(-1 \leq x, y \leq +1)$ le développement:

$$K(x,y) = 2^{s-1}\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\Sigma A_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+s)} U_n^{(s)}(x)\, U_n^{(s)}(y).$$

Bien que je n'aie pas fait allusion à ceci dans ma Note, je crois qu'en remplaçant x et y par $\frac{x}{\sqrt{s}}$ et $\frac{y}{\sqrt{s}}$ et faisant tendre s vers l'infini, on doit pouvoir étendre[1] ces résultats aux polynômes d'HERMITE:

$$e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

Peut-être tombe-t-on très simplement ainsi sur certains des noyaux qui ont été obtenus par M:me VERA MYLLER-LEBEDEV dans l'étude qu'elle a faite de ces polynômes d'HERMITE [Math. Ann. 64 (1907) p. 388].

Les résultats acquis dans ces deux Notes permettront sans doute d'utiliser les théorèmes généraux de la Théorie des équations intégrales dans l'étude de la convergence des séries de fonctions hypersphériques et de la représentation d'une fonction arbitraire par de telles séries.

Je passe maintenant à un autre sujet voisinant avec celui qui précède plutôt que le prolongeant, mais sur lequel je n'ai encore rien publié.

Dans son Mémoire sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique, JACOBI a démontré la formule:

$$F(-n, \alpha+n, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}]$$

(n désignant un entier positif).

[1] En utilisant la formule que vous avez établie:

$$\lim_{s=+\infty}\left[s^{-\frac{n}{2}} U_n^{(s)}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)\right] = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

Je me suis demandé ce que donnerait ici l'introduction du symbole $R^{(\lambda)}$ de la dérivée généralisée de Riemann-Liouville; ceci m'a conduit à une expression symbolique vraiment curieuse d'une fonction hypergéométrique quelconque $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Quand λ est un nombre réel positif, on pose par définition:

$$R^{(\lambda)} f(x) = \frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} f(xt)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x (x-t)^{\lambda-1} f(t)\, dt,$$

d'où, en utilisant la formule de transformation d'une intégrale double due à Lejeune-Dirichlet:

$$R^{(\mu+\lambda)} f(x) = R^{(\mu)}[R^{(\lambda)} f(x)] = R^{(\lambda)}[R^{(\mu)} f(x)]; \ (\lambda > 0 \text{ et } \mu > 0).$$

Si $f(x)$ est donnée sous la forme:

$$f(x) = x^{\varrho-1} \sum_0^{+\infty} a_n x^n \qquad (\varrho > 0)$$

on a:

$$R^{(\lambda)} f(x) = x^{\lambda+\varrho-1} \sum_0^{+\infty} \frac{\Gamma(\varrho+n)}{\Gamma(\lambda+\varrho+n)} a_n x^n;$$

et la fonction: $x^{1-\varrho-\lambda} R^{(\lambda)} f(x)$, admet la même étoile principale (au sens de M. Mittag-Leffler) que: $x^{1-\varrho} f(x)$.

On pose ensuite:

$$R^{(0)} f(x) = f(x).$$

En désignant toujours par λ un nombre positif, on peut définir $R^{(-\lambda)} f(x)$ de la façon suivante: soit k le plus petit nombre entier tel que $k-\lambda$ soit positif, on a:

$$R^{(-\lambda)} f(x) = \frac{d^k}{dx^k}[R^{(k-\lambda)} f(x)];$$

on en déduit notamment, pour $0 < \lambda < 1$:

$$R^{(\lambda)}[R^{(-\lambda)} f(x)] = f(x);$$

en effet, la relation:

$$R^{(\lambda)}[\varphi(x)] = f(x),$$

équivaut alors à l'équation intégrale d'Abel-Volterra:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^x (x-t)^{\lambda-1}\varphi(t)\,dt = f(x),$$

qui a pour solution

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\lambda} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[R^{(1-\lambda)} f(x)]. \text{ —}$$

Avec les définitions précédentes, si n est un nombre entier positif:

$$R^{(-n)} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x),$$

et $R^{(n)} f(x)$ coïncide avec l'intégrale de $f(x)$ prise n fois entre les limites o et x.

Ceci rappelé, en rapprochant de la définition de $R^{(\lambda)}$, l'une des expressions classiques de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sous forme d'une intégrale définie:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx)^{-\beta}\,dt,$$

ou:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}(1-tx)^{\beta-\gamma}\,dt$$

j'obtiens bien simplement des expressions du type suivant:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = x^{1-\gamma}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} R^{(\gamma-\alpha)}[x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}]$$

ou:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} R^{(\alpha)}[x^{\gamma-\alpha-1}(1-x)^{\beta-\gamma}]$$

la dernière en particulier, généralise complétement celle de JACOBI. — De cette représentation par une dérivée généralisée de RIEMANN-LIOUVILLE, la plupart des propriétés de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ doivent pouvoir se déduire d'une manière élégante, car la fonction, dont elle est ainsi la dérivée $R^{(\lambda)}$, est le binome $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}$, dont les propriétés sont, pour ainsi dire, évidentes; et il y a souvent une étroite liaison entre les propriétés de $f(x)$ et celles de $R^{(\lambda)} f(x)$. Je vais esquisser une revue rapide des propriétés de la fonction hypergéométrique, en les déduisant uniquement de son expression au moyen du symbole $R^{(\lambda)}$. —

Comme premier exemple, si dans la relation:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} R^{(\gamma-\alpha)}[x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}] = \frac{1}{\Gamma(\beta)} R^{(\gamma-\beta)}[x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}]$$

on fait $\beta=\gamma$, on obtient:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}R^{(\gamma-\alpha)}[x^{\alpha-1}(1-x)^{-\gamma}]=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}x^{\gamma-1}(1-x)^{-\alpha},$$

qui correspond à la propriété élémentaire:

$$F(\alpha,\gamma,\gamma,x)=(1-x)^{-\alpha}.$$

Voici ensuite un des types d'artifices qui mènent aux nombreuses équations aux différences finies qui lient trois fonctions contigues:

$$\begin{aligned}x^{\gamma-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)&=R^{(\gamma-\alpha-1)}[x^{\alpha}(1-x)^{-\beta}]\\&=R^{(\gamma-\alpha)}\frac{d}{dx}[x^{\alpha}(1-x)^{-\beta}]\\&=R^{(\gamma-\alpha)}[\alpha x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}+\beta x^{\alpha}(1-x)^{-(\beta+1)}]\\&=\alpha\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)}x^{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma,x)+\beta\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\gamma+1)}x^{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x),\end{aligned}$$

d'où:

$$F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)=F(\alpha,\beta,\gamma,x)+\frac{\beta}{\gamma}x\,F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x).$$

En variant le procédé on parvient aux autres relations connues; par exemple, en groupant autrement les termes du second membre (3[e] ligne) de l'égalité cidessus, on peut écrire:

$$x^{\gamma-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)=R^{(\gamma-\alpha)}[(\alpha-\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}+\beta x^{\alpha-1}(1-x)^{-(\beta+1)}]$$

d'où:

$$\alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)=(\alpha-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma,x)+\beta F(\alpha,\beta+1,\gamma,x).$$

L'emploi répété d'artifices analogues, toujours faciles à imaginer, conduit aux autres équations aux différences finies. —

L'équation différentielle de Gauss peut aussi se déduire aisément de l'expression de $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ au moyen de $R^{(\lambda)}$, en adaptant à la dérivation d'indice λ le procédé souvent employé pour tirer l'équation différentielle des polynomes de Legendre de la formule d'Olinde Rodrigues.

Considérons, en effet, le binôme:

$$u(x) = x^{\mu}(1-x)^{\nu-\mu}$$

il vérifie l'équation différentielle:

$$\text{(E)} \qquad x(1-x)\frac{du}{dx} - (\mu - \nu x)\, u = 0.$$

Prenons la dérivée $R^{(\lambda)}$ de cette équation, en nous appuyant sur la formule générale:

$$R^{(\lambda)}[P_q(x) f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\sum_{k=0}^{k=q}(-1)^k \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(k+1)}\frac{d^k P_q}{dx^k} R^{(\lambda+k)} f,$$

où $P_q(x)$ désigne un polynôme de degré q; d'où:

$$R^{(\lambda)}\left[x(1-x)\frac{du}{dx}\right] = x(1-x) R^{(\lambda)}\left[\frac{du}{dx}\right] - \lambda(1-2x) R^{(\lambda+1)}\left[\frac{du}{dx}\right] - \lambda(\lambda+1) R^{(\lambda+2)}\left[\frac{du}{dx}\right]$$

$$R^{(\lambda)}[(\mu - \nu x) u] = (\mu - \nu x) R^{(\lambda)} u + \lambda \nu R^{(\lambda+1)} u.$$

Si nous introduisons alors la fonction:

$$y(x) = R^{(\lambda+1)} u(x),$$

comme[1],

$$R^{(\lambda)}\left[\frac{du}{dx}\right] = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad R^{(\lambda+1)}\left[\frac{du}{dx}\right] = R^{(\lambda)} u = \frac{dy}{dx}, \quad R^{(\lambda+2)}\left[\frac{du}{dx}\right] = y,$$

nous voyons que la dérivée $R^{(\lambda)}$ de (E) peut s'écrire sous la forme:

$$x(1-x)\frac{d^2 y}{dx^2} + [-(\lambda+\mu) + (2\lambda+\nu)x]\frac{dy}{dx} - \lambda(\lambda+\nu+1)\, y = 0.$$

Donnons d'abord aux paramètres les valeurs:

$$\lambda = \gamma - \alpha - 1, \; \mu = \alpha - 1, \; \nu - \mu = -\beta,$$

nous obtenons pour la fonction:

$$y(x) = R^{(\gamma-\alpha)}[x^{\alpha-1}(1-x)^{-\beta}]$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

---

[1] En général on a: $R^{(\lambda)}\left[\frac{du}{dx}\right] = R^{(\lambda-1)} u - \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} u(0) = \frac{d}{dx}[R^{(\lambda)} u] - \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} u(0)$; mais ici, l'interversion des symboles $R^{(\lambda)}$ et $\frac{d}{dx}$ est légitime parce que $u(0) = 0$. —

l'équation différentielle:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)x]\frac{dy}{dx}-(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)y=0.$$

Faisons ensuite:

$$\lambda=-\alpha,\ \mu=\alpha-\gamma,\ \nu-\mu=-(\beta+1-\gamma),$$

nous constatons que la fonction:

$$\begin{aligned} y(x) &= R^{(1-\alpha)}[x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{-(\beta+1-\gamma)}] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)}x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,x) \end{aligned}$$

satisfait à l'équation différentielle:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0.$$

Ces deux résultats sont bien conformes à la théorie classique de l'equation différentielle de Gauss. —

Voici une application d'un autre genre; nous savons déjà, d'après une propriété de $R^{(\lambda)}$ rappelée plus haut, que $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ admet même étoile principale[1] que $(1-x)^{-\beta}$; partons d'un développement en série de polynomes, uniformément convergent, de la fonction $(1-x)^{-\beta}$, (on sait effectivement former de tels développements, valables dans des domaines très étendus):

$$(1-x)^{-\beta}=\sum_0^{+\infty}\Pi_n(x),$$

où:

$$\Pi_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n}a_k x^k.$$

Nous en déduisons pour la fonction hypergéométrique le développement:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_0^{+\infty}P_n(x),$$

le polynôme $P_n(x)$ ayant pour expression:

[1] Il résulte aussi de ces propriétés, qu'au point singulier $x=1$ (sommet de l'étoile) l'ordre de $(1-x)^{-\beta}$ étant β, celui de $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ sera: $\alpha+\beta-\gamma$. En effet, l'ordre de $f(x)$ étant $\omega=1+\lim_{n=\infty}\frac{\log a_n}{\log n}$ celui de $R^{(\lambda)}f(x)$ est: $\omega'=1+\lim_{n=\infty}\frac{\log\frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\lambda+\rho+n)}a_n}{\log n}=\omega-\lambda$.

$$P_n(x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\gamma} R^{(\gamma-\alpha)} [x^{\alpha-1} \Pi_n(x)]$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\gamma+k)} a_k x^k. —$$

Comme dernier exemple montrons comment cette expression symbolique permet de retrouver les théorèmes établis par M. NIELS NIELSEN dans ses »Recherches sur le développement d'une fonction analytique en série de fonctions hypergéométriques». (Ann. Ecole Normale 3:e série, t. XXX 1913 — p. 121).

Choisissons au hasard une de ses propositions; d'abord une des plus simples. Du développement:

$$(1-x)^{-\nu} = \sum_0^{+\infty} \binom{\nu}{n} x^n (1-x)^{-n}$$

nous déduisons:

$$R^{(\gamma-\alpha)} [x^{\alpha-1} (1-x)^{-(\beta+\nu)}] = \sum_0^{+\infty} \binom{\nu}{n} R^{(\gamma-\alpha)} [x^{\alpha+n-1} (1-x)^{-(\beta+n)}]$$

d'où:

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta+\nu, \gamma, x) = \sum_0^{+\infty} \binom{\nu}{n} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)} x^n F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x)$$

ce qui est bien la formule donnée par M. NIELS NIELSEN (Chap. II, § V, exemple 1).

Dans ce même mémoire, l'auteur considère les deux séries de puissances:

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n \text{ et } \varphi(x) = \sum_0^{+\infty} a_n \frac{\Gamma(\alpha_1+n) \cdots \Gamma(\alpha_p+n)}{\Gamma(\beta_1+n) \cdots \Gamma(\beta_p+n)} x^n;$$

il dit que $\varphi(x)$ est déduite de $f(x)$ par l'opération $\delta_p(\alpha, \beta)$ et pose:

$$\varphi(x) = \delta_p(\alpha, \beta) f(x).$$

En employant le symbole $R^{(\lambda)}$, l'opération $\delta_p(\alpha, \beta)$ s'exprime par la chaîne de relations suivante:

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_1(x) = x^{1-\beta_1} R^{(\beta_1-\alpha_1)} [x^{\alpha_1-1} f(x)] \\ \varphi_2(x) = x^{1-\beta_2} R^{(\beta_2-\alpha_2)} [x^{\alpha_2-1} \varphi_1(x)] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(x) = x^{1-\beta_p} R^{(\beta_p-\alpha_p)} [x^{\alpha_p-1} \varphi_{p-1}(x)] \end{array} \right|$$

Les divers développements de $f(x)$ que M. Niels Nielsen considère rentrent tous dans la forme:

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} A_n x^{\lambda_n} (1 - x)^{\mu_n}.$$

Bornons-nous au cas où

$$p = 1;$$

la fonction $\varphi(x)$ déduite de $f(x)$ par l'opération $\delta_1(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \delta_1(\alpha, \beta) f(x) \\ &= x^{1-\beta_1} R^{(\beta_1 - \alpha_1)} [x^{\alpha_1 - 1} f(x)]\end{aligned}$$

admettra le développement suivant:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{0}^{+\infty} A_n x^{1-\beta_1} R^{(\beta_1-\alpha_1)} [x^{\alpha_1+\lambda_n-1} (1 - x)^{\mu_n}] \\ &= \sum_{0}^{+\infty} A_n \frac{\Gamma(\alpha_1 + \lambda_n)}{\Gamma(\beta_1 + \lambda_n)} x^{\lambda_n} F(-\mu_n, \alpha_1 + \lambda_n, \beta_1 + \lambda_n, x).\end{aligned}$$

Dans son mémoire M. Niels Nielsen a notamment étudié une série déjà rencontrée par Puiseux, Schlömilch et Petersen:

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} A_n x^n (1 - x)^n;$$

la fonction $\varphi(x)$, qui s'en déduit, est ici: $(\lambda_n = \mu_n = n)$

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{+\infty} A_n \frac{\Gamma(\alpha_1 + n)}{\Gamma(\beta_1 + n)} x^n F(-n, \alpha_1 + n, \beta_1 + n, x).$$

C'est bien là le développement en série de fonctions hypergéométriques rencontré par M. Niels Nielsen (Chap. III, § IX, formule 7).

J'espère vous avoir montré par ces quelques exemples, pris un peu au hasard, que la représentation de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ par la dérivée généralisée $R^{(\lambda)}$, de Riemann-Liouville, du binome $x^{\mu}(1 - x)^{\nu}$, (dont j'ai donné plus haut un ou deux types) ne se réduit pas à un symbolisme stérile, mais pourrait devenir un instrument commode pour une exposition synthétique des propriétés des fonctions hypergéométriques.

Dans ce court exposé j'ai passé sous silence, notamment, toutes les questions de convergence, admettant plusieurs fois implicitement des propositions comme celle ci:

$$R^{(\lambda)}\left[\sum_{0}^{+\infty} f_n(x)\right] = \sum_{0}^{+\infty} R^{(\lambda)} f_n(x),$$

de même je n'ai pas examiné les inégalités restrictives auxquelles devraient satisfaire α, β, γ, pour la validité de certaines des expressions formelles obtenues.

Paris, le 8 novembre 1917.

UEBER KONVERGENZ UNENDLICHER KETTENBRÜCHE MIT DURCHWEG REELLEN ELEMENTEN.[1]

Von

OTTO SZÁSZ

in Frankfurt a. M.

Die Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen *Reihe* mit komplexen Gliedern $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, a_\nu = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, (\alpha_\nu + i\,\beta_\nu)$ hängt in sehr einfacher Weise von dem Verhalten der beiden Reihen mit reellen Gliedern ab: $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, \alpha_\nu$, $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, \beta_\nu$. Ganz anders ist es bei *Kettenbrüchen;* man kennt keinen Zusammenhang zwischen dem Verhalten eines Kettenbruches mit komplexen Elementen und dem Verhalten von Kettenbrüchen mit reellen Elementen. Wenn ein solcher überhaupt existiert, so dürfte er sehr komplizierter Natur sein. Es ist demnach zu erwarten, dass die Beschränkung auf nur reelle Elemente einen genaueren Einblick in die Struktur des Kettenbruches ermöglichen muss. Spezielle Klassen solcher Kettenbrüche, namentlich die mit lauter positiven Elementen und alternierende Kettenbrüche, sind schon eingehend untersucht worden[2]; in neuerer Zeit hat nun Herr H. Tietze auf geometrischem Wege für allgemeinere Kettenbrüche einige interessante Konver-

[1] Diese Arbeit ist bis auf unwesentliche Änderungen ein Teil meiner Habilitationsschrift, die im Mai 1914 der Akademie für Sozial- und Handelswissenschaften (und später der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität) zu Frankfurt a. M. vorgelegen hat. (In ungarischer Sprache vorgelegt der Ungar. Akad. d. Wissensch. am 19. April 1915.)

[2] Zur Orientierung verweise ich auf das inhaltsreiche Werk des Herrn O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig, 1913 (vgl. insbesondere §§ 50, 51), im folgenden unter »Perron, Lehrbuch» zitiert.

genz- und Irrationalitätssätze abgeleitet.[1] Herr PERRON (Lehrbuch, §§ 51—52) bewies sodann diese Sätze auf arithmetischem Wege mit Anwendung der *Extension* (PERRON, Lehrbuch, § 44) von Kettenbrüchen.

In Weiterverfolgung des von Herrn PERRON eingeschlagenen Weges gebe ich nun Verallgemeinerungen dieser Konvergenzsätze. Ferner leite ich aus meinen Sätzen, durch Spezialisierung der darin auftretenden unendlich vielen Parameter, weitere neue Konvergenzkriterien ab. Dabei ergibt sich die Verallgemeinerung eines von mir mit Hilfe unendlicher Kettenbruchdeterminanten gegebenen Satzes,[2] soweit er sich auf Kettenbrüche mit reellen Elementen bezieht; und zwar handelt es sich hierbei um folgendes:

Bekanntlich hat Herr H. v. KOCH[3] den Satz bewiesen:

Der Kettenbruch mit beliebigen (auch komplexen) Elementen $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert sicherlich, wenn $\sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu| < 1$ ist. — Herr PRINGSHEIM[4] hat diesen Satz aus seinem Hauptkriterium abgeleitet und auch auf den Fall $\sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu| = 1$ erweitert. Ich konnte schliesslich die Konvergenzbedingung: $\sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu| \leqq 1$ durch die folgende ersetzen (a. a. O.):

$$\sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu| - \sum_2^\infty{}_\nu R(a_\nu) \leqq 2,$$

$$\text{(bei vorausgesetzter Konvergenz von } \textstyle\sum_\nu |a_\nu|\text{)},$$

wo $R(a_\nu)$ den reellen Teil von a_ν bedeutet.

Offenbar unterwirft man den Kettenbruch durch die Forderung, dass $\sum_2^\infty{}_\nu |a_\nu|$ konvergiere, einer starken Einschränkung. Für den speziellen Fall lauter

[1] H. TIETZE: a) Einige Kettenbruch-Konvergenzkriterien (Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd 21, 1910, S. 344—360); b) Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche (Mathem. Annalen, Bd 71, 1911, S. 236—265).

[2] O. SZÁSZ, Über gewisse unendliche Kettenbruchdeterminanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen (Sitzungsberichte der Akad. d. Wissenschaften, München, Jahrg. 1912, S. 323—361), S. 341.

[3] H. VON KOCH, Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues (Bull. Soc. Math. de France, t. 23, 1895, p. 33—40).

[4] A. PRINGSHEIM, Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern (Sitzungsberichte der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften (München), Math.-phys. Klasse, Bd 35, 1905, S. 359—380).

reeller a_ν kann ich nun diese Bedingung, soweit als möglich, beseitigen. Es ist jetzt $R(a_\nu) = a_\nu$; ferner sei σ_ν folgendermassen definiert: ist $a_{\nu+1} > 0$, so sei $\sigma_\nu = 0$, ist $a_{\nu+1} < 0$, so bedeute σ_ν die Summe der absolut genommenen auf $a_{\nu+1}$ unmittelbar folgenden negativen Teilzähler ($a_{\nu+1}$ inkl.) bis zum *nächsten* positiven (exkl.). Bedeutet schliesslich

$$\vartheta_\nu = \begin{cases} 0 \text{ für } a_\nu > 0 \\ 1 \text{ für } a_\nu < 0, \end{cases}$$

so lässt sich offenbar σ_ν in der Form anschreiben:

$$\sigma_\nu = \sum_1^\infty {}_k \, |a_{\nu+k}| \, \vartheta_{\nu+1} \, \vartheta_{\nu+2} \ldots \vartheta_{\nu+k},$$

wo die Summe mit dem ersten verschwindenden ϑ abbricht. Der Satz, der sich am Schlusse dieser Arbeit ergeben wird, lautet nun folgendermassen:

Der Kettenbruch mit lauter reellen Elementen: $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $(a_\nu \neq 0)$ *konvergiert, wenn die Bedingungen erfüllt sind:*

$$\sigma_\nu \leq 1 \quad (\nu = 2, 3, \ldots), \qquad \lim_{\nu=\infty} \sigma_\nu < 1.$$

Nur wenn von einem gewissen ν an alle ϑ_ν verschwinden, ist für seine Konvergenz ausserdem die Divergenz der Reihe

$$\sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{r_1 r_3 \ldots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \ldots r_{2\nu+1}} \right) \qquad (r_\nu = |a_\nu|)$$

erforderlich. (Die ja allemal eine *notwendige* Bedingung der Konvergenz darstellt, im Falle *unendlich* vieler negativer a_ν aber eo ipso erfüllt ist, wie aus dem Beweise hervorgeht.)

Dieser Satz und einige andere Sätze dieser Arbeit bedeuten einen ersten Schritt zur Erweiterung der Resultate, die ich in einer früheren Arbeit gab (a. a. O.), in dem Sinne, wie ich es daselbst auf Seite 361 andeutete; man vergleiche auch Satz 4 meiner im Journal für Math. Bd. 147 (1917), S. 132—160 erschienenen Arbeit: Über die Erhaltung der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche bei independenter Veränderlichkeit aller ihrer Elemente.

Noch ein Satz sei hier angeführt, welcher dem obigen etwas ähnlich ist und neben seiner einfachen Formulierung doch auch ziemlich allgemeinen Charakter hat. Man setze zur Abkürzung

$$b_0 = 1,\ \delta_0 = 1,\ \delta_1 = 1,\ \delta_\nu = \frac{b_{\nu-1} b_\nu}{|b_{\nu-1} b_\nu|} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

$$(\text{für } b_{\nu-1} b_\nu = 0 \text{ sei } \delta_\nu = 1)$$

dann gilt der Satz:

Der Kettenbruch mit nur reellen Elementen $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *konvergiert, wenn*

$$|b_\nu| \geqq 1 - \frac{1}{2}(\delta_\nu + \delta_{\nu+1}) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und mindestens für einen Wert von ν $(\nu \geqq 0)$

$$\left[|b_\nu| - 1 + \frac{1}{2}(\delta_\nu + \delta_{\nu+1})\right]\left[|b_{\nu+1}| + \frac{1}{2}(1 - \delta_\nu - \delta_{\nu+1} + \delta_{\nu+2})\right] > 0$$

ist. Nur wenn von einer gewissen Stelle an durchweg $b_{\nu-1} b_\nu \geqq 0$ *ist, muss ausserdem die Divergenz der Reihe* $\sum_1^\infty{}_\nu |b_\nu|$ *vorausgesetzt werden.* (Vgl. Satz 3.)

Es gibt noch kein Analogon dieses Satzes für Kettenbrüche mit komplexen Elementen; einigermassen verwandte Sätze sind in § 6 meiner im Journ. für Math. Bd. 147 erschienenen obenzitierten Abhandlung abgeleitet.

Bei Beschränkung auf reelle Elemente ist obiger Satz eine Verallgemeinerung des bekannten PRINGSHEIM'schen Satzes (auf S. 210 in Fussn. 4 a. O., S. 363):

Der Kettenbruch mit komplexen Elementen: $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ konvergiert sicherlich, wenn

$$|b_1| \geqq 1, \quad |b_\nu| \geqq 2 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

ist und mindestens einmal Ungleichheit statthat.

Für lauter reelle, negative $b_{\nu-1} b_\nu$ gehen die beiden Sätze ineinander über (es wird $\delta_\nu = -1$).

Manche Stellen dieser Arbeit könnte man stark abkürzen, wollte man für die Teilzähler den Wert Null durchweg ausschliessen. Dies würde aber eine erhebliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeuten; dies ist klar, falls die Teilzähler Funktionen einer Variabeln sind, die auch Nullstellen besitzen. Andererseits hängt aber die Konvergenzfrage solcher Kettenbrüche mit verschwindenden Teilzählern auch eng mit der Frage zusammen, wann ein endlicher Kettenbruch einen bestimmten Wert hat oder sinnlos ist (vgl. PERRON, Lehrbuch § 42, Satz 1, S. 193).

§ 1.

Vorbereitende Sätze.

Herr PERRON hat in seinem bereits mehrfach zitierten Lehrbuche (§ 44) den Satz abgeleitet:

Satz A. Sei

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{k+1} = \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k+1}|}{|b_{k+1}} \qquad (k \geqq 1)$$

ein Kettenbruch mit von Null verschiedenen Teilzählern und mit den Näherungsbrüchen: $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, k+1)$; ϱ sei eine beliebige von Null verschiedene Zahl. Damit der $(k+2)$-gliedrige Kettenbruch:

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{\alpha|}{|\beta} + \frac{\alpha'|}{|\beta'} + \frac{\alpha''|}{|\beta''} \tag{a}$$

die Näherungsbrüche:

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \ldots, \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}, \frac{A_k - \varrho A_{k-1}}{B_k - \varrho B_{k-1}}, \frac{A_k}{B_k}, \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}$$

besitze, sind folgende Bedingungen hinreichend und — bis auf eine äquivalente Transformation — auch notwendig:

$$\alpha = a_k,\ \beta = b_k - \varrho,\ \alpha' = \varrho,\ \beta' = 1,\ \alpha'' = -\frac{a_{k+1}}{\varrho},\ \beta'' = b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{\varrho}. \tag{1}$$

Man sagt in diesem Falle nach PERRON, dass der abgeleitete Kettenbruch (a) aus dem ursprünglichen durch *Extension* entstanden ist.

Für das Folgende wird es nützlich sein, zu bemerken, dass der Satz — mit einer geringen Änderung — auch dann noch gültig bleibt, wenn man für die a_ν den Wert Null zulässt; dann sind nämlich die Gleichungen (1) — wie man sich aus dem Beweisgange des Herrn PERRON leicht überzeugt — noch hinreichend, aber nicht notwendig.

Der gesuchte Kettenbruch hat also die Form:

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|b_k - \varrho} + \frac{\varrho|}{|1} - \frac{\frac{a_{k+1}}{\varrho}\Big|}{\Big|b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{\varrho}}$$

In meiner Untersuchung werden ferner die folgenden zwei bekannten Sätze[1] eine Rolle spielen:

Satz B. Hat der Kettenbruch $\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ lauter positive Elemente, wobei aber auch $q_\nu = 0$ zugelassen wird, sofern nur nicht alle $q_{2\nu+1}$ gleich Null sind, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für seine Konvergenz darin, dass wenigstens eine der beiden Reihen:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \frac{p_1 p_3 \ldots p_{2\nu-1}}{p_2 p_4 \ldots p_{2\nu}} q_{2\nu}, \quad \sum_1^\infty{}_\nu \frac{p_2 p_4 \ldots p_{2\nu}}{p_3 p_5 \ldots p_{2\nu+1}} q_{2\nu+1}$$

divergiert.

Satz C. Der Kettenbruch mit lauter positiven Elementen $\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$, wobei aber auch $q_\nu = 0$ zulässig ist, konvergiert, wenn die Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{q_\nu q_{\nu+1}}{p_{\nu+1}}\right)^{\frac{1}{2}}$ divergiert. Die Konvergenz ist offenbar eine unbedingte.

Zwecks späterer Anwendung (Sätze 6 und 10) beweise ich hierzu den folgenden einfachen Satz:

Satz D. *Der Kettenbruch mit lauter nicht negativen Elementen* $\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ (also $p_\nu \geq 0$, $q_\nu \geq 0$) *konvergiert sicher, wenn mindestens für einen Wert von* ν p_ν *gleich Null ist und die Bedingungen erfüllt sind:*

$$q_\nu + p_{\nu+1} > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{2}$$

$$q_\nu > 0 \quad (\nu = k, k+1, \ldots)$$

für ein gewisses k $(k \geq 1)$.[2] (3)

Beweis. Die Näherungsbrüche des Kettenbruches seien:

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

dann ist bekanntlich:

$$Q_0 = 1, \; Q_1 = q_1, \; Q_2 = q_2 q_1 + p_2$$

$$Q_\nu = q_\nu Q_{\nu-1} + p_\nu Q_{\nu-2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

[1] In bezug auf Quellendaten vgl. Perron, Lehrbuch, § 50.

[2] Man könnte statt dieser Bedingungen etwas allgemeinere einführen; dies würde aber den Beweis komplizieren, und da ich in dieser Arbeit nur den obigen Satz anwenden will, beschränke ich mich auf die hier gegebene Formulierung. — Für $k = 1$ fällt Bedingung (2) fort.

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, dass die Ungleichung gilt:

$$Q_\nu \geqq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

ich beweise nun die Ungleichheit:

$$Q_\nu + Q_{\nu+1} > 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Zunächst bemerke ich, dass aus den Rekursionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} Q_\nu &= q_\nu Q_{\nu-1} + p_\nu Q_{\nu-2} \\ Q_{\nu+1} &= q_{\nu+1} Q_\nu + p_{\nu+1} Q_{\nu-1} \end{aligned}\right\} (\nu = 2, 3, \ldots),$$

durch Addition sofort die Beziehung hervorgeht:

$$Q_\nu + Q_{\nu+1} = q_{\nu+1} Q_\nu + (q_\nu + p_{\nu+1}) Q_{\nu-1} + p_\nu Q_{\nu-2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots); \tag{6}$$

nun ist für $\nu = 0, 1$ Ungleichheit (5) offenbar richtig; ihre allgemeine Gültigkeit gewinnt man leicht mit Hilfe vollständiger Induktion. Sei also für ein $\lambda \geqq 2$ bereits

$$Q_{\lambda-1} + Q_\lambda > 0,$$

so muss entweder $Q_\lambda > 0$ sein, und in diesem Falle ist die Ungleichheit

$$Q_\lambda + Q_{\lambda+1} > 0 \tag{7}$$

auch gültig, oder es muss $Q_{\lambda-1} > 0$ sein und in diesem Falle folgt Ungleichheit (7) sofort aus den Beziehungen (2) bezw. (3) und (6) für $\nu = \lambda$. Somit ist Ungleichheit (5) allgemein bewiesen.

Schliesslich leite ich noch die Ungleichheit ab:

$$Q_\nu > 0 \qquad (\nu = k, k+1, \ldots); \tag{8}$$

wegen (5) ist mindestens eine der Grössen Q_{k-1}, Q_k von Null verschieden; nun folgt (8) durch vollständige Induktion: sei für ein λ ($\lambda \geqq k - 1 \geqq 0$) $Q_\lambda > 0$, dann folgt aus (3) und (4) für $\nu = \lambda + 1$, dass auch $Q_{\lambda+1} > 0$ ist. Somit ist auch (8) allgemein bewiesen.

Nun ist bekanntlich (vgl. PERRON, Lehrbuch, S. 234):

$$\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \lim_{\nu=\infty} \frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{P_k}{Q_k} + \sum_{k+1}^{\infty}{}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{p_1 p_2 \ldots p_\nu}{Q_{\nu-1} Q_\nu},$$

und diese Reihe bricht ab, hat also einen bestimmten endlichen Wert, womit Satz D bewiesen ist.

Zusatz. Ist

$$q_k = 0, \quad p_{k+1} \geqq 0, \quad \text{aber} \quad p_k\, q_{k-2} > 0 \text{ (für ein } k \geqq 2), \tag{9}$$

und im übrigen die Bedingungen von Satz D mit eben diesem k erfüllt, so ist der Kettenbruch auch noch konvergent. Dabei ist $q_0 = 1$ zu setzen.

Jetzt wird nämlich infolge der Beziehungen (9):

$$Q_k = p_k\, Q_{k-2}; \tag{10}$$

ich zeige zunächst, dass $Q_{k-2} > 0$ ist. Für $k = 2$ ist dies offenbar richtig; sei also $k > 2$. Aus (2) für $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$ folgt, wie früher:

$$Q_\nu + Q_{\nu+1} > 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k-1); \tag{11}$$

ist nun $Q_{k-3} = 0$, so folgt aus (11) für $\nu = k-3$, dass $Q_{k-2} > 0$ ist; ist aber $Q_{k-3} > 0$, so folgt aus (9) und (4) für $\nu = k-2$ wiederum, dass $Q_{k-2} > 0$ ist. Nun folgt aus (9) und (10): $Q_k > 0$ und aus (3) für $\nu > k$ ergibt sich wie vorhin, dass auch die Ungleichheiten gelten:

$$Q_\nu > 0 \qquad (\nu = k, k+1, \ldots).$$

Hieraus erschliesst man unmittelbar, wie bei Satz D, die Konvergenz des Kettenbruches. Es gilt also der

Zusatz zu D. In (2) und (3) darf für $\nu = k$ Gleichheit gelten, wenn nur $p_k\, q_{k-2} > 0$ und $k \geqq 2$ ist.

Schliesslich zitiere ich noch den Satz:

Satz E. Bei einem Kettenbruch mit lauter positiven Elementen, wobei aber auch $q_\nu = 0$ zugelassen wird, sofern nur nicht alle $q_{2\nu+1}$ verschwinden, nähern sich die Näherungsbrüche gerader Ordnung wachsend oder doch nicht abnehmend einem Grenzwert k, die ungerader Ordnung abnehmend oder doch nicht wachsend einem Grenzwert K, und es ist $0 < k \leqq K$; nur ist möglicherweise eine endliche Anzahl sinnloser Näherungsbrüche vorhanden. (Vgl. Perron, Lehrbuch, S. 239—240.)

§ 2.

Ein allgemeines Konvergenzkriterium und Folgerungen aus demselben.

Ist allgemein der Kettenbruch vorgelegt:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots, \tag{12}$$

wo die a_ν, b_ν beliebige *reelle* Zahlen sind (die Null zugelassen), so setzen wir:

$$a_\nu = \alpha_\nu |a_\nu|, \qquad b_\nu = \beta_\nu |b_\nu|,$$

wobei

$$\alpha_\nu = \begin{cases} +1 \text{ für } a_\nu \geq 0 \\ -1 \text{ für } a_\nu < 0, \end{cases} \qquad \beta_\nu = \begin{cases} +1 \text{ für } b_\nu \geq 0 \\ -1 \text{ für } b_\nu < 0. \end{cases}$$

Nun ist leicht einzusehen, dass:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1}|a_1|}{|b_1|}, \quad \frac{\frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1}\beta_\nu}|a_\nu|}{|b_\nu|}\right]_2^\infty = K$$

(das Zeichen $\equiv$ bedeutet Äquivalenz); im folgenden benutze ich durchweg diese transformierte Form des Kettenbruches (12) und setze zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1}\beta_\nu} = \varepsilon_\nu \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \\ &\vartheta_1 = 0, \ \vartheta_\nu = \frac{1-\varepsilon_\nu}{2} \quad (\nu = 2, 3, \ldots); \quad |a_\nu| = p_\nu, \ |b_\nu| = q_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ich beweise zunächst den

Satz 1. *Wenn die Elemente des Kettenbruches* (12) *reell sind*[1] *— und für eine Folge positiver Zahlen:* $\varrho_0 = 1$, $\varrho_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *den Ungleichungen genügen:*

$$q_\nu \geq \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{14}$$

[1] Dies wird in dieser Arbeit stillschweigend stets vorausgesetzt.

so ersetze man an allen Stellen, an denen $\vartheta_{k+1} = 1$ $(k \geq 1)$ ist, die Gliederfolge

$$\frac{\varepsilon_k p_k|}{|q_k} - \frac{p_{k+1}|}{|q_{k+1}} \quad durch \quad \frac{\varepsilon_k p_k|}{|q_k - \varrho_k} + \frac{\varrho_k|}{|1} + \frac{\dfrac{p_{k+1}}{\varrho_k}\Big|}{\Big|q_{k+1} - \dfrac{p_{k+1}}{\varrho_k}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens entsteht ein Kettenbruch mit lauter nicht-negativen Elementen (das Vorzeichen von $\varepsilon_1 p_1$ spielt im folgenden keine Rolle). *Seine Konvergenz, die nach den Sätzen B, C und D entschieden werden kann, ist dann hinreichend für die Konvergenz des Kettenbruches* (12). Dabei sind $\varepsilon_\nu, p_\nu, q_\nu, \vartheta_\nu$ durch die Relationen (13) bestimmt, wo α_ν und β_ν die Charakteristiken[1] von a_ν und b_ν sind.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach und analog dem, von Herrn Perron für einen ähnlichen spezielleren Satz[2] gegebenen Beweise.

Bezeichnet man den ursprünglichen Kettenbruch abkürzend mit K, den abgeänderten mit K', so ist aus den Bedingungen (14) unmittelbar ersichtlich, dass K' lauter nicht-negative Elemente hat. Nun seien A_ν, B_ν die Näherungszähler und -nenner von K; aus K geht dann K' nach Satz A durch Extension hervor, wobei die neu hinzugekommenen Näherungsbrüche die Form haben:

$$\frac{A_k - \varrho_k A_{k-1}}{B_k - \varrho_k B_{k-1}} \quad \text{für} \quad \varepsilon_{k+1} = -1.$$

Daher ist die Konvergenz von K' hinreichend für die von K. W. z. b. w.

[1] Nach Herrn Pringsheim nennt man $\alpha = \frac{a}{|a|}$ die Charakteristik von a; für $a = 0$ sei $\alpha = +1$.

[2] Perron, Lehrbuch, S. 242–244. Dort lauten die Bedingungen in unserer Bezeichnungsweise:

$$p_\nu > 0, \quad q_\nu \geq p_\nu + \vartheta_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

In etwas anderer Weise hat Herr Tietze (auf dem S. 210 in Fussn. 1 a) a. O., Satz 2) unter diesen Voraussetzungen die Konvergenzbedingungen formuliert. Offenbar sind meine Bedingungen — und dies ist in Satz 1 das wesentlich Neue — auch wenn durchweg $\varrho_\nu = 1, p_\nu \neq 0$ gesetzt wird, allgemeiner. Natürlich sind auch die Bedingungen (14) zur Konvergenz des Kettenbruches (12) nicht notwendig; der alternierende zweigliedrig-periodische Kettenbruch z. B.

$$q - \frac{1|}{|q} + \frac{1|}{|q} - \frac{1|}{|q} + \frac{1|}{|q} - + \cdots$$

konvergiert sicher für $0 < q < 1$, wovon man sich am leichtesten mit Hilfe eines Perron'schen Satzes (vgl. sein Lehrbuch, § 51, Satz 17) oder auch des Konvergenzkriteriums periodischer Kettenbrüche überzeugt. Damit aber für gewisse ϱ_ν (14) erfüllt sei, müsste jedenfalls $q_{\nu-1} q_\nu \geq p_\nu \vartheta_\nu^2$ sein, und dies ist in unserem Falle für kein ungerades ν erfüllt.

Man beachte, dass für ein $\vartheta_{\nu+1} = 0$ (also $\varepsilon_{\nu+1} = +1$) das zugehörige ϱ_ν im extendierten Kettenbruch gar nicht vorkommt; es übt also auf die Konvergenz gar keinen Einfluss aus und es kann ihm irgend ein nur von Null verschiedener Wert, etwa der Wert 1, zugeschrieben werden.

Man kann, analog dem Vorgange des Herrn PERRON, zeigen, dass in gewissen Fällen die Konvergenz von K' auch notwendig ist für die von K. Dies ist z. B. der Fall, wenn alle $q_\nu > 0$ sind und wenn man für $p_{k+1} > 0$ $\varrho_k = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ setzt, weil dann:

$$\frac{A_k - \varrho_k A_{k-1}}{B_k - \varrho_k B_{k-1}} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} \text{ ist für } \varepsilon_{k+1} = -1.$$

Diesen speziellen Ansatz machte schon Herr PERRON (Lehrbuch, S. 245—246, Satz 16).

Ich untersuche nun genauer die Struktur des Kettenbruches K'. Dieser Kettenbruch besitzt jedenfalls die Teilnenner:

$$q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} - \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);^1$$

für $\vartheta_{\nu+1} = 0$ $(\nu \geq 1)$ besitzt nun K' die Gliederfolge:

$$\cdots + \frac{\cdots |}{| q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}}} + \frac{p_{\nu+1} |}{| q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2}} + \cdots;$$

ist hingegen $\vartheta_{\nu+1} = 1$, so besitzt K' die Gliederfolge:

$$\cdots + \frac{\cdots |}{| q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} - \varrho_\nu} + \frac{\varrho_\nu |}{| 1} + \frac{\frac{p_{\nu+1}}{\varrho_\nu} |}{| q_{\nu+1} - \frac{p_{\nu+1}}{\varrho_\nu} - \varrho_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2}} + \cdots.$$

Wendet man nun Satz C an (unter der Voraussetzung, dass durchweg $a_\nu \neq 0$ ist), so ist ersichtlich, dass K' konvergiert, wenn mindestens eine der Reihen:

[1] Aus dem vorhergesagten ist nämlich klar, dass für $\vartheta_{k+2} = 1$ der Teilnenner $q_{k+1} - \frac{p_{k+1} \vartheta_{k+1}}{\varrho_k}$ nach Extension in $q_{k+1} - \frac{p_{k+1} \vartheta_{k+1}}{\varrho_k} - \varrho_{k+1}$ übergeht, während er für $\vartheta_{k+2} = 0$ unverändert bleibt.

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{\vartheta_{\nu+1}=0}^{\nu} \left[\frac{\left(q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}}\right)(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1}\vartheta_{\nu+2})}{p_{\nu+1}}\right]^{\frac{1}{2}} \\[3ex]
\displaystyle\sum_{\vartheta_{\nu+1}=1}^{\nu} \left[\frac{q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} - \varrho_\nu}{\varrho_\nu}\right]^{\frac{1}{2}} \\[3ex]
\displaystyle\sum_{\vartheta_{\nu+1}=1}^{\nu} \left[\frac{\left(q_{\nu+1} - \frac{p_{\nu+1}}{\varrho_\nu} - \varrho_{\nu+1}\vartheta_{\nu+2}\right)\varrho_\nu}{p_{\nu+1}}\right]^{\frac{1}{2}}
\end{array}\right\} \quad (\nu \geqq 0)$$

divergiert. Dabei sei $p_0 = 1$, $q_0 = 1$, $\vartheta_0 = 0$, $\varrho_{-1} = 1$; man beachte auch, dass $\vartheta_1 = 0$ ist.

Ferner lässt sich ein spezieller Fall einfach erledigen. Sind nämlich von einer gewissen Stelle an alle $\varepsilon_\nu p_\nu$ negativ, so wird durch die Extension von dieser Stelle an zwischen *je zwei* aufeinander folgende Näherungsbrüche von K ein neuer eingeschaltet; die Näherungsbrüche von K sind daher für K' von einer gewissen Stelle an alle von gerader oder alle von ungerader Ordnung. Um also die Konvergenz von K behaupten zu dürfen, hat man sich nach Satz E nur dessen zu versichern, dass nicht alle Teilnenner ungerader Ordnung von K' verschwinden. Dies ist sicher der Fall, wenn $q_1 - \varrho_1 \vartheta_2 > 0$ ist, oder wenn unter den Produkten, die aus je zwei aufeinander folgenden Teilnennern von K' gebildet werden, wenigstens eines von Null verschieden ist; mit diesen Aussagen gleichwertig ist aber die, dass die obigen Reihen nicht alle drei identisch verschwinden.

Schliesslich kann man auch den Wert von K' abschätzen, denn es ist offenbar:

$$0 \leqq \varepsilon_1 K' \leqq \frac{p_1}{q_1 - \varrho_1 \vartheta_2}.$$

Durch Zusammenfassung dieser Resultate ist folgender Satz bewiesen:

Satz 2. *Wenn die Elemente des Kettenbruches* (12) *für eine Folge positiver Zahlen* ϱ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *den Ungleichungen genügen:*

$$p_\nu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{15}$$

$$q_\nu \geqq \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{16}$$

so ist jede der folgenden zwei Bedingungen für die Konvergenz hinreichend:

1) *Von den drei Reihen:*

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\vartheta_{\nu+1}=0} \left[\frac{(\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu\, \vartheta_\nu)\,(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1}\, \vartheta_{\nu+2})}{\varrho_{\nu-1}\, p_{\nu+1}}\right]^{\frac{1}{2}} && (\alpha_1)\\
&\sum_{\vartheta_{\nu+1}=1} \left[\frac{\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu\, \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu}{\varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (\nu \geqq 0) && (\beta_1)\\
&\sum_{\vartheta_\nu=1} \left[\frac{\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu\, \vartheta_{\nu+1}}{p_\nu}\right]^{\frac{1}{2}} && (\gamma_1)
\end{aligned}\right.$$

ist wenigstens eine divergent.

2) *Von einer gewissen Stelle an sind alle* $\vartheta_\nu = 1$ *und es verschwindet nicht eine jede der Reihen* (α_1), (β_1) *und* (γ_1) *identisch.*

Es ist auch:

$$0 < \varepsilon_1\, K \leqq \frac{p_1}{q_1 - \varrho_1\, \vartheta_2}.$$

Dabei sind p_ν, q_ν, ϑ_ν durch die Gleichungen (13) bestimmt, und es ist $\varrho_{-1} = 1$, $\varrho_0 = 1$, $\vartheta_0 = 0$.

Bemerkung 1. Statt zu sagen: es verschwindet nicht eine jede der Reihen (α_1), (β_1) und (γ_1) identisch, kann man natürlich auch sagen: es verschwinden nicht alle die Zahlen:

$$(\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu\, \vartheta_\nu)\,(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1}\, \vartheta_{\nu+2}) \quad \text{für alle} \quad \vartheta_{\nu+1} = 0,$$

$$\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu\, \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu \quad \text{für alle} \quad \vartheta_{\nu+1} = 1,$$

$$\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu\, \vartheta_{\nu+1} \quad \text{für alle} \quad \vartheta_\nu = 1.$$

Oder auch: es verschwinden nicht alle die Zahlen:

$$\begin{aligned}
Z_\nu = (\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu\, \vartheta_\nu)\,(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1}\, \vartheta_{\nu+2})\,(1 - \vartheta_{\nu+1}) + (\varrho_{\nu-1}\, q_\nu -{}&\\
- p_\nu\, \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu)\, \vartheta_{\nu+1} + (\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu\, \vartheta_{\nu+1})\, \vartheta_\nu;&
\end{aligned}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

wegen $\vartheta_{\nu+1}\,(1 - \vartheta_{\nu+1}) = 0$ ist offenbar

$$\begin{aligned}
Z_\nu &= (\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu\, \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu\, \vartheta_{\nu+1})\,(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1}\, \vartheta_{\nu+2})\,(1 - \vartheta_{\nu+1}) +\\
&\quad + (\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu\, \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu\, \vartheta_{\nu+1})\, \vartheta_{\nu+1} + (\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu\, \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu\, \vartheta_{\nu+1})\, \vartheta_\nu\\
&= (\varrho_{\nu-1}\, q_\nu - p_\nu\, \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1}\, \varrho_\nu\, \vartheta_{\nu+1})\,[(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1}\, \vartheta_{\nu+2})\,(1 - \vartheta_{\nu+1}) + \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}];
\end{aligned}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

schliesslich ist klar, dass dieser Ausdruck zugleich mit

$$(\varrho_{\nu-1} q_\nu - p_\nu \vartheta_\nu - \varrho_{\nu-1} \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1})(q_{\nu+1} - \varrho_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2} + \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}) \qquad (17)$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

verschwindet oder nicht. Man kann also 2) durch die Aussage ersetzen:

2′) *Von einer gewissen Stelle an sind alle* $\vartheta_\nu = 1$ *und für mindestens einen Wert von* $\nu\,(\nu \geq 0)$ *ist* (17) *von Null verschieden.*

Bemerkung 2. Die Bedingungen (15) und (16) sind i. a. zur Konvergenz nicht hinreichend, selbst wenn darin durchweg Ungleichheit gilt und unendlich oft $\vartheta_\nu = 1$ ist.[1] Der alternierende Kettenbruch z. B., in welchem allgemein

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_{2\nu-1} = 1, \quad \varrho_{2\nu} = 1 \\[1ex] q_{2\nu-1} = q^\nu, \quad q_{2\nu} = 1 + \dfrac{1}{q^{2\nu}}, \quad q > 1 \\[1ex] p_{2\nu-1} = q^\nu - \dfrac{1}{q^\nu}, \quad p_{2\nu} = \dfrac{1}{p_{2\nu-1}} - \dfrac{q^\nu}{q^{2\nu} - 1} \end{array}\right| \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, divergiert immer. Man überzeugt sich hiervon leicht mit Hilfe eines PERRON'schen Satzes (vgl. PERRON, Lehrbuch, S. 247, Satz 17). Aus demselben folgt nämlich, dass der Kettenbruch $\left[\dfrac{(-1)^\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ divergiert, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{I} \quad (q_{2\nu-1} q_{2\nu} + p_{2\nu}) q_{2\nu+1} \geq q_{2\nu-1} p_{2\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\text{II} \quad \sum_\nu \left(\frac{c_3 c_5 \ldots c_{2\nu-1}}{c_4 c_6 \ldots c_{2\nu}} d_{2\nu} + \frac{c_2 c_4 \ldots c_{2\nu}}{c_3 c_5 \ldots c_{2\nu+1}} d_{2\nu+1}\right) \text{ konvergiert,}$$

wobei

$$c_\nu = p_{2\nu-1} p_{2\nu} q_{2\nu-3} q_{2\nu+1}, \quad d_\nu = (q_{2\nu-1} q_{2\nu} + p_{2\nu}) q_{2\nu+1} - q_{2\nu-1} p_{2\nu+1}$$

ist. Nun lautet jetzt die Bedingung I:

$$\left[q^\nu \left(1 + \frac{1}{q^{2\nu}}\right) + \frac{q^\nu}{q^{2\nu} - 1}\right] q^{\nu+1} \geq q^\nu \left(q^{\nu+1} - \frac{1}{q^{\nu+1}}\right),$$

[1] Für den speziellen Fall: $p_\nu = 1$, $\varrho_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ reicht dies sicherlich aus; vgl. Satz 3.

und dies ist offenbar erfüllt. Ferner ist

$$c_\nu = q^{\nu-1}\, q^{\nu+1} = q^{2\nu}, \quad \text{also} \quad \frac{c_\nu}{c_{\nu+1}} = \frac{1}{q^2} < 1,$$

$$d_\nu = \left[q^\nu \left(1 + \frac{1}{q^{2\nu}}\right) + \frac{q^\nu}{q^{2\nu}-1}\right] q^{\nu+1} - q^{2\nu+1} + \frac{1}{q}$$

$$= q + \frac{q^{2\nu+1}}{q^{2\nu}-1} + \frac{1}{q} < q + 1 + \frac{q^2}{q-1};$$

hieraus ist ersichtlich, dass auch Bedingung II erfüllt ist. Schliesslich sind auch die Bedingungen (15) und (16) erfüllt, wenn man durchweg $\varrho_\nu = 1$ setzt. Denn dieselben lauten jetzt:

$$q^{2\nu} > 1, \quad q^\nu \geqq q^\nu - \frac{1}{q^\nu}, \quad 1 + \frac{1}{q^{2\nu}} > 1$$

und es gilt sogar überall Ungleichheit.

Für $\varrho_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ erhält man aus Satz 2 eine Verallgemeinerung eines TIETZE'schen Satzes (auf dem S. 210 in Fussn 1 angeführten Orte a), Satz 3; b) Satz 6; vgl. auch PERRON, Lehrbuch, S. 244—245) selbst dann, wenn man die Reihe (γ_1) ausser acht lässt.

Sind von einem gewissen ν an alle $\varepsilon_\nu p_\nu$ positiv, so kann man den Satz 2 noch verschärfen; in diesem Falle sind nämlich von einem gewissen Gliede an die Kettenbrüche K' und K identisch und man kann leicht auf den Kettenbruch K' statt Satz C den allgemeinen Satz B anwenden. Man erhält so den

Zusatz zu Satz 2. Sind von einer gewissen Stelle an alle $\vartheta_\nu = 0$, so kann die Bedingung 1) durch die folgende ersetzt werden:

Von den beiden Reihen

$$\sum_1^\infty{}_\nu \frac{p_1 p_3 \cdots p_{2\nu-1}}{p_2 p_4 \cdots p_{2\nu}} q_{2\nu}, \qquad \sum_1^\infty{}_\nu \frac{p_2 p_4 \cdots p_{2\nu}}{p_3 p_5 \cdots p_{2\nu+1}} q_{2\nu+1}$$

ist mindestens eine divergent und es verschwindet nicht eine jede der Reihen (α_1), (β_1) und (γ_1) identisch.[1]

Es sei bemerkt, dass die ϱ_ν denselben Charakter haben, wie die unendlich vielen willkürlichen Parameter p_ν im PRINGSHEIM'schen Hauptkriterium.[2]

[1] Für dies letztere genügt es jetzt offenbar, wenn von einer gewissen Stelle an alle $q_\nu > 0$ sind. Die im Zusatze enthaltene Konvergenzbedingung ist dann bekanntlich stets eine notwendige.

[2] Vgl. die auf S. 210 in Fussn. 4 zitierte Arbeit, insbesondere § 2; den Übergang von den ϱ_ν zu den p_ν gewinnt man durch die Substitution: $\varrho_\nu = \frac{|b_\nu|}{p_\nu}$

§ 3.

Ein Konvergenzsatz für Kettenbrüche der Form $\left[\frac{\pm 1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und seine Verallgemeinerung.

Für $p_\nu = 1$, $\varrho_\nu = 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ erhält man aus Satz 2 den spezielleren

Satz 2'. Wenn die Elemente des Kettenbruches (12) den Bedingungen genügen:

$$\left.\begin{array}{l} p_\nu = 1 \\ q_\nu \geqq \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1} \end{array}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist jede der folgenden zwei Bedingungen für die Konvergenz hinreichend:

1) Von den drei Reihen:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{\vartheta_{\nu+1}=0} \left[(q_\nu - \vartheta_\nu)(q_{\nu+1} - \vartheta_{\nu+2})\right]^{\frac{1}{2}} & (\alpha_2) \\ \sum\limits_{\vartheta_{\nu+1}=1} \left[q_\nu - \vartheta_\nu - 1\right]^{\frac{1}{2}} & (\beta_2) \\ \sum\limits_{\vartheta_\nu=1} \left[q_\nu - \vartheta_{\nu+1} - 1\right]^{\frac{1}{2}} & (\gamma_2) \end{array}\right\} \quad (\nu \geqq 0)$$

ist mindestens eine divergent.

2) Von einer gewissen Stelle an sind alle $\vartheta_\nu = 1$ und es verschwindet nicht eine jede der Reihen (α_2), (β_2) und (γ_2) identisch.

Es ist auch:

$$0 < \varepsilon_1 \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty < \frac{1}{|b_1| - \vartheta_2}.$$

In Satz 2' ist ein Konvergenzkriterium des Herrn Tietze (auf dem S. 210 in Fussn. 1 angeführten Orte b), Satz 1) speziell enthalten.

Ich kann, unabhängig von Satz 2 den Satz 2' selbst noch wesentlich verallgemeinern. Zur Herleitung des ersteren Satzes wurde nämlich auf den extendierten Kettenbruch K' Satz C angewendet; ist nun durchweg $p_\nu = 1$, $\varrho_\nu = 1$, so kann man auf K' leicht den weitergehenden Satz B anwenden, weil alle seine Teilzähler und daher auch ein Produkt solcher Teilzähler gleich 1 ist. Ist ferner

unendlich oft $\vartheta_\nu = 1$, so tritt unendlich oft 1 als Teilnenner auf; ist aber nur endlich oft $\vartheta_\nu = 1$, so hat K' von einem gewissen Gliede an die Form:

$$\frac{1|}{|q_\nu} + \frac{1|}{|q_{\nu+1}} + \frac{1|}{|q_{\nu+2}} + \cdots.$$

Man gewinnt so bei Beachtung der Bemerkung 1, S. 221 den

Satz 3. *Der Kettenbruch* (12) *konvergiert, wenn die Bedingungen erfüllt sind:*

1) $|a_\nu| = 1$
2) $|b_\nu| \geqq \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}$ $\Big\}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$
3) *Es ist mindestens für einen Wert von* ν $(\nu \geq 0)$:

$$(q_\nu - \vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+1})(q_{\nu+1} - \vartheta_{\nu+2} + \vartheta_\nu + \vartheta_{\nu+1}) > 0.$$

Nur wenn von einem gewissen ν *an alle* ϑ_ν *verschwinden, muss ausserdem die Divergenz der Reihe* $\sum_1^\infty {}_\nu\, q_\nu$ *vorausgesetzt werden.* (Die ja stets eine notwendige Bedingung der Konvergenz darstellt, im Falle unendlich vieler negativer ε_ν aber eo ipso erfüllt ist.) Ferner ist:

$$0 < \varepsilon_1 \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty < \frac{1}{|b_1| - \vartheta_2}.$$

Für $a_\nu = 1$ ist

$$\alpha_\nu = 1, \quad \varepsilon_\nu = \frac{1}{\beta_{\nu-1}\,\beta_\nu} = \beta_{\nu-1}\,\beta_\nu = \frac{b_{\nu-1}\,b_\nu}{|b_{\nu-1}\,b_\nu|};$$

man gelangt so zu dem in der Einleitung zitierten Satze.

Diesen Satz erweitere ich mit Hilfe der äquivalenten Transformation:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \varrho \cdot \frac{a_1|}{|\varrho\, b_1} + \frac{a_2|}{\left|\frac{b_2}{\varrho}\right.} + \frac{a_3|}{|\varrho\, b_3} + \frac{a_4|}{\left|\frac{b_4}{\varrho}\right.} + \cdots. \qquad (\varrho \neq 0)$$

Sei $\varrho > 0$; wendet man auf den so transformierten Kettenbruch Satz 3 an, so erhält man den allgemeineren

Satz 4. *Der Kettenbruch* (12) *konvergiert, wenn für ein positives* ϱ *die Bedingungen erfüllt sind:*

$$\left.\begin{aligned} &1)\ |a_\nu| = 1 \\ &2)\ \varrho\,|b_{2\nu-1}| \geqq \vartheta_{2\nu-1} + \vartheta_{2\nu},\ \frac{|b_{2\nu}|}{\varrho} \geqq \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1} \end{aligned}\right\} (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

3) *Es ist mindestens für einen Wert von* ν *entweder*

$$\left(\frac{q_{2\nu}}{\varrho} - \vartheta_{2\nu} - \vartheta_{2\nu+1}\right)(\varrho\, q_{2\nu+1} - \vartheta_{2\nu+2} + \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1}) > 0 \qquad (\nu \geqq 0)$$

oder

$$(\varrho\, q_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu})\left(\frac{q_{2\nu}}{\varrho} - \vartheta_{2\nu+1} + \vartheta_{2\nu-1} + \vartheta_{2\nu}\right) > 0 \qquad (\nu \geqq 1).$$

Nur wenn von einem gewissen ν *an alle* ϑ_ν *verschwinden, muss ausserdem die Divergenz der Reihe* $\sum\limits_{1}^{\infty}{}_\nu\, q_\nu$ *vorausgesetzt werden.*

Man kann Satz 4 leicht auf Kettenbrüche, deren Teilzähler beliebige, von Null verschiedene Werte haben, übertragen. Denn es ist ja

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv p_1\left[\frac{\varepsilon_1}{q_1}, \frac{\varepsilon_\nu\, p_\nu}{q_\nu}\right]_2^\infty \equiv p_1\left[\frac{\varepsilon_\nu}{h_\nu}\right]_1^\infty,$$

wo die h_ν durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\left.\begin{aligned} h_1 = q_1, \quad h_{2\nu} &= \frac{p_3\, p_5 \ldots p_{2\nu-1}}{p_2\, p_4\, p_6 \ldots p_{2\nu}} \cdot q_{2\nu} \\ h_{2\nu+1} &= \frac{p_2\, p_4 \ldots p_{2\nu}}{p_3\, p_5 \ldots p_{2\nu+1}} \cdot q_{2\nu+1} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{18}$$

Wendet man auf den so transformierten Kettenbruch Satz 4 an, so folgt:

Satz 5. *Der Kettenbruch* (12) *konvergiert, wenn für ein positives* ϱ *die Bedingungen erfüllt sind:*

$$\left.\begin{aligned} &1)\ p_\nu > 0 \\ &2)\ \varrho\, h_{2\nu-1} \geqq \vartheta_{2\nu-1} + \vartheta_{2\nu},\ \frac{h_{2\nu}}{\varrho} \geqq \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1} \end{aligned}\right\} (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

3) *Es ist mindestens für einen Wert von* ν *entweder*

$$\left(\frac{h_{2\nu}}{\varrho} - \vartheta_{2\nu} - \vartheta_{2\nu+1}\right)(\varrho\, h_{2\nu+1} - \vartheta_{2\nu+2} + \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu+1}) > 0 \quad (\nu \geqq 0)$$

oder

$$(\varrho h_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu-1} - \vartheta_{2\nu}) \left(\frac{h_{2\nu}}{\varrho} - \vartheta_{2\nu+1} + \vartheta_{2\nu} + \vartheta_{2\nu-1}\right) > 0 \quad (\nu \geqq 1).$$

Nur wenn von einem gewissen ν an durchweg $\vartheta_\nu = 0$ ist, muss ausserdem die Divergenz der Reihe $\sum_{1}^{\infty} h_\nu$ vorausgesetzt werden.

Dabei sind die h_ν, p_ν, q_ν, ϑ_ν, ε_ν durch die Gleichungen (18) und (13) bestimmt, und $h_0 = 1$ zu setzen.

Wenden wir schliesslich auf den extendierten Kettenbruch K' Satz D an, so erhalten wir unmittelbar den

Satz 6. *Der Kettenbruch (12) konvergiert, wenn mindestens für einen Wert von ν $p_\nu = 0$ ist und für ein k $(k \geqq 1)$ die Ungleichungen erfüllt sind:*

$$\left.\begin{aligned} & q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} + p_{\nu+1}(1 - \vartheta_{\nu+1}) > 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots k-1) \\ & q_\nu - \frac{p_\nu \vartheta_\nu}{\varrho_{\nu-1}} - \varrho_\nu \vartheta_{\nu+1} > 0 \qquad (\nu = k, k+1, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Den Zusatz zu D verwende ich nur für den Fall, dass

$$\vartheta_k = 1, \quad \vartheta_{k+1} = 0$$

ist. Der Kettenbruch K' hat dann offenbar die Gliederfolge:

$$\cdots + \frac{\cdots|}{|q_{k-1} - \frac{p_{k-1}\vartheta_{k-1}}{\varrho_{k-2}} - \varrho_{k-1}} + \frac{\varrho_{k-1}|}{|1} + \frac{\frac{p_k}{\varrho_{k-1}}\Big|}{\Big|q_k - \frac{p_k}{\varrho_{k-1}}} + \frac{p_{k+1}|}{|q_{k+1} - \varrho_{k+1}\vartheta_{k+2}} + \cdots,$$

und man erhält den

Zusatz. *Ist für ein k $(k \geqq 2)$*

$$\vartheta_k = 1, \ \vartheta_{k+1} = 0, \ p_k \left(q_{k-1} - \frac{p_{k-1}\vartheta_{k-1}}{\varrho_{k-2}} - \varrho_{k-1}\right) > 0,$$

so darf in (19) für $\nu = k$ auch Gleichheit gelten.

Wir werden den Satz 6 und seinen Zusatz in § 4 benutzen.

§ 4.

Ableitung neuer Konvergenzkriterien aus den allgemeinen durch Spezialisierung unendlich vieler Parameter.

Für spezielle Werte der ϱ_ν erhält man aus obigen Sätzen einfachere Konvergenzkriterien, ähnlich, wie Herr PRINGSHEIM[1] aus seinem Hauptkriterium neue Sätze ableitete. Es können dabei vielfach umständliche Formeln auftreten, daher beschränke ich mich auf die einfachsten bemerkenswerten Fälle.

Ich nehme im folgenden an, dass

$$q_\nu > 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Setzt man

$$\varrho_\nu = \frac{q_\nu}{u_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

und zur Abkürzung

$$\frac{p_1}{q_1} = r_1, \quad \frac{p_\nu}{q_{\nu-1}\, q_\nu} = r_\nu \quad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

so erhalten die Ungleichungen (16) die Form:

$$1 \geqq u_{\nu-1}\, r_\nu\, \vartheta_\nu + \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{20}$$

und die Reihen (α_1), (β_1) und (γ_1) gehen in die folgenden über (man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $q_\nu = 1$, $p_\nu = r_\nu$ setzen):

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{\vartheta_{\nu+1}=0} \left[\frac{(1 - u_{\nu-1}\, r_\nu\, \vartheta_\nu)\left(1 - \dfrac{\vartheta_{\nu+2}}{u_{\nu+1}}\right)}{r_{\nu+1}}\right]^{\frac{1}{2}} & (\alpha_3) \\ \displaystyle\sum_{\vartheta_{\nu+1}=1} \left[u_\nu - u_{\nu-1}\, u_\nu\, r_\nu\, \vartheta_\nu - 1\right]^{\frac{1}{2}} & (\beta_3) \\ \displaystyle\sum_{\vartheta_\nu=1} \left[\frac{1 - u_{\nu-1}\, r_\nu - \dfrac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu}}{u_{\nu-1}\, r_\nu}\right]^{\frac{1}{2}} & (\gamma_3) \end{array}\right\} \quad (\nu \geqq 0);$$

dabei sei: $u_{-1} = 1$, $u_0 = 1$, $r_0 = 1$.

[1] Auf dem S. 210 Fussn. 4 angeführten Orte und in seiner früheren Arbeit: Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche [Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. der Wiss. (München), Math.-phys. Klasse, Bd. 28, 1898, S. 295—324].

1. Setzt man nun

$$u_\nu = 1 + \vartheta_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

so reduziert sich Ungleichung (20) auf

$$r_\nu \vartheta_\nu \leq \frac{1 + \vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+1}}{(1 + \vartheta_{\nu-1})(1 + \vartheta_\nu)} \quad (\nu = 2, 3, \ldots), \tag{21}$$

und man erhält den

Satz 7. *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $(r_\nu > 0,\ \varepsilon_\nu = \pm 1)$ *konvergiert, wenn die Ungleichungen* (21) *erfüllt sind und mindestens eine der Reihen*

$$\sum_{\vartheta_{\nu+1}=\vartheta_{\nu+2}=0} \left[\frac{1 - r_\nu \vartheta_\nu (1 + \vartheta_{\nu-1})}{r_{\nu+1}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (\nu \geq 0) \quad (\vartheta_{-1} = 0)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\vartheta_\nu=\vartheta_{\nu+1}=1} \left[1 - 2(1 + \vartheta_{\nu-1}) r_\nu\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\sum_{\vartheta_\nu=1} \left[\frac{1 - (1 + \vartheta_{\nu-1}) r_\nu - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{2}}{r_\nu}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (\nu \geq 2)$$

divergiert, oder von einem gewissen ν *an alle* $\vartheta_\nu = 1$ *sind und dann die obigen Reihen nicht alle drei identisch verschwinden.*

So konvergiert z. B. der Kettenbruch

$$\frac{r_1|}{|1} - \frac{r_2|}{|1} - \frac{r_3|}{|1} + \frac{r_4|}{|1} - \frac{r_5|}{|1} - \frac{r_6|}{|1} + \cdots, \tag{22}$$

wobei allgemein

$$\vartheta_{3\nu-2} = 0, \quad \vartheta_{3\nu-1} = 1, \quad \vartheta_{3\nu} = 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, wenn für ein ε

$$\varepsilon > 0, \quad r_{3\nu-1} \leq \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\nu^2}, \quad r_{3\nu} \leq \frac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Die $r_{3\nu-2}$ sind ganz willkürlich (nur positiv).

2. Setzt man

$$u_1 = 1, \; u_\nu = 1 + u, \quad u > 0 \quad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

so wird die Reihe (β_3) sicher divergieren, falls nur für unendlich viele Werte von ν $\vartheta_\nu = 0$, $\vartheta_{\nu+1} = 1$ ist. Ist dies aber nicht der Fall, so wird von einem gewissen ν an entweder stets $\vartheta_\nu = 1$ oder stets $\vartheta_\nu = 0$ sein. Im ersteren Fall ist die Bedingung 2') (S. 222) sicher erfüllt, wenn für ein $\nu \geqq 2$ $\vartheta_\nu = 0$ ist. Aus Satz 2 und seinem Zusatz folgt daher mit Rücksicht auf Bemerkung 1 (S. 221) der

Satz 8. *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $(r_\nu > 0)$ *konvergiert, wenn für ein* $u > 0$

$$r_2 \vartheta_2 \leqq 1 - \frac{\vartheta_3}{1+u}, \quad r_\nu \vartheta_\nu \leqq \frac{1 + u - \vartheta_{\nu+1}}{(1+u)^2} \quad (\nu = 3, 4, \ldots) \tag{23}$$

ist. Sind aber 1) *von* $\nu = 2$ *an alle* $\vartheta_\nu = 1$, *so muss in* (23) *mindestens einmal Ungleichheit gelten; sind* 2) *von einem gewissen* ν *an, alle* $\vartheta_\nu = 0$, *so ist ausserdem die Bedingung:*

$$\sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{r_1 r_3 \ldots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \ldots r_{2\nu+1}}\right) \textit{ divergiert,} \tag{24}$$

erforderlich

Für den Kettenbruch (22) erhält man hieraus die Konvergenzbedingungen:

$$r_2 \leqq \frac{u}{1+u}, \quad r_3 \leqq \frac{1}{1+u}, \quad r_{3\nu-1} \leqq \frac{u}{(1+u)^2}, \quad r_{3\nu} \leqq \frac{1}{1+u} \quad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

$r_{3\nu-2}$ ist willkürlich nur positiv.

Speziell für $u = 1$ reduzieren sich die Bedingungen (23) auf die folgenden:

$$r_2 \vartheta_2 \leqq 1 - \frac{\vartheta_3}{2}, \quad r_\nu \vartheta_\nu \leqq \frac{1}{2} - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{4} \quad (\nu = 3, 4, \ldots).$$

3. Setzt man

$$u_\nu = \frac{2\nu - 1}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so erhält man in ganz ähnlicher Weise den

Satz 9. *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $(r_\nu > 0)$ *konvergiert, wenn*

$$r_\nu \vartheta_\nu < \left(1 - \frac{\nu \vartheta_{\nu+1}}{2\nu - 1}\right) \cdot \frac{\nu - 1}{2\nu - 3} \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \tag{25}$$

ist. Sind aber 1) *von* $\nu = 2$ *an alle* $\vartheta_\nu = 1$, *so muss in* (25) *wenigstens einmal Ungleichheit gelten; sind* 2) *von einem gewissen* ν *an alle* $\vartheta_\nu = 0$, *so ist die Zusatzbedingung* (24) *auch noch erforderlich.*

4. Sei nun für r_ν auch der Wert Null zulässig; *ich nehme an*, dass die Reihe $\sum_2^\infty {}_\nu\, r_\nu \vartheta_\nu$ konvergiert und nicht grösser als 1 ist. Sei ferner die Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ niemals abnehmend und insbesondere $u_1 \geqq 1$. Dann ist $\vartheta_{\nu+1} \leqq u_{\nu-1}$ und daher sind die Ungleichungen (20) sicher erfüllt, wenn die folgenden gelten:

$$r_\nu \vartheta_\nu \leqq \frac{1}{u_{\nu-1}} - \frac{1}{u_\nu} \quad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{26}$$

Nun setze ich:

$$\frac{1}{u_\nu} = \sum_{\nu+1}^\infty {}_n\, r_n \vartheta_n, \tag{d}$$

falls diese Reihe nicht verschwindet; sie kann aber nur dann verschwinden, wenn

$$\vartheta_n = 0 \quad (n = \nu + 1, \nu + 2, \ldots)$$

ist, und in diesem Falle können $u_\nu, u_{\nu+1}, \ldots$ beliebige Werte haben, welche nur der vorausgesetzten Bedingung $u_n \geqq u_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ genügen, man kann etwa $u_n = u_{\nu-1}$ $(n = \nu, \nu + 1, \ldots)$ setzen.

Es ist klar, dass jetzt die Ungleichungen (26) erfüllt sind.

Sei zunächst durchweg $r_\nu > 0$; das allgemeine Glied der Reihe (β_s) ist jetzt:

$$(u_\nu - u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{für } (\vartheta_{\nu+1} = 1),$$

ferner folgt aus Ungleichung (26):

$$u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu \leqq u_\nu - u_{\nu-1},$$

oder

$$u_\nu - u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu - 1 \geqq u_{\nu-1} - 1.$$

Gibt es nun unendlich viele $\vartheta_{\nu+1} = 1$, so ist offenbar $\lim_{\nu=\infty} u_\nu = \infty$, und die Reihe (β_3) hat unendlich viele über alle Schranken wachsende Glieder, daher divergiert sie. Dies sichert die Konvergenz des Kettenbruches.

Sind aber von einem gewissen ν an alle $\vartheta_\nu = 0$, so kann man den Zusatz zu Satz 2 anwenden; die Reihe (α_3) hat sicher von Null verschiedene Glieder (sogar unendlich viele), daher ist jetzt für die Konvergenz des Kettenbruches die stets notwendige Bedingung, dass mindestens eine der Reihen:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \frac{r_1 r_3 \ldots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}}, \quad \sum_1^\infty{}_\nu \frac{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \ldots r_{2\nu+1}}$$

divergiere, auch hinreichend.

Um auch den Fall zu erledigen, dass wenigstens eines der p_ν (oder, was auf dasselbe hinauskommt, der r_ν) verschwindet, ist Satz 6 anzuwenden. Die Bedingungen dieses Satzes lauten jetzt:

$$1 - u_{\nu-1} r_\nu \vartheta_\nu + r_{\nu+1}(1 - \vartheta_{\nu+1}) > 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots k-1) \tag{27}$$

$$1 - u_{\nu-1} r_\nu \vartheta_\nu - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} > 0 \quad (\nu = k, k+1, \ldots) \text{ für ein gewisses } k. \tag{28}$$

Gibt es erstens unendlich viele $\vartheta_\nu = 1$, so ist Ungleichheit (27) stets erfüllt, denn für ein $\nu = \lambda$ kann die linke Seite von (27) nur so verschwinden, dass

$$\vartheta_\lambda = 1, \ u_{\lambda-1} r_\lambda = 1, \ r_{\lambda+1}(1 - \vartheta_{\lambda+1}) = 0$$

wird; aus $u_{\lambda-1} r_\lambda = 1$ folgt aber:

$$\vartheta_\nu = 0 \quad (\nu = \lambda + 1, \lambda + 2, \ldots),$$

und dies ist gegen unsere Voraussetzung. Auch Ungleichheit (28) ist jetzt erfüllt (bei geeigneter Wahl von k), denn man hat:

$$1 - u_{\nu-1} r_\nu \vartheta_\nu - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} \geqq \frac{1}{u_\nu}(u_\nu - u_{\nu-1} u_\nu r_\nu \vartheta_\nu - 1) \geqq \frac{u_{\nu-1} - 1}{u_\nu}$$

und dies ist von einem gewissen ν an grösser als Null, weil $\lim_{\nu=\infty} u_{\nu-1} = \infty$. Also der Kettenbruch konvergiert.

Ist zweitens durchweg $\vartheta_\nu = 0$ $(\nu \geqq 2)$, so sind die Ungleichheiten (27) und (28) offenbar schon für $k = 2$ erfüllt; der Kettenbruch konvergiert auch jetzt.

Gibt es schliesslich drittens endlich viele $\vartheta_\nu = 1$, so sei:

$$\vartheta_{k_1} = 1,\ \vartheta_{k_2} = 1, \ldots,\ \vartheta_{k_\mu} = 1 \quad (\mu \geq 1)$$

$$\vartheta_\nu = 0 \quad (\nu \neq k_1, \ldots, k_\mu).$$

Die Bedingung (28) ist auch in diesem Falle erfüllt, etwa für $k = k_\mu + 1$. Für $\nu = k_\mu$ wird die linke Seite der Ungleichheit (27): $1 - 1 + r_{k_\mu+1}$; dies ist grösser als Null, *wenn* $r_{k_\mu+1} > 0$ *ist.* Ferner ist für $\nu < k_\mu$:

$$u_{\nu-1}\, r_\nu\, \vartheta_\nu = \frac{r_\nu\, \vartheta_\nu}{r_\nu\, \vartheta_\nu + r_{\nu+1}\, \vartheta_{\nu+1} + \cdots + r_{k_\mu}} < 1,$$

daher ist jetzt die Ungleichheit (27) für alle ν gültig und man hat Konvergenz des Kettenbruches.

Es bleibt noch der Unterfall zu erledigen, *dass* $r_{k_\mu+1} = 0$ *ist.* Jetzt sind die Ungleichungen (27) nur für $\nu \neq k_\mu$ erfüllt, es kommt also (laut dem Zusatze zu Satz 6) noch darauf an, ob der Ausdruck:

$$1 - u_{k_\mu-2}\, r_{k_\mu-1}\, \vartheta_{k_\mu-1} - \frac{1}{u_{k_\mu-1}} = 1 - \frac{r_{k_\mu-1}\, \vartheta_{k_\mu-1}}{r_{k_\mu-1}\, \vartheta_{k_\mu-1} + r_{k_\mu}} - r_{k_\mu} = \frac{r_{k_\mu}}{r_{k_\mu-1}\, \vartheta_{k_\mu-1} + r_{k_\mu}} - r_{k_\mu}$$

verschwindet oder nicht. Im letzteren Falle hat man sicher Konvergenz. Er verschwindet aber dann und nur dann, wenn die Gl. gilt:

$$r_{k_\mu-1}\, \vartheta_{k_\mu-1} + r_{k_\mu} = 1. \tag{29}$$

Ist zunächst $\mu = 1$, so kann man statt k_1 einfach k schreiben und da $\vartheta_{k-1} = 0$ sein muss, lautet Gl. (29) jetzt: $r_k = 1$. Man hat somit den Kettenbruch zu untersuchen $(r_{k_\mu+1} = r_{k+1} = 0)$:

$$\frac{r_1|}{|1} + \cdots - \frac{1|}{|1} + \frac{0|}{|1} + \frac{r_{k+2}|}{|1} + \cdots.$$

Jetzt ist:

$$Q_k = Q_{k-1} - Q_{k-2} = r_{k-1} Q_{k-3},\ Q_{k+1} = Q_k,\ Q_{k+2} = (1 + r_{k+2})\, Q_k, \ldots;$$

$$P_k = P_{k-1} - P_{k-2} = r_{k-1} P_{k-3},\ P_{k+1} = P_k,\ P_{k+2} = (1 + r_{k+2})\, P_k, \ldots;$$

also der Kettenbruch konvergent oder divergent, je nachdem $r_{k-1} Q_{k-3}$ ungleich oder gleich Null ist. Nun ist $Q_{-1} = 0$ und $Q_{k-3} > 0$ für ein $k \geq 3$, weil $\varepsilon_\nu r_\nu \geq 0$ für $\nu \leq k - 1$ ist; also ist für $r_{k-1} = 0$ der Kettenbruch wesentlich divergent; für $k = 2$, $r_1 \neq 0$ ausserwesentlich divergent, im übrigen konvergent.

Für $\mu \geqq 2$ ist $r_{k_\mu} < 1$, also kann Gl. (29) nur dann bestehen, wenn $k_\mu - 1 = k_{\mu-1}$, $\vartheta_{k_\mu - 1} = \vartheta_{k_{\mu-1}} = 1$, $r_{k_{\mu-1}} + r_{k_\mu} = 1$ ist. Dies ist nur so möglich, dass $\mu = 2$ ist. Schreibt man statt k_1 einfach k, so ist also $r_{k+1} = 1 - r_k$ und man erhält den Kettenbruch ($r_{k_\mu+1} = r_{k+2} = 0$):

$$\frac{r_1|}{|1} + \cdots + \frac{r_{k-1}|}{|1} - \frac{r_k|}{|1} - \frac{1-r_k|}{|1} + \frac{0|}{|1} + \frac{r_{k+3}|}{|1} + \cdots.$$

Jetzt ist:

$$Q_k = Q_{k-1} - r_k Q_{k-2},\ Q_{k+1} = Q_k - (1 - r_k)\, Q_{k-1} = r_k (Q_{k-1} - Q_{k-2}) = r_k r_{k-1} Q_{k-3},$$

$$Q_{k+2} = Q_{k+1} = r_k r_{k-1} Q_{k-3},\ Q_{k+3} = (1 + r_{k+3})\, r_k r_{k-1} Q_{k-3}, \ldots$$

$$P_k = P_{k-1} - r_k P_{k-2},\ P_{k+1} = P_k - (1 - r_k)\, P_{k-1} = r_k r_{k-1} P_{k-3},$$

$$P_{k+2} = P_{k+1} = r_k r_{k-1} P_{k-3},\ P_{k+3} = (1 + r_{k+3})\, r_k r_{k-1} P_{k-3}, \ldots.$$

Da nun $r_k > 0$ ist, so konvergiert oder divergiert der Kettenbruch wiederum, je nachdem $r_{k-1} Q_{k-3}$ ungleich oder gleich Null ist —. Wir können diese Resultate in folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 10. *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ($r_\nu \geqq 0$) *konvergiert, wenn*

$$s = \sum_{2}^{\infty}{}_{\nu}' \, r_\nu \vartheta_\nu \leqq 1 \tag{30}$$

ist. Nur wenn durchweg $r_\nu > 0$ und von einem gewissen ν an $\vartheta_\nu = 0$ ist, ist für die Konvergenz die weitere Bedingung erforderlich:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{r_1 r_3 \ldots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \ldots r_{2\nu+1}}\right) \text{ divergiert.}$$

Ferner ist in den vier Ausnahmefällen:

1) $\vartheta_2 = 1,\ \vartheta_\nu = 0\ (\nu \geqq 3),\ r_2 = 1,\ r_3 = 0$

2) $\vartheta_k = 1,\ \vartheta_\nu = 0\ (\nu \neq k),\ r_{k-1} = 0,\ r_k = 1,\ r_{k+1} = 0,\ (k \geqq 3)$

3) $\vartheta_2 = 1,\ \vartheta_3 = 1,\ \vartheta_\nu = 0\ (\nu \geqq 4),\ r_2 + r_3 = 1,\ r_4 = 0$

4) $\vartheta_k = 1,\ \vartheta_{k+1} = 1,\ \vartheta_\nu = 0\ (\nu \neq k,\ k+1),\ r_{k-1} = r_{k+2} = 0,\ r_k + r_{k+1} = 1,$ $(k \geqq 3)$,

der Kettenbruch wesentlich divergent; nur wenn im Falle 1) oder 3) $r_1 \neq 0$ ist, divergiert er ausserwesentlich.

Es gilt auch die Beziehung:

$$0 < \varepsilon_1 \begin{bmatrix} \varepsilon_\nu r_\nu \\ 1 \end{bmatrix}_1^\infty < \frac{r_1}{1 - s\,\vartheta_2}.$$

§ 5.

Fortsetzung; ein weiterer Konvergenzsatz für Kettenbrüche der Form $\begin{bmatrix} a_\nu \\ 1 \end{bmatrix}_1^\infty$.

5. Die Bedingung (30) können wir durch eine allgemeinere ersetzen, wenn wir wieder annehmen, dass $r_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ ist.

Wir betrachten die Reihe:

$$r_\nu \vartheta_\nu + r_{\nu+1} \vartheta_\nu \vartheta_{\nu+1} + r_{\nu+2} \vartheta_\nu \vartheta_{\nu+1} \vartheta_{\nu+2} + \cdots = \sum_0^\infty{}_k\, r_{\nu+k} \vartheta_\nu \vartheta_{\nu+1} \ldots \vartheta_{\nu+k} = \sigma_{\nu-1}; \tag{31}$$

dieselbe besitzt nur dann unendlich viele (nicht verschwindende) Glieder, wenn von einem gewissen ν an alle $\vartheta_\nu = 1$ sind. Ist dies der Fall, so sei die Reihe konvergent. Nun setze ich:

$$\left.\begin{aligned} u_0 = 1,\ u_{\nu-1} &= u_{\nu-2} \text{ für } \vartheta_\nu = 0 \\ u_{\nu-1} &= \frac{1}{\sigma_{\nu-1}} \text{ für } \vartheta_\nu = 1 \end{aligned}\right\}; \tag{32}$$

für $\vartheta_\nu = 1$ ist das erste Glied der Reihe (31) r_ν, und sie besteht aus so viel Gliedern, wie negative Teilzähler von $\varepsilon_\nu r_\nu$ an (inkl.) bis zum *nächsten* positiven (exkl.) aufeinander folgen; ich nehme an, dass diese Summe den Wert 1 nicht übersteigt; dann ist

$$u_\nu \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

daher ist die Bedingung (20) erfüllt, falls $\vartheta_\nu = 0$ ist. Ist aber $\vartheta_\nu = 1$, so ist sogar die schärfere Ungleichung:

$$r_\nu \leqq \frac{1}{u_{\nu-1}} - \frac{\vartheta_{\nu+1}}{u_\nu} \quad \text{für} \quad \vartheta_\nu = 1 \tag{33}$$

auch erfüllt, denn für $\vartheta_{\nu+1} = 0$ ist dieselbe offenbar richtig und für $\vartheta_{\nu+1} = 1$ folgt aus (32) (da auch $\vartheta_\nu = 1$ ist):

$$\frac{1}{u_{\nu-1}} - \frac{1}{u_\nu} = \sigma_{\nu-1} - \sigma_\nu = r_\nu. \text{ Qu. e. d.}$$

Ist nun von einem gewissen ν an stets $\vartheta_\nu = 0$, so kann man den Zusatz 2 (S. 223) anwenden; ist aber für unendlich viele Werte von ν: $\vartheta_{\nu+1} = 1$, so genügt zur Konvergenz des Kettenbruches, dass mindestens eine der Reihen (α_3), (β_3) und (γ_3) divergiert.

Ich untersuche speziell den Fall, dass für eine positive Zahl $\delta\,(\delta < 1)$ und für eine positive ganze Zahl N die weiteren Bedingungen erfüllt sind:

$$\sigma_{\nu-1} \leqq \delta \quad \text{für} \quad \nu \geqq N \tag{34}$$

d. h., dass

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sigma_\nu < 1$$

ist und zeige, dass in diesem Falle die Reihe (β_3) sicher divergiert.

Sei nämlich $\vartheta_{\nu+1} = 1$; für $\vartheta_\nu = 1$ folgt nun aus (33):

$$u_{\nu-1}\, u_\nu\, r_\nu \leqq u_\nu - u_{\nu-1},$$

daher ist

$$u_\nu - u_{\nu-1}\, u_\nu\, r_\nu - 1 \geqq u_{\nu-1} - 1,$$

und mit Rücksicht auf (32) und (34) für $\nu \geqq N$:

$$u_\nu - u_{\nu-1}\, u_\nu\, r_\nu - 1 \geqq \frac{1}{\sigma_{\nu-1}} - 1 \geqq \frac{1}{\delta} - 1.$$

Ferner ist für $\vartheta_\nu = 0$ $(\nu \geqq N)$:

$$u_\nu - u_{\nu-1}\, u_\nu\, r_\nu\, \vartheta_\nu - 1 = u_\nu - 1 \geqq \frac{1}{\delta} - 1;$$

die Reihe (β_3) divergiert also.

Es gilt daher der

Satz 11. *Der Kettenbruch* $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $(r_\nu > 0)$ *konvergiert, wenn die Bedingungen erfüllt sind:*

$$\sum_k^\infty r_{\nu+k}\, \vartheta_\nu\, \vartheta_{\nu+1} \ldots \vartheta_{\nu+k} = \sigma_{\nu-1} \leqq 1 \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \tag{35}$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sigma_\nu < 1. \tag{36}$$

Nur wenn von einem gewissen ν an alle ϑ_ν verschwinden, ist für seine Konvergenz ausserdem erforderlich, dass die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{r_1 r_3 \ldots r_{2\nu-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}} + \frac{r_2 r_4 \ldots r_{2\nu}}{r_3 r_5 \ldots r_{2\nu+1}} \right) \textit{ divergiert.} \tag{24}$$

Auf den Zusammenhang dieses Satzes mit anderen Sätzen habe ich bereits in der Einleitung hingewiesen.

Offenbar ist die Bedingung (24) sicher erfüllt, wenn $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \sqrt{\frac{1}{r_\nu}}$ divergiert.

Die Bedingung (35) selbst ist für die Konvergenz des Kettenbruches nicht notwendig; vgl. hierzu etwa Satz 8.

Schlussbemerkung. Sind die Elemente des Kettenbruches reelle Funktionen von reellen Variabeln, so kann man analoge Sätze über *gleichmässige* Konvergenz aufstellen.

A PROOF THAT EVERY AGGREGATE CAN BE WELL-ORDERED.

By

PHILIP E. B. JOURDAIN.[1]

Introduction.

If we are given any aggregate whatever, M, which contains at least one member, this M has a perfectly definite class of »chains». A »chain» is any definite part of M which is well-ordered. Thus, if we know that M contains the three members a, b and c, we know that to M belong six chains. The class of M-chains falls into sub-classes, of which one, K_γ, contains all those chains, and only those chains, that are of ordinal type γ.

Our object is to re-arrange all the chains in the K's in other classes, which we will call »K-classes», and these can be defined as follows. A »K-class» is a class of chains such that (I) it contains chains respectively of all types less than some ordinal number γ, and (II) if x and y are members of the K-class, and the type of x is greater than that of y, then y is a segment of x. It is evident that a K-class determines uniquely a single chain, such that the K-class is composed of the segments of this chain and that, if y has no immediate predecessor, the chain determined by the K-class whose members are respectively of all types less than γ, is of type γ.

If there is a chain which is a member of one of the K's which exhausts M, the theorem is obviously proved. If there is not such a chain, we will fill up

[1] The undersigned does not accept the principal wiew on which is based the above paper of the regretted, highly esteemed mathematician Philip B. Jourdain, which paper seems to be the last one written by him. But it contains so many new points of wiew that I have thought I would do the mathematical Public a service by publishing it. At the same time, however, I wish to point out that this journal will not to any further extent be at the disposal for papers of the same kind. *G. Mittag-Leffler.*

(Cf. G. Mittag-Leffler, »Die Zahl, Einleitung zur Theorie der analytischen Functionen», The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 17, Nos 3, 4. May 1920. — »Talet, inledning till teorien för analytiska funktioner», Det Kgl. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Meddelelser, II, 5. 1920).

from the perfectly definite set of K's a set of K-classes, which can afterwards be proved to consist of *all* possible K-classes which contain one chain of each type of all possible M-chains. Each of these K-classes define a chain which is of higher type than any M-chain; so that it is impossible that there should not be a member of some K which exhaust M.

Before we can assume that there is an ordinal number so great that every M-chain is of type less than this ordinal number, we have to prove that it is impossible that the series of K's is of the same type as the series of all ordinal numbers. This can be proved quite simply.

The rule for re-arrangement of the K's in K-classes is defined by an induction which in general is transfinite, and which does not depend on Zermelo's principle of arbitrary selection.

If we take K_1, we can evidently arrange without arbitrariness all the members of K_1 in unit K-classes. If now all the K's whose suffixes are less than γ are arranged in K-classes, we can give a rule for arranging all the members K_γ among the K-classes just mentioned. Consider the cases: — (I) γ has an immediate predecessor $\gamma - 1$; (II) γ has no immediate predecessor.

(I) In this case, if there is a class K_γ, put for the moment with each member, x, of $K_{\gamma-1}$ all the members of K_γ which continue x. Then replace this complex by a set of which each member is a member of K_γ associated with x. By this means we finally get the whole set of K's of which the suffixes are equal to or less than γ into a set of K-classes of which each consists of chains of all types equal to or less than γ.

(II) In this case, each of the K-classes consists of chains respectively of all types less than γ... By what has been said before, the chain defined by any one of these K-classes is of type γ.

We have thus obtained a chain of type greater than any M-chain. The only alternative is that some M-chain exhausts M.

I.

In a famous memoir published in 1883, GEORG CANTOR[1] states that any well-defined aggregate whatever can be brought into the form of a well-ordered aggregate, and promised to return in a future publication to this »law of thought which seems to be both fundamental, rich in consequences, and particularly remark-

[1] *Math. Ann.*, Vol. XXI, p. 550; or *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883, p. 6. Cf. Cantor's *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite numbers*, Chicago and London, 1915, pp. 62, 62, 66.

able for its generality». This promise was never fully carried out, and it is not difficult to guess why it was not carried out. In fact, it seems[1] that, to well-order a given aggregate M he imagined an arbitrary selection of a member m_1 of M and laid down that m_1 schould be the first in a well-ordered aggregate; then he imagined a selection of any other member m_2 from the remaining part of M, and laid down that m_2 should be the second in the above well-ordered aggregate, and, in general, he imagined that, after any finite or transfinite number of members have been selected from M, any member of the remaining part of M is chosen as the member of the above well-ordered aggregate to follow immediately all the m's already chosen. This process suggests itself at once[2]; but the fact is that it is not sharply defined and cannot, then, be regarded as a method of strict proof.[3] If, indeed, we have to select a finite number (n) of members from an aggregate M, we can do so arbitrarily — provided, of course, that M has as many as n members. But if we are merely given that M is infinite, and we are required to select an infinity of members from M, we cannot, since specification one by one of an infinity of members is naturally impossible, decide which members are selected and which are not unless we imagine a rule to decide the question unambiguously. Since such a rule must be expressed by a finite number of symbols none of which, like » . . . », sometimes indicates vaguely, we get a demand for »definability in a finite number of words». Thus, KRONECKER held that a definition is permissible only if in every case it can be tested by a finite number of inferences.[4]

When Cantor gave a proof that every transfinite aggregate T has parts with the cardinal number $\aleph_0$, he said explicitly[5] that, if, »by any rule», we have

[1] Cf. a remark due to E. ZERMELO in *Math. Ann.*, Vol. LXV, 1908, p. 125.

[2] For example, HARDY explicitly used it in the paper to be mentioned below. In my paper of 1904 also mentioned below I first relied on Hardy's result, but afterwards (*Math. Ann.*, Vol. LX, 1905, p. 68) made use explicitly of the notion of an infinity of arbitrary selections (cf. *Rev. de Math.*, Vol. VIII, 1906, p. 9, note 1).

[3] BOREL (*Math. Ann.*, Vol. LX, 1905, p. 195, and *Leçons sur la théorie des fonctions*, Second ed., Paris, 1914, pp. 135—181). Any reasons Borel may have had for his rejection of a series of arbitrary choices are not given, and it seems that he passed over an important logical point involved, since he admitted any enumerable infinity of choices and rejected a non-enumerable infinity of choices (cf. HOBSON, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, Cambridge, 1907, p. 210, note; cf. pp. 196—197). Borel made use of an enumerable infinity of choices in the above *Leçons*, for example, pp. 12—13.

[4] H. WEBER, *Jahresber. der D. M. V.*, Vol. II, 1891—2, pp. 20; *Math. Ann.*, Vol. XLIII, 1893, p. 15. See also HOBSON, *op. cit.*, pp. 196—197. Cf. SCHOENFLIES, *Encycl. der math. Wiss.*, Vol. I, Part 1, p. 188, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Leipzig, 1900, p. 5, and *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Leipzig and Berlin, 1913, pp. 6—7.

[5] *Math. Ann.*, Vol. XLVI, 1895, p. 493; *Contributions*, p. 105. On p. 205 of the *Contributions*, I wrongly assumed that Cantor, like RUSSELL (*The Principles of Mathematics*, Cambridge, 1903, pp. 122—123) selected each t arbitrarily.

taken away a finite number $(t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1})$ of T, the always remains the possibility of taking away a further member t_ν. From this the question arises as to whether we *can* give such a rule, whatever our T may be; but, if we accept as an axiom that we can always do so, Cantor's proof is perfectly valid. It must be noticed that in many other cases the process of arbitrary selection of an infinity of members was carefully avoided by Cantor. Thus, hedefi ned the multiplication of two cardinal numbers[1], and, although the extension of this definition to a transfinite number of cardinal numbers immediately suggests itself and leads, if the possibility of an infinity of arbitrary selections is admitted, to a definition of the exponentiation of a cardinal number by a transfinite cardinal number, yet, he preferred to give[2] an independent definition of the latter process which is not at first sight connected with the definition of multiplication apparently because the independent definition could be formulated without any use being made of an infinity of arbitrary selections. Where Cantor *did* use the principle of arbitrary selection was in a case in which that use was so little apparent that it was only discovered long afterwards.[3] Still the principle of selection was used both explicitly and implicity by many other mathematicians, and sometimes in work of which Cantor expressed approval.[4]

But Cantor explicitly accepted as an axiom this principle of selection in the problem of well-ordering any given aggregate M. The proof of this well-ordering seems to have been completed about 1895, and, though not printed, was commu-

[1] *Math. Ann.*, Vol. XLVI, 1895, p. 485; *Contributions*, p. 92.

[2] *Math. Ann.*, Vol. XLVI, 1895, p. 487; *Contributions*, p. 95. Schoenflies drew attention to the fact, which must have been the one that led Cantor to his definition, that multiplication could be defined for an infinity of cardinal numbers. The idea was worked out in the symbols of »mathematical logic» by A. N. Whitehead (*Amer. Journ. of Math.*, Vol. XXIV, 1902, pp. 383—385), who did not however mention that the essential idea is due to Schoenflies; although elsewhere (*ibid.* p. 367) he mentioned Schoenflies's book. The fact of an axiom being required here and in many other cases was certainly not noticed by either Whitehead or Russell before 1903 (cf. *ibid.*, pp. 368, 380; Russell, *op. cit.*, pp. 122—123; and my paper in *Quart. Journ. Math.*, 1907, p. 364), and was not pointed out by them in print until after Zermelo's discovery was generally known. In many cases it was Zermelo or others who also were not »mathematical logicians» who first pointed out that the principle of arbitrary selection is tacitly used in much mathematical reasoning (cf. *Math. Ann.*, Vol. LIX, 1904, p. 516; Vol. LXV, 1908, pp. 113—115). From this and from the historical remark in my above-cited paper (pp. 360—366), it must, I think, be concluded that »mathematical logic» has not been of help in perceiving the logical difficulties that beset an infinite series of arbitrary choices. It has not been of any help in solving these difficulties.

[3] Cf. *Contributions*, p, 205. The first to publish a remark that the principle of selection was used in this place seems to have been Zermelo (*Math. Ann.*, Vol. LXV, 1908, p. 114, fifth paragraph).

[4] Thus, in letters to me he expressed approval of the method of Hardy (1903) referred to below, and the discovery (1904) of Julius König on the infinite products of certain cardinal numbers — which depends on the legitimacy of making an infinity of arbitrary selections.

nicated to HILBERT (1896) and DEDEKIND (1899).[1] If W is the system of all ordinal numbers, Cantor[2] considered it as evident that any given aggregate M either is equivalent to a part of W or else that M contains a part P equivalent to W. In the latter case Cantor discovered the following contradiction: If β is the ordinal type of W arranged in order of magnitude, β is an ordinal number, and hence, since the type of an aggregate with no last term is of higher rank than any term of the aggregate, $\beta > \beta$. This last contradiction is closely allied to the well-known contradiction published by BURALI-FORTI in 1897.

In 1903 HARDY published a construction, in the continuum of real numbers, of an aggregate of cardinal number $\aleph_1$. In the introduction to his paper he advanced the argument that, given any aggregate M whose cardinal number is greater than $\aleph_0$, we can choose from it successively individuals corresponding to all the numbers of Cantor's first and second number-classes; if this process were to come to an end, the cardinal number of M would be $\aleph_0$, so that we must conclude that its cardinal number, by the »equivalence theorem» first proved by SCHRÖDER and BERNSTEIN, is equal to or greater than $\aleph_1$.[3] Further, if it is greater than $\aleph_1$, it is equal to or greater than $\aleph_2$, ond so on; and if it is greater than $\aleph_\nu$ for all finite values of ν, it must be equal to or greater than $\aleph_\omega$, for we can choose individuals from M corresponing to all the numbers of the first, second, third, ..., ν th, ... number-classes. And, by a repetition of these two arguments, we can shew that, if there is no Aleph equal to the cardinal number of M, the latter cardinal number must be at least equal to the cardinal number of the aggregate of all ordinal numbers — or of all Alephs, and so must be greater than any Aleph. This principle of selection was used in the construction given by Hardy of a set of points of cardinal number $\aleph_1$, but it was not very evident that it did so, since a method of proceeding for some way past ω was actually given.[4]

It was the general argument of Hardy just described, together with a disproof of RUSSELL's statement, in his book of 1903, that the series of all ordinal numbers is not well-ordered, that prompted me, in 1903[5], to use Burali-Forti's contradiction to prove that, if an aggregate cannot be well-ordered, it must be

[1] Cantor communicated this proof to me on November 4, 1903 because I had previously communicated to him (October 29, 1903) an almost identical proof which I had independently discovered.

[2] In his letter just mentioned, Cantor wrote:

»Nimmt man nun irgend eine unendliche Vielheit V und setzt voraus, dass ihr *kein* Aleph als Cardinalzahl zukommt, so betrachte ich es mit Ihnen als einluchtend, dass in dieses V das System W hineinprojicirt gedacht werden kann; ...

[3] References to this and some other papers to be dealt with below are given in my above-cited paper of 1907, pp. 363—365.

[4] Cf. HOBSON. *op. cit.*, pp. 191—194, 207—208, 210—211.

[5] *Phil. Mag.*, January, 1904, Series 6, Vol. VII, pp. 61—75.

susceptible of having a contradiction proved of it if we assume that it has a cardinal number or ordinal type. It will be observed that the validity of the process of making an infinite series of arbitrary selections was simply assumed by me in consequence of Hardy's work; but, in common with most other mathematicians, I was quite unconscious at that time of the fact that any unproved assumption was made by the admission of the principle of selection.

The credit of being the first to publish definitely the wiew that a postulate is involved in the theorem that any aggregate can be well-ordered is due to ZERMELO (1904) some months after my own paper just mentioned. Zermelo's object was the formulation of the axiom used when an infinite series of selections is made: mine was to solve a difficulty which arises when Zermelo's difficulty is overcome.[1] Zermelo returned to the subject four years afterwards, gave his postulate the form of a »principle of selection», and emphasized his view that this principle is the only one required in well-ordering an aggregate and was not touched on in my own attempt. The latter contention is quite true, and, in the paper that follows, I will give a definite rule which fulfils the purpose of the axiomatic principle of Zermelo, but from which it appears that the earlier argument brought forward by Cantor and myself does really, in spite of deceptive appearances, enter essentially into the proof that the rule is necessary and sufficent for the purpose of well-ordering.

II.

In LEBESGUE'S[2] proof of the theorem in which BOREL generalized a process used by HEINE, the principle of arbitrary selection is not used, whereas it was used in some proofs given by Borel and several other mathematicians. In fact,

[1] Various aspects of this difference have been recognised by Hobson *Proc Lond Math. Soc.* (2), Vol. III, 1905, pp. 171, 184—185, and *op. cit.*, pp. 195, 208—210) and Russell (*Proc. Lond. Math. Soc.* (2), Vol. IV, 1906, p. 29). However it appears from § X that the two difficulties cannot be separated so much as Russell thought, while Russell (*loc. cit.*, pp. 34—35, 43—44) failed to grasp that then my theory was that there *is* a class of ordinal numbers, but the series of all ordinal numbers has no type and no associated cardinal number (cf. my remark in ibid., p. 282). In consequence of § IX below, it is necessary to admit that there is no such thing as a class of all ordinal numbers; and another point which my theory has led to be modified is due to the fact that there is a mistake in *ibid.*, pp. 271—272. It seems impossible to avoid the theory that there are ordinal numbers beyond those indicated by Cantor, and from which . This theory has the avantage over the theory (held since 1905) of Russell, that it includes much more of the theory of the transfinite; while Russell's very limited theory does not exlude false appearances of classes at all more effectively than my present theory.

[2] *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1904, pp. 104—105; cf. HARDY, *Cource of Pure Mathematics*, Second ed., Cambridge, 1914, pp. 186—188; and SCHOENFLIES, *op. cit.* 1900, pp. 51—52, Part II, Leipzig, 1908, pp. 76—80, and *op. cit.*, 1913, pp. 234—252.

the theorem, for the linear continuum of real numbers, is that an infinity of given intervals for which every point of the continuum is in the interior of at least one of these given intervals may be replaced by a finite set of such intervals, without the property ceasing to hold that every point of the continuum is in the interior of at least one of these intervals; and, if we wish actually to select the sought finite set of intervals in the case where each one of the infinity of intervals given in the theorem has no first or last or other particularized member, there seems to be no alternative but to use the principle of arbitrary selection. In the theorem on uniform continuity proved by Heine after Cantor, in which a case of the theorem was first used, the principle was not required, since the intervals had ends; but, in the first proof of Borel, an arbitrary selection was made at each of an infinity of steps.

Lebesgue proved that, if the right-hand end (b) of the continuum of $(a\ldots b)$ of real numbers which is to be covered by some finite set chosen out of the infinity of intervals given in the theorem is not reached by some finite selection made out of the latter set of intervals, there must be a point x to the left of b which is either the last point that we can ever reach from a or the first point that we cannot reach when all possible finite selections are considered. Then at once results the inconsistency of the existence of such a point x with the conditions that the set of intervals in the theorem is required to fulfil. Hence b must be reached by some finite set selected out of these intervals.

The use of an argument like this, when we replace the continuous series $(a\ldots b)$ by a series (S) of ordinal numbers in order of magnitude and deduce conclusions about the least ordinal number which is not reached by the various segments of S such that each of them images, in a one-one correspondence, some part of a given aggregate M, must have suggested itself to many as possibly leading to a means of well-ordering M; but such an analogous argument resting on all the possible well-orderable parts of M were first published by HARTOGS.[1] However, Hartogs did not refer in any way to Lebesgue. Hartogs's chief result is the proof, which does not depend on Zermelo's principle, that, for any aggregate M, there is a well-ordered aggregate whose cardinal number is neither less than nor equal to that of M. Thus, from Hartogs's theorem results that, if all aggregates are comparable, any aggregate can be well-ordered. This corollary, however, has long been known[2], and was proved, though not in these words and not in a forcible way, by Cantor as early as 1883. It is the result

[1] »Über das Problem der Wohlordnung», *Math. Ann.*, Vol. LXXVI, 1915, pp. 438—443.

[2] Cf. my paper of 1907 cited above, p. 366.

spoken of just before that is the truly interesting part of Hartogs's paper.[1] To obtain this result, Hartogs's process can be greatly simplified by introducing the consideration of ordinal types and the concept of a »chain» which we will now proceed to explain.

III.

Consider all those parts of a non-null aggregate M which can be well-ordered, and suppose these parts to be well-ordered in all possible ways. We will call a part of M which is well-ordered in ordinal type γ an »M chain of type γ», provided that the same part in different orders — even though the part in all these orders may be of the same ordinal type — forms different »chains».[2]

Of course we do not *assume* that one of the M-chains exhausts M, or, for example, M lacking some one member: this is what we have to prove: all that is necessary for the validity of what follows is that: 'x is an M-chain' is not false for all x's; and this is evidently so if M has any members at all, for we can then select arbitrarily M-chains of, say, one member.

A chain P is said to be a »segment» of a chain Q if P is identical with the chain whose members precede some member of Q. In this case, we will also say that Q »continues» or »is a continuation of» P.

The concept of »chain» allows us to state more shortly than usual an apparent difference that we meet when we consider various aggregates with a view to well-ordering. In the first place, it seems, at first sight, evident that, if chains respectively of all types less than ω can be found among the M-chains there is an M-chain of type ω. This has been admitted, for example, by DEDE-

[1] It must be mentioned that, as is shown below in § X, this result depends on an axiom formulated by Zermelo in 1908, which is other than the principle of selection and which can be proved by using — &, it seems, only by using — the principle of selection or my rule given below.

[2] We may define a »chain», in a way which is, perhaps, preferable from a logical point of view, as follows. An »M-chain» is a class of couples (m, a), where m is a member of M and a is an ordinal number, and the couples are such that in each chain no m or a occurs more than once, and, if a occurs, all ordinals less than a occur also. We will suppose that this chain is well-ordered by arranging the couples in the order of magnitude of the right-hand members (a). We say that a chain »exhausts» M if the class of left-hand members (m) of the couples of the chain consists of all the members of M. This new definition of the word »exhausts» obviously conforms closely to the usual sense if an »M-chain» is, as in the text, a part of M. It may also be mentioned that, in the sense of this note, an »M-chain» is a one-valued *function* where the argument consists of ordinal numbers. Such functions are considered by OSWALD VEBLEN (»Continuous Increasing Functions of Finite and Transfinite Ordinals», *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. IX, 1908, pp. 280—292).

KIND, CANTOR, WHITEHEAD (1902), and RUSSELL (1903).[1] However, it is now recognized that an exact proof of this conclusion cannot be carried through except by using a form of Zermelo's principle of selection, or of what Russell and Whitehead called, from about 1904, »the multiplicative axiom». Indeed, Whitehead and Russell (1912)[2] carefully distinguished »inductive» from »non-reflexive» numbers, and contemplated the existence of numbers which are both non-inductive and non-reflexive. But there seems to be no instance that we can construct that shows the falsity of the above conclusion. On the other hand[3] it is possible to show that chains respectively of all types less than ω_1, may be found among the chains of an aggregate of cardinal number $\aleph_0$, although there is certainly no single chain of type ω_1 which can be extracted from that aggregate. Thus, it would appear that it is sometimes true and sometimes false that[4] if there are M-chains respectively of all types less than γ, there is an M-chain of type γ.

We have assumed that M is not null, that is to say, that it has at least one member. Thus the class of M-chains has at least one member. If, then, we split this class into sub-classes such as K_ξ, — which class consists of all those and only those chains which are of type ξ, — we may conclude, that K_1 is not null, but we do not assume, in general, that any other of these K's has members. But it is to be noticed that, if K_γ has members, every K_ξ, where $1 \leq \xi < \gamma$, has members. If, for example, M is of cardinal number $\aleph_0$, there are such subclasses K_ξ for all values of ξ such that $1 \leq \xi < \omega_1$, and we know on other grounds that this is so only for such K's.

For a given M a particular K_γ either has or has not members; we may not be able to find out which of these two propositions is true, but, for the purposes of our theorem, this is immaterial: the question is logically determinate and we merely have to prove that the class of members of all the K's can be rearranged as indicated below. It is essential to realize that we neither assume that the suffix of one of the K's is transfinite, nor that it is not the case that, however great the transfinite ordinal number ζ may be, there is an M-chain of type ζ. Both these propositions will be deduced from the construction given of chains which exhaust M.

A given M determines uniquely a series of classes K_ξ belonging to it. If this series is arranged in the order of magnitude of the suffixes ξ, either

[1] Se § I above.

[2] *Principia Mathematica*, Vol. II, Cambridge 1912, pp. 3, 187—190, 207—210, 278—288. Cf. § VI below.

[3] In this paper, is the first number of the (2 +) theory of »number-classes» of Cantor.

[4] The problem indicated here is completely solved in § XIV below.

there is a last term of the series or there is not. If there is, let it be K_λ; then any member (say k_λ) of K_λ exhausts M. For if not, there would be a member (m) of M which is not a member of K_λ, and K_λ followed by m would be an M-chain of type $\lambda + 1$, whereas we have supposed that there are no M-chains of type $\lambda + 1$. Further, if there are M-chains of type λ but none of type $\lambda + 1$, it is evident that λ is finite. Thus, if there is a last term K_λ, M is finite. In this case, a well-ordering of M is brought about by any member of K_λ.

Thus, the only case which presents difficulties is that in which there is no last term in the above series of K's. We shall, then, always assume in future that this is so.

IV.

Now Hartogs's chief result may be stated, with the help of the concepts defined in § III, as follows: Assuming that M is not null and that all the K's together form an aggregate which is of the kind that does not give rise to difficulties[1], not only is there at least one K but also there is an upper limit to the suffixes of the K's; let ζ be this limit, then the cardinal number of M is not greater than that of a well-ordered aggregate of type ζ. Hartogs's other results follow obviously from this main result, and the conclusions of this main result follow obviously from — above all — the second of the assumptions given above. It only remains to show that this assumption is merely an equivalent form of some of the axioms formulated by Zermelo in 1908 to avoid difficulties in the theory of aggregates and adopted by Hartogs[2] In fact, Hartogs's[3] aggregate L, which is the same thing as the well-ordered aggregate of all the K's, is to »exist», as Hartogs and others called a certain property[4] which holds in virtue of the axioms just mentioned, and this property would not subsist if the second of the above assumptions did not hold and would subsist if the assumption were to hold. The interesting and important part of Hartogs's paper thus seems to be the conclusion, which can easily be made by means of Zermelo's principle or the rule described below, but which is made by Hartogs without the use of any »principle of selection», that no M can be such that, if ξ is all ordinal numbers in turn, there are M-chains of type ξ.

[1] This is merely the way of stating the axioms referred to in the test below, which exclude such aggregates as W.

[2] *Math. Ann.*, Vol. LXXVI, 1915, pp. 438—440.

[3] *Ibid.*, p. 421.

[4] It might be as well to distinguish this property as »having being» from »existing» in the sense of having at least one member. Thus, the null-class will not »exist» but will »have being».

V.

But examination of the classes K soon showed me that we can without difficulty go far beyond what Hartogs proved.

Hartogs's process enables us to obtain certain information about the class of all M-chains, but not as to whether or no any of these chains exhausts M. In attempting to satisfy the need thus indicated, the difficulty before us is that any given M-chain of type γ is continued by *many* others of type $\gamma+1$, so that apparently we must select one of these at each stage of an attempted construction of a chain to exhaust M. But the method at once suggested itself to me, that, where there are many continuations of type $\gamma+1$ to a chain of type γ, we should assign a repetition of this chain of type γ to each of the chains mentioned of type $\gamma+1$.

We would start from K_1, and, where x takes the values respectively of all the members of K_1, would assign repetitions of x to each of those members of K_2 which continues x, and would, in general, where z takes the values respectively of all the members of K_γ, assign (I) repetitions of z to each of those members of $K_{\gamma+1}$ which continues z, and also (II) all those M-chains which have been, by this rule, from $\gamma=2$ onwards, previously assigned to K_γ. Obviously, all the members of K_ξ, where $\xi<\gamma+1$, are thus transferred so as to form, with their repetitions, classes such that each one contains chains of all types from 1 to γ where each member continues all those members of the same class which are less in type. The series of K's to which this rule applies is of type ω at least, for that series where the suffixes are all the finite ordinal numbers in turn is of this type. Further, we easily see that, if γ has no immediate predecessor and we have a class of chains such that each chain continues all those of lower types and the chains are respectively of all types less than γ, we can extract without a »principle of selection» from the members of these chains a chain of type γ. The series made up in turn of the lowest member of each continuation which is not a member of the chains continued is such a chain. In this way we can find chains of greater and greater ordinal types: some one of these must exhaust M, for otherwise, as we shall see in detail below, M would contain an aggregate equivalent to the aggregate of all ordinal numbers.

These chains are, then, determined *mediately*, through certain classes of chains, and not immediately, as they are by Zermelo's principle of selection.

Suppose, for example, that γ is any finite ordinal number, the above rule of assigning a repetition of a chain of type γ to each of its continuations of type $\gamma+1$ constitutes in combination with the further specification (II) above, a *general rule* for constructing without any arbitrariness several classes of M-

chains such that the members of each class are respectively of all types less than ω, and it is particularly to be noted that each such class defines an M-chain of type ω as the unique chain of which all the segments together make up all the members of the class. Notice that, if we are merely given that M contains chains which are respectively of all types less than ω, but, if x and y are M-chains and the type of x is greater than that of y, then y is not necessarily a segment of x, then apparently we need Zermelo's principle of selection to conclude, from the fact that there are M-chains respectively of all types less than ω, that there is at least one M-chain of type ω. In general, where M is any aggregate, we will call a class of M-chains a »class of direct continuations» or, more shortly, a »K-class», when the class of M-chains is such that, if x and y are any members of the class and the type of x is greater than that of y, then y is a segment of x.

We can prove, then, that there is an M-chain of type ω provided that we are given that there are M-chains of all finite types. Of course this determination of a chain of type ω is a *theoretical* determination exclusively; we are not concerned here with the actual construction, but only with the proof that this construction is logically determinate.

In what follows, the class — which can be proved, in all the cases which interest us, to contain members — of all M-chains will be rearranged by the above rule, which will be stated below with the utmost precision, so as to form several K-classes. Of K-classes, as we must remember, we have the theorem that, if γ is an ordinal number with no immediate predecessor and if the chains which are members of a K-class are respectively of all the types less than γ, it follows, without the aid of any »principle of selection», that there is an M-chain of type γ. Each K-class mentioned above is proved to contain at least one member, and the rule arranges that, if all the chains of types less than γ are distributed amongst these K-classes, the chains of type γ, and there are always such chains (§§ III, V-VII) unless M is finite — are also distributed amongst these K's in a completely non-arbitrary way.

If M is of cardinal number $\aleph_0$, it is not exhausted by chains whose types do not belong to Cantor's second number-class, and, for any number of the second class, there is a chain which exhausts M; secondly, the least ordinal number that is greater than the types of all these chains is ω_1; thirdly, every chain of type belonging to the first number-class, and some chains of higher types, are segments of some of the chains of types belonging to the second number-class; fourthly, each chain which exhausts M is not a segment of a chain of any other type. We shall find that there are analogies with all M's.

VI.

We will now collect together some facts which seem to need continual emphasis, modify slightly our definition of »K-classes», and give an explanation of the notations which will be found convenient to use.

If the class of M-chains contains chains respectively of all types less than γ, we cannot, in general, conclude that it contains M-chains of type γ. For example, the principle of the validity of an infinity of acts of arbitrary choice formulated by Zermelo has hitherto seemed to be necessary to conclude[1], from the premiss that an aggregate has chains respectively of all types definable by »mathematical induction», that the aggregate has a chain of type ω; and even the admission of this principle does not allow us to conclude, from the fact that an aggregate of cardinal number $\aleph_0$ has chains respectively of all types less than ω_1, the demonstrably false result that this aggregate has a chain of type ω_2. But, if a class of M-chains is such that, if x and y are any members of this class and the type of x is greater than that of y, then y is a segment of x; then, provided that γ is an ordinal number with no immediate predecessor, we can obviously conclude, from the premiss that the chains which are members of the class are respectively of all the types less than γ, that there is an M-chain of type γ. For, in this case, all the chains of types less than γ build up, when they are put together in such a way that the identical parts of any two chains coincide, a single chain of type γ. We will express the fact that a class of M-chains is of the nature just considered, but where γ need not necessarily lack an immediate predecessor, by saying that it is a »K-class» of M-chains. If a K-class (k) contains a chain (K) of maximum type, this K, we will say, »defines and is defined by» k; for the members of k are the segments of K and *vice versa*. If, on the other hand, k has not a member of maximum type, the chain K such that all the members of k are segments of it and all the segments of K are members of k will be a[2] chain »defining and defined by» k. Thus, if, and only if, k contains no chain of maximum type, no individual member of k is identical with K. As an example, let

$$(a_1;\ a_1, a_2;\ a_1, a_2, a_3;\ \ldots)$$

denote a K-class, the chains constructed with members a of M being of all types

[1] Zermelo has concluded in this way in his paper »Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète», *Acta Math.*, Vol. XXXII, 1909, pp. 185—195.

[2] This K, it must be noted, *also* defines the K-class of which it is the member with the greatest type. Thus, if the type (ordinal number) of K has no immediate predecessor, we must be careful to specify which one is meant of the two K-classes which correspond to K.

less than ω; the class then defines (if we take the nth member of the nth chain in the above order)[1] the chain

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

and this last chain defines the former class as the class of its segments.

We will always reserve the letter »k» to denote a K-class, and »K» to denote the chain defined by or »corresponding to» k. Also »k'» and »K'» will be used to denote respectively another K-class and its corresponding chain.

VII.

The rule indicated in § V is defined formally by induction, and this definition is here, for ease of apprehension divided into four parts, the last of which is subdivided into two parts. But it is to be remembered that the rule is to be regarded as *one whole*; so that the results obtained at some stage of the rule are not necessarily the final results.

1. The class K_1 defines uniquely a set of K-classes such that each of these K-classes contains one and only one member of K_1, and all of these members taken together make up K_1. In the other parts of this rule, other K-classes will be substituted for the K-classes just defined, yet other K-classes substituted, and so on. This will be done by processes which may be called »assignment» and »replacement». If we have a K-class (k') containing one or more members and an M-chain (K'') which continues all the members of k', the result of assigning K'' to k' is the K-class whose members are the members of k' together with K''. The new K-class, in which are preserved all the members of k', then replaces k'. The rule will give a method of making, in a perfectly determinate manner, a transfinite sequence of such assignments and replacements such that the whole class of M-chains is rearranged in a set of K-classes. Each M-chain will be, by the rule, repeated so as to form a definite set of copies, and each one of these copies is contained in one of these last K-classes.

2. Since the class K_2 has members, distribute them all in the following manner. Where k_1 is in turn all the K-classes constructed in (1), with k_1, which contains only one member (K_1), put, for the moment, the class K'_2 of all those chains of type 2 which continue K_1. This process is of course logically determinate and therefore involves no arbitrary selection. Then replace the complex (k_1, K'_2) by complexes such as (k_1, x), where x is in turn all the members of K'_2, and in each of those latter complexes »assign» x to k_2; so that we thus

[1] Of course the members of a K-class have no intrinsic order of their own.

obtain, instead of the k_1's, several K-classes of which each contains a repetition of K_1 and one of the members of K'_2: these last K-classes are to contain between them all the members of K'_2, and each of them is to contain a chain identical with K_1. Note that our reasoning does not depend on any particular selection of x: for x is merely what PEANO called an »apparent variable» in the definition of K-classes with two members. All the members of K_1 and K_2 are arranged as members of the k_2's; indeed, each member of k_1 is repeated in order to construct k_2's, and, since we have replaced all the K-classes constructed in (1), — which have but one member each, — by K-classes which contain repetitions of these members of type 1 and *also* members of type 2, we have left over no K-classes with only one member.

3. The class K_3 has members. Where k_2 is, in turn, all the K-classes constructed in (2), with k_2 put, for the moment, the class K'_3 of all those M-chains of type 3 which continue the chains in k_2. Then replace the complex (k_2, K'_3) after »assignment» of the same nature as that described in (2), by several K-classes of which each contains the members of k_2 and one of the members of K'_3: these classes are to contain between them all the members of K'_3, and each of them is to contain chains identical with those in k_2. Thus, all the members of K_1, K_2, and K_3 are arranged as members of K-classes of these members, and there now remains no K-classes containing one or only two members.

4. We will now describe in general how, if all the K's of respectively all the suffixes less than γ have been arranged by a definite process in K-classes, such that each K-class contains one member out of each K_ξ where $\xi < \gamma$, the class K_γ, which we will prove always to have members under this hypothesis. — which is fulfilled except in some cases where an M-chain of type less than γ exhausts M, — can be rearranged by a definite process which is such that the arrangement for those K_ξ's where $\xi < \gamma$ is unaltered[1], so as to assign one member to each of the K-classes formed by repeating the above ones in a definite set. We have given a definite process for the cases $\gamma = 1$, $\gamma = 2$, and $\gamma = 3$; a process will be defined successively for $\gamma = 4, 5, \ldots$, and indeed for all ordinal numbers γ in which either *(a)* γ has an immediate predecessor, or *(b)* γ has not an immediate predecessor.

Let us consider these cases *(a)* and *(b)* separately.

(a) Suppose that those K's whose suffixes are respectively all the ordinal numbers less than γ, where γ has an immediate predecessor $\gamma - 1$, have been rearranged in one definite way so as to form K-classes and that each one con-

[1] Note that this condition is not fulfilled for a series of type of chains of an enumerable aggregate.

tains chains of respectively all types less than γ. Obviously, since M is not finite, K_γ has members. Where $k_{\gamma-1}$ is, in turn, all of the K-classes just mentioned, put, for the moment, with $k_{\gamma-1}$ the class K'_γ of all those M-chains of type γ which continue all the chains in $k_{\gamma-1}$. This process involves no arbitrary selection of members. Then, by »assignment» and »replacement», replace the complex $(k_{\gamma-1}, K'_\gamma)$ by several K-classes of which each one contains repetitions of all the members of $k_{\gamma-1}$ and one of the members of K'_γ, these K-classes are to contain between them all the members of K'_γ. There is, as before, no arbitrary selection used to define these K-classes. We thus obtain from the $k_{\gamma-1}$'s and K_γ, by a process definite throughout a set of K-classes each of which (k_γ) defines and is defined by a chain of type γ. All the members of all the K's of suffixes up to and including γ are arranged as members of these k_γ's, so that we have no K-classes containing only a finite number of chains[1] less than γ; and we can dispel any doubt as to whether in the replacement of the complexes just referred to, some M-chains may have been passed over. In fact, *all* M-chains of type γ are contained in K_γ and *all* the members of K_γ, and consequently of K_ξ where $\xi < \gamma$, are evidently arranged in one or other of the k_γ's just coustructed.

(*b*) There only remains the case of γ having no immediate predecessor. In this case, since the K's of respectively all suffixes less than γ are rearranged, by hypothesis, in K-classes such that each K-class contains one member from each K_ξ where $\xi < \gamma$, then each of these classes defines, in a manner, which does not depend on any »principle of selection», a chain of type γ. For example[2], a K-class in which the members are respectively of all types less than ω, and which may consequently be represented by

$$(a_1;\ a_1,\ a_2;\ a_1,\ a_2,\ a_3;\ldots;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ ;\ldots),$$

where it must be remembered that the continuations $a_1;\ a_1,\ a_2;\ a_1,\ a_2,\ a_3;\ldots$ do not appear in any special order in the class, determines uniquely the chain

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_\nu\ \ldots$$

of type ω, which is such that the above K-class consists of all segments of this chain of type ω and of no other members.

We conclude, then, that, if γ has not an immediate predecessor, and each of the above K-classes contains one member from each K_ξ where $\xi < \gamma$, there is

[1] If γ is *transfinite* and has an immediate predecessor, it may be that there are chains of type $\gamma-1$ that exhaust M, and thus cannot be continued by any M-chain. See the end of next section.

[2] Cf. §§ V and VI above.

a K_γ. If there is a K-class (k) which remains without some chain of type less than γ when *all* the K_ξ's, where $\xi < \gamma$, are rearranged, it can without difficulty be seen that the K corresponding to this k exhausts M.

VIII.

As we see in the case of the cardinal number of M being $\aleph_0$ if α is any number of Cantor's second number-class, there is a chain of type α which exhausts M. Hence, when the above rule is applied to M, we must arrive at a k whose K is this chain of type α. This k cannot be added to, except possibly by K, at any subsequent stage of the rule[1], and so, although the rule is not completed at the stage α, k is one of those K-classes that are constructed by the complete rule.

The complete process just defined by an induction which is transfinite if — whether we are supposed to know it or not — the series of K's is transfinite and of type greater than ω, thus defines a set of K-classes of which each one contains a single member from each K unless some one of these k's defines a K which exhausts M, though some suffixes of the K's may exceed the type of K. Every chain is accounted for among these K-classes; in the words, if K is the chain defined by any one (k) of these K-classes, all these chains K are such that any M-chain is either one of these K's or a segment of one of them.

Let us say that the K's to which the rule of § VII is applicable are »capable of a φ-arrangement» to show now that every M-chain is arranged by the above rule in at least one of these k's. Consider what would happen if there were M-chains which were not thus arranged. Let K_λ be the K of least suffix which has members not so arranged; then K_λ combined with those K_ξ's for which $\xi < \gamma$ would not be capable of our φ-arrangement, — and this is impossible by the rule.

If we were to suppose that an aggregate M could have chains whose types are respectively all the ordinal numbers, we can conclude by the above rule[2], that all the complete k's define K's whose types fulfil its impossible condition. This we shall do in the next section.

IX.

It might be argued that, given any ordinal number ξ, however great, there might always be M-chains whose types are ξ, because this does not imply that M has a chain of »the type of all ordinal numbers in order of magnitude», —

[1] In fact, if M-chains other than K could continue as segment all the members of k, K would not exhaust M.

[2] And also, rather more simply, by the argument of §

which would give rise to the contradiction discussed below, — any more than the supposition that M has chains whose types are greater than any given number (α) of Cantor's second number-class implies that M has a chain of the type (ω_1) of this number-class arranged so that the numbers are in the order of their magnitude. But, in the case of the ξ's, if we choose a number ω_σ for ξ, we know that, since the cardinal number $\aleph_\sigma$ belongs to ω_σ, there must be a series of type ω_σ in *every* one of the chains defined by a K-class determined by the complete rule. For, if not, at least one of the chains last spoken of, does not contain a series of type ω_σ and is therefore of cardinal number less than $\aleph_\sigma$, and yet would exhaust M. For if it did not exhaust M, there would be at least one member (m) of M which would not be a member of the chain mentioned, whose type, we will suppose, is ϱ. But then we could construct, from this chain and m, a chain of type $\varrho + 1$, and this latter chain of type $\varrho + 1$ would be assigned by the above rule to the class determining this chain of type ϱ. Hence each chain determined by the K-classes found by the complete rule has segment where types are respectively all the ordinal numbers ξ. We will now show that it is impossible that, however great the ordinal number ξ may be, the chain defined by a complete K-class is always such that it has a segment of type ξ. Indeed, a chain such that, however great ξ may be, it always has a segment of type ξ, must be of the type (β) of »the series of all ordinal numbers». Now, we can prove that this series is well-ordered, for any part (P) of it which has any terms at all — say p — has a first term — namely the first term of the well-ordered series formed by p and those terms of P which precede p. Hence β is an ordinal number, and hence β is both the ordinal number of a series and a term of the series, so that $\beta > \beta$. This implies, of course, that the series of all ordinal numbers is ordinally similar to a segment of itself, and thus that the series is not well-ordered; and therefore that there is no such thing as what we meant to denote by the phrase »the series of all ordinal numbers», which would thus be both well-ordered and not well-ordered. But at present we only need the proof that it is impossible that a complete chain should have segments of all types.

It must be noted that the proof given in the last paragraph holds, not for any class, but only for a K-class.

It is only for a K-class that we can thus immediately conclude that, if, whatever ξ is a chain of the class is of type ξ, then there would be a member of the type of »the series of all ordinal numbers»; just as, without using the theorem on well-ordering or an application of Zermelo's principle, we cannot conclude, from the fact that a class has chains of all finite types, that it has a chain of type ω, unless it is a K-class. However, we have shown, in the first

paragraph of this section, that the apparently wider proposition is implied by the apparently less general proposition just proved.

X.

The theorem with which this paper is concerned seems to me unavoidably to depend on this proposition about »the type of the series of all ordinal numbers», given by me[1], and which was stated by Russell[2] — apparently on no grounds save the occasionally delusive ones of mere appearance — to have a purpose quite different from that of Zermelo's principle. Indeed, Cantor, in his unpublished proof of about 1895 that any aggregate can be well-ordered, — which I rediscovered independently in 1903[3], — depens essentially on the proposition referred to. The merit of the proceeding seems to be that we can, by proving that, for a given M, there is an upper limit for the suffixes of the K's, find the relation between the suffix of the Aleph belonging to M and that of the ordinal number expressing »Hartogs's limit» (cf. §§ II, IV, VI, XII), and also avoid yet another axiom introduced by Zermelo[4] and adopted by practically all German mathematicians[5] and some others.

XI.

We have then shown that there is, for any M, a smaller ordinal number ζ, which is of course a function of M, such that there is no K of suffix equal to or greater than ζ, but that there are K's whose suffixes are respectively any ordinal numbers less than ζ. We assume (cf. § VIII) that none of these latter K's contain members which exhaust M; then the complete rule given above enables us to construct several K-classes each of which contains one chain from each K. Since then, ζ has no immediate predecessor, each of these K-classes defines a chain of type ζ. It is quite essential to realize that, as is shown in §§ V and VI, we can conclude in this way for K-classes only, and that the rule reduces the class of M-chains to a set of K-classes. Since, however, there are no M-chains of type ζ, our hypothesis that none of the K's has a member that exhausts M must be false. Hence, if ζ is the upper limit of the sufixes of the K's, there is a chain of type less than ζ which exhausts M.

[1] *Phil. Mag.*, January, 1904. See § I.

[2] *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, Vol. IV, 1906, p. 29.

[3] It is important that Cantor seems to have been conscious that he assumed as axiomatic the principle of selection. I did not recognise that I had made any assumption until long afterwards (cf. *Math. Ann.*, Vol. LX, 1905, p. 68).

[4] *Math. Ann.*, Vol. LXV, 1908, p. 261.

[5] Cf. *Journ. für Math.*, Vol. CXXXV, 1909, pp. 86—90; *Math. Ann.*, Vol. LXXVI, 1915, pp. 438—439.

XII.

We have, then, proved that, for any M which is not null, there is a class of non-null and complete K-classes such that each of the latter classes defines and is defined by a chain that both exhausts M and is of type less than some type ζ, say. Of the ordinal numbers greater than the type of this chain, there is one that is the least; let it be denoted by ζ'. This ordinal number ζ' must have an immediate predecessor; for if it had not, the chain itself would be of type ζ', and so ζ' would not be the least ordinal number that is greater than the type of the chain. Hence ζ' is of the form $\zeta'' + 1$. Now, ζ'' is the first number of one of Cantor's number-classes; for if there were numbers of the same number-class which were less than the ordinal number just mentioned, this ordinal number would not be the least to which would belong chains which were not continued by other chains of M. We may thus denote ζ'' by ω_λ, so that $\aleph_\lambda$ is the cardinal number of M. Consequently, the least ordinal number that is greater than all the types of chains of M is $\omega_{\lambda+1}$.[1]

Since any aggregate M can thus be well-ordered, any part of M, in the definite order chosen (say of type ω_λ), has a lowest number which can be correlated to the part as the »specialized» member; and thus Zermelo's principle can be proved.

XIII.

We may now sum up what has been proved. Let M be my aggregate which we will assume to be neither null nor finite. Let ζ be any ordinal number whatever; the set of those classes of M-chains for which $1 \leq \xi < \zeta$, where it must be noted that we do not assume that there is a K_ξ, is said to be »capable of a φ-arrangement» if there is a class of K-classes such that, if k is any member of t, either K exhausts M, or k has one member from each of the above K_ξ's, or both. If then, K does not exhaust M, it must be of type $\gamma - 1$ or γ according as γ has or has not an immediate predecessor. In the above rule, one definite process was given for putting all the K's belonging to M in a φ-arrangement, and so the question as to whether one and the same set of K's has more than one possible φ-arrangement was not touched upon in the above proof. However, it may be seen without difficulty that a set of K_ξ's ($\xi < \zeta$) can be φ-arranged in

[1] This is the type of that chain (L) which may be said to »limit» M (cf. § VII), and was founded by Hartogs (*Math. Ann.*, Vol. LXXVI, p. 4—40) unnecessarily on a non-logical axiom.

one and only one way. The M-chains, then, can be so arranged, and §§ IX and X show that there is an M-chain which exhaust M.

Our § XII then gives us the types of all the M-chains that exhaust M.

XIV.

In this section we return to the question as to the circumstances under which we may infer from the premiss that there are M-chains respectively of all types less than γ, that there are M-chains of type γ. Some examples are given of various γ's for which the above inference holds or does not hold; and, finally, an exact determination, resting on the rule of § VII or the principle of Zermelo which it establishes, of *all* the γ's without exception for which the inference holds.

We can conclude generally from chains of types less than γ if γ is the upper limit of ordinal numbers such that to each of them belongs a different cardinal number. Thus, if γ is ω, to each of the ordinal numbers less than ω belongs a different cardinal number; if γ is ω_1, the cardinal numbers belonging to the ordinal numbers less than γ form, in order of magnitude, a series of type $\omega + 1$, of which γ cannot be the upper limit; if γ is ω_ν, where ν is a finite ordinal number; if γ is ω_ω, besides being the upper limit of a series of type ω_ω, γ is the upper limit of, for example, the series of type ω:

$$\omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_\nu,\ \ldots,$$

to which the series of type ω of different cardinal numbers:

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \ldots,\ \aleph_\nu,\ \ldots$$

belongs.[1] If, then, M has chains of all the types less than ω_ω, it has one of type ω_ω. If γ is ω_{ω^2}, γ is the upper limit of series such as

$$\omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_\nu,\ \ldots,\ \omega_\omega,\ \ldots,\ \omega_{\omega+\nu},\ \ldots,$$

or

$$\omega_1,\ \omega_\omega,\ \omega_{\omega+1},\ \ldots,\ \omega_{\omega+\nu},\ \ldots,$$

[1] Russell and Whitehead, basing their attitudes on their theory of »logical types», hold that there is no reason to think that there is a series of type ω_ω. But, on the one hand, the extent to which Cantor's ordinal numbers are preserved in this theory has been stated differently at different times and is not yet fixed (cf. Russell, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), Vol. IV, 1906, p. 46; *Rev. de Metaphys.*, Vol. XIV, 1906, p. 639; *Amer. Journ.. Math.*, Vol. XXX, 1908, pp. 258, 261; Whitehead and Russell, *Principia Mathematica.*, Vol. II, Cambridge, 1912, pp. 189—190; Vol. III, Cambridge, 1913, pp. 170, 173, and, ond the other hand, it is not quite evident that there is not a ωth logical type in some sense analogous to that in which the number which Cantor denoted by »ω^ω» immediately follows those ordinal numbers obtained by exponentiating ω with ν, but is not ω exponentiated by ω.

which are of types ω_2 and ω respectively, where to each member of these series belongs a cardinal number which differs from that belonging to any other ordinal number in the same series. Again, if γ is ω_{ω_1}, γ is the upper limit of the series of type ω_1:

$$\omega, \omega_1, \ldots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \ldots, \omega_\alpha, \ldots,$$

where α is any number of the second number-class, to which belongs a series of type ω_1 of the Alephs less than $\aleph_{\omega_1}$ in their order of magnitude. Here if M has chains of all types less than γ, then it has one of type γ. Lastly, if M has chains of all types less than $\omega_\omega + 1$, it must have a chain of type $\omega_\omega + 1$.

Let us now consider, quite generally and in succession, all the kinds of γ for which we can or cannot conclude, from the premiss that M has chains of all types less than γ, that M has chains of type γ.

(1). If M is finite, it has a chain of maximum type. Suppose that this type is $\gamma - 1$; then M has chains of all types less than γ. Evidently we cannot conclude that M has a chain of type γ. The case of M having only chains of all types less than some ordinal number which is less than ω is thus disposed of, and consequently in future we will exclude the case of M being finite.

(2). If there is an M-chain of type γ', less than γ and such that the cardinal number of any chain of type γ' is equal to the cardinal number of any chain of type γ, we can, since then γ belongs to the second number-class at least and is not the first of any number-class, conclude that M has a chain of type γ from the premiss that it has chains of all types less than γ.

(3). There only remains the case of γ being the first number of a number-class which is not the class of finite ordinal numbers. Let, then, γ be represented by ω_ζ. If ζ has an immediate predecessor, it may be that the cardinal number of M is $\aleph_\lambda$, where λ is such a number as is referred to under that notation in § XII, so that ζ is $\lambda + 1$. In this case, the type γ is not reached by any M-chain, although there are M-chains of respectively all the types less than it. Consequently, if ζ has an immediate predecessor, it is established that it cannot be inferred generally that, if M has chains of respectively all types less than γ, it has chains of type γ.

(4). Thus, there now only remains the case that ζ is a limit-number. By § XII we know that in this case γ is always reached by some M-chains; for any type that is not reached by a chain of some M or other is of the form $\lambda + 1$, and we cannot have $\zeta = \lambda + 1$ if ζ is a limit-number. We may also argue as follows. Since ω_ζ is upper limit of numbers ω_ξ to which different cardinal numbers correspond, if we are given any definite M having chains of all types less

than ω_ξ, all the chains that exhaust M must contain as segments chains of all those types ω_ξ; for, if not, M would be exhausted by a chain whose cardinal number was less than that of M. Thus, any complete K-class has members of all the types ω_ξ, so that the type of the chain determining and determined by this class is at least ω_ξ.

XV.

The above method is somewhat analogous to that by which all possible permutations of a finite set of things can be constructed systematically and without any arbitrary selections whatever.[1] If, indeed, we are given a finite set S of n things, we may construct all possible permutations n at a time by (1) putting each member (x) of S in correlation with all those of S, splitting up this correlation by imagining several members identical with x and correlating each one of them with each of the members of S, and, in the couples thus obtained, striking out those in which the same member occurs more than once; (2) doing much the same with the couples, — correlating each (z) with all of S, then z with each of S, regarding the couple thus formed out of a couple and an individual as a triplet of individuals, and striking out each triplet in which a member occurs more than once; (3) proceeding thus so as finally to get n-plets. It is easy to modify this rule so as to apply to an infinite S by making each process depend, not on »its predecessor» but, on *all* its predecessors; and this seems the simplest method of well-ordering an aggregate. But in this paper, the chains that exhaust M are not directly built up out of members of M, but are very simply defined by classes of certain chains which do not necessarily exhaust M. The reason for this is that this method grew out of an attempt to extend the considerations of Hartogs, which started from the — obviously non-null — class of M-chains. In what precedes the chains that exhaust M are defined by certain classes of chains (»K-classes»), because such classes are evidently non-null, so that no doubt can arise of the existence of a chain defined by such an entire class determined by a wholly definite rule — though the class is infinite in extension.

[1] I have brought forward this point of view in *Science Progress*, Vol. XIII, 1918.

21.2

BIBLIOGRAPHIE.

Verlag von Johann Ambrosius Barth.

Leipzig.

Planck, Max, Die Entstehung und bisherige Entwicklung der Quantentheorie. Nobel-Vortrag gehalten vor d. Kgl. Schwedischen Akademie d. Wiss. zu Stockholm am 2. Juni 1920. — 31 pp. 8. 1920. M. 4.

Arbeitsgemeinschaft deutscher Naturforscher zur Erhaltung reiner Wissenschaft e. V.

Berlin N. 113.

Gehrcke, E., Die Relativitätstheorie, eine wissenschaftliche Massensuggestion. Gemeinverständlich dargestellt. (Schriften aus d. Verlage d. Arbeitsgemeinschaft deut. Naturforscher z. Erhaltung reiner Wissenschaft e. V. Heft. 1.) — 31 pp. 8. 1920. B. 5.

Weyland, Paul, Betrachtungen über Einsteins Relativitätstheorie und die Art ihrer Einführung. Vortrag gehalten am 24. August 1920 im grossen Saal der Philharmonie zu Berlin. (Schriften aus d. Verlage d. Arbeitsgemeinschaft deut. Naturforscher z. Erhaltung reiner Wissenschaft e. V. Heft 2.) — 31 pp. 8. 1920.

G. D. Baedeker, Verlagshandlung.

Essen.

Gillmer, M., Die Differential- und Integralrechnung in Fragen geordnet. Ein Wiederholungsbuch für Vortrag und Prüfung. 32 pp. 8. 1920. M. 4.

Diff.-Rechn.: Einl. — Diff.-Formeln. — Meth. d. Tangenten. — Höhere Diff.-Quot. — Art d. Krümmung. — Grad d. Berührung. — Stärke d. Krümmung. — Höhere Diff.-quot. unentwickelter Funkt. — Max. u. Min. — Entw. d. Funkt. in Reihen. — Unbest. Formen.

Int.-Rechn.: Einl. — Unbest. Int. — Haupt-Meth. d. Int.-Rechn. — Int. d. gebr. Funkt. — Int. d. irrat. Funkt. — Rückkehrformel. — Best. Int. — Inhalts u. Schwerpunkts-Best. — Best. von Bogenlängen. — Anw.

Fratelli Bocca.

Torino, Milano, Roma.

Ovidio, E. d'. Scritti matematici offerti ad Enrico d'Ovidio in occasione del suo LXXV genetliaco 11 agosto 1918 dai professori E. Almansi. .. E. G. Togliatti e pubbl. per cura di Francesco Gerbaldi e Gino Loria (col ritratto di E. d'Ovidio in zincotipia). — XV + 386 pp. 8. 1918. L. 30:—

Elenco dei discepoli, colleghi e ammiratori ... che ... contribuirono alle spese di stampa ...
Elenco delle pubblicazioni di E. d'Ovidio.
Segre, C., Alcune classi partic. di sistemi continui di quadriche, e rispettivi inviluppi.
Gerbaldi, F., Frazioni continui di Halphen.
Loria, G., Cubiche gobbe aventi ciascuna all'infinito tre punti reali e distinti.
Togliatti, E. G., Un tipo notev. di sistemi lineari di reciprocità degeneri tra spazi ad n dimensioni.
Terracini, A., Sulle congruenze W di cui una falda focale è una quadrica.
Fubini, G., Alc. osservaz. rel. ai problemi secondarii della balistica esterna.
Castelnuovo, G., Curve che posseggono una infinità continua di correspondenze algebr.
Lombardi, L., Oscillazioni armoniche nelle antenne radiotelegraf. direttamente eccitate.
Severi, F., Integrali sempl. di 1ª specie apparten. ad una superficie algebr.
Almansi, E., Alc. applicazioni della teoria dell'urto.
Pensa, A., Generalizzazione di una trasformazione di d'Ocagne.
Sannia, G., Estensione e studio di un metodo di sommazione generico di Borel.
Laura, E., Propagazione di onde in un mezzo indefinito.
Bottasso, M., Problemi sulla determinazione delle linee sghembe.
Levi, B., Riflessioni sopra alc. principii della teoria degli aggregati e delle funzioni.
Bernardi, G., Nuovo metodo per la risol. diretta dell'equaz. $ax + by = c$ in numeri interi e positivi, quando i tre numeri noti a, b, c, sono interi e positivi.
Jadanza, N., Un interess. problema di geodesia prat.
Peano, G., Resto nelle formule di interpolazione.
Castellano, F., Questioni elem. di massimo e minimo.
Fano, G., Varietà algebr. a tre dimensioni a superficie sezioni razionali.
Giambelli, G., Introd. alla teoria delle forme in più serie di variabili.

F. A. Brockhaus.

Leipzig.

Mach, Ernst, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch kritisch dargestellt. Mit 257 Abbildungen. 8ᵉ, mit der 7ᵉ gleichlautende Aufl. Mit einem Anhang: Das Verhältnis der Machsen Gedankenwelt zur Relativitätstheorie. von Joseph Petzoldt. XII + 521 pp. 8. 1821. Mk 44.

Vorwort zur 1en, 7en, 8en Aufl. — Einleitung. — 1. Entwicklung d. Prinzipien d. Statik. — 2. Entwickl. d. Prinz. d. Dynamik. — 3. Weitere Verwendung d. Prinz. u. deduktive Entwickl. d. Mech. — 4. Formelle Entwickl. d. Mech. — 5. Beziehungen d. Mech. zu andern Wissensgebieten. — Chronol. Übersicht einiger hervorragender Forscher u. ihrer wichtigern Schriften. — Anhang. — Reg.

Cambridge University Press.

Cambridge.

DAVISON, CHARLES, The elements of analytical conics. — 238 pp. 8. 1919. 10 s. 6 d. Bd.

Coordinates of a point. The equation of a curve. The straight line. Pairs of straight lines. The circle. Parabola. The ellipse. Hyperbola. Asymptotes. Revision exercises. Problem papers. Answers.

DAVISON, CHARLES, Plane trigonometry for secondary schools. — 334 pp. 8. 1919. 6 s. 6 d. Bd.

Trigonometr. ratios of an acute angle. Circular measure. Circular functions of an angle of any magnitude. Graphs of the circular functions. Circular functions of compound angles. Circular functions of multiple angles. Transform. of trigonometr. expressions. Solution of trigonometr. equations. Inverse functions. Circular functions of sub-multiple angles. Geometry of the triangle. Solution of triangles. Pract. applications. Principal circles associated with a triangle. Geometry of the quadrilateral. Areas of regular polygons and circles. Inequalities. Approximations and errors. De Moivre's theorem. Series. Problem papers. Answers.

EDDINGTON, A. S., Space, time and gravitation. An outline of the general relativity theory. — VII + 218 pp. 8. 1921. 15 s. Bd.

What is geometry? The FitzGerald contraction. Relativity. The world of four dimensions. Fields of force. Kinds of space. The new law of gravitation and the old law. Weighing light. Other tests of the theory. Momentum and energy. Towards infinity. Electricity and gravitation. On the nature of things. Mathemat. notes. Histor. note.

Euclid in Greek. Book I. With introduction and notes by THOMAS L. HEATH. — IX + 239 pp. 8. 1920. 10 s. Bd.

HOBSON, E. W., The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Second ed. Revised throughout and enlarged. Vol. I. — XV + 671 pp. 8. 1921. 45 sh. Bd.

Number. Descriptive properties of sets of points. The metric properties of sets of points. Transfinite numbers a. order-types. Functions of a real variable. The Riemann integral. The Lebesgue integral. Non-absolutely convergent integrals. List of authors quoted. General index.

Jaeger, F. M., Lectures on the principle of symmetry and its applications in all natural sciences. With 170 diagrams. — XII + 333 pp. 8. 1917. 20 s.

Preface. — 1. Introductory remarks ... — 2. Gen. considerations on change of position. Characteristic motions. Figures & their mirror-images. Reflection & inversion. Finite & inf. figures. Symmetry properties & sym.-elements of 1st & 2d order. Euler's theorem. Deduction of sym.-character as a math. problem. Geom. centre. Periods of axes of 1st & 2d order. Repeated reflections. Gen. demonstr. of sym.-theorems. — 3. Equivalent & non-equiv. operations. Definition of group. The problem of the possible classes of sym. as a problem of the theory of groups. Groups with axial sym. Gen. theorems. Cyclic, dihedral & endespherical groups. Sym.-centre & enantiomorphism. Applications in morphology. — 4. Remarks on axes of 2d order. Relations between groups of 2d order & those with axial sym. Gen. theorems. Deductions of all possible groups of 2d order. Summary. Appl. in morphology. — 5. Limits of axial periods in cristalline matter. Hauy's law. Crystallographical sym.-axes. Groups & sub-groups. Holohedrism, hemihedrism, tetartohedrism. Crystal systems. Gadolin's projection. Sym.-classes of cubic system. Groups with axes of isotropy. Sym. of physical phenomena. Sym. of cause & effect. Sym. of electrostatic & of magn. field. Centrically symmetrical phen. in crystals. Superpositions of different causes. Sym. & dissymmetry. Gen. remarks. Problems of future. — 6. Periodical repetition of identical repeats. Endless patterns. Homogeneity in periodical arrangements. Homologous points. Distribution of points in a plane. Net-planes; their significance in endless patterns. Sym. of patterns & their net-planes. Points regularly distr. in space. Space-lattices. Sym. of Bravais' space lattices. Gen. sym.-relations in endless syst. Fundamental domain. Enantiomorphous structural units. Gen. probl. of the deduction of all homogeneous symmetrical arrangements. Theory of Sohncke. Theories of von Federow & Schoenflies. Endless periodical patterns & crystal-structure. Space-lattice & Hauy's law. Chemical structure of crystals. Various views. Barlow-Pope-theory of the unitstere. Diffraction of Röntgen-rays in crystals. Investigations of Laue, Bragg & others. Space-lattices in crystals of sodium- & potassium-chloride. The chemical molecule in crystals. Molecular & atomic forces. Valency & co-ordination. Periodical arrangements in living nature. Remarks on phyllotaxis. Contrast between living & inanimate objects. Conclusion. — 7. Mimetic forms & apparent sym. Crystal-aggregates. Twinning. Formes of approximate sym. Pseudo-sym. Mimicry. Compound twinning of microscopical lamellae. Optical anomalies. Mallard's theory. Rotatory power of crystals. Pseudo-sym. & polymorphism. Mallard's hypothesis concerning the pseudo-sym. character of all crystalline matter. Final remarks. — 8. Pasteur's law. Fission of racemoids. Molecular dissym. & optical activity. Methods of fission. Spontaneous crystallisation; problems. Transition-temperature. Partial racemism. Physiological action of antipodes. Enzyme-action. Pseudoracemism. Racemisation & its mechanism. Pasteur's general views. Theory of the asym. atom. Pasteur's law and Van't Hof-Le Bel's theory; problems. Sym. of chemical molecules. Crystallonomical relations. Chemical composition & optical rotatory power. Asymmetric metal-atoms. Enantiomorphism of cyclic compounds. Enantiomorphous configuration & hemihedrism. Final remarks. — 9. Pasteur's law (continued). Production of racemic or inactive substances from inact. molecules.

Chemical reactions between optically active & inact. substances. Rotatory power of reaction products in comparison with that of the original substances. Walden-inversion. Reaction-velocity of antipodes under different circumstances. Artificial & natural synthesis. Views explaining asymmetrical or natural synthesis. Influence of optically active molecules in the production of optically active substances from inactive materials. Partially and totally asymmetrical synthesis. Directional influence of pre-existing dissymetry. Asymmetric conditions during synthesis. Problems of the future.

Lamb, Horace, Higher mechanics. — X + 272 pp. 8. 1920. 25 s. bd.

Kinematics of a rigid body. Finite displacements. Infinitesimal displacements. Statics. Moments of inertia. Instantaneous motion of a body. Dynamical equat. Free rotat. of a rigid body. Gyrostatic probl. Moving axes. Generaliz. equations of motion. Theory of vibrations. Variational methods.

Love, A. E. H., A treatise on the mathematical theory of elasticity. 3d ed. — XVIII + 624 pp. 8. 1920. 37 s. 6 d.

Analysis of strain. The gen. theory of strain. Analysis of stress. Elasticity of solid bodies. Relation betw. the mathem. theory of elasticity and techn. mechanics. Equilibr. of isotropic solids. Equilibr. of olotropic elastic solid bodies. General theorems. Transmission of force. Two-dimensional elastic systems. Volterra's theory of dislocations. Theory of the integration of the equations of equilibr. of an isotropic elastic solid body. Equilibr. of an elastic sphere and related problems. Vibrations of spheres and cylinders. Propagation of waves in elastic solid media. Torsion. Bending of a beam by terminal transverse load. Bending of a beam loaded uniformly along its length. Theory of continuous beams. Gen. theory of the bending and twisting of thin rods.

Problems conc. the equlibr. of thin rods. Vibrations of rods. Problems of dynam. resistance. Small deformation of naturally curved rods. Stretching and bending of plates. Inextensional deformation of curved plates or shells. Gen. theory of thin plates and shells. Equilibr. of thin shells. Notes. Index.

Macmahon, P. A., An introduction to combinatory analysis. — 71 pp. 8. 1920. 7 s. 6 d. bd.

Element. theory of symmetric functions. Opening of the theory of distributions. Distribut. into diff. boxes. Distribut. when objects a. boxes are equal in number. Distribut. of given specification. The most gen. case of distribut.

Papers set in the Mathematical tripos, Part 1, in the University of Cambridge 1913—1917. — 81 pp. 8. 1919. 3 s.

Whitehead, A. N., The concept of nature. Tarner lectures delivered in Trinity College November 1919. — VIII + 202 pp. 8. 1920. 14 sh. Bd.

Nature a. thought. Theories of the bifurcation of nature. Time. The method of extensive abstraction. Space a. motion. Congruence. Objects. Summary. The ultimate physical concepts. On the Greek concept of a point. On significance a. infinite events.

Tipografia de G. Casañal, Coso, 98.

Zaragoza.

Galdeano, Zoel G. de, Tratado general de matemáticas, comprendiendo en la introducción las lecciones 11 a la 20 del curso de extensión universitaria de 1915 a 1916. — 112 pp. 8. Pesetas 2:50. 1916.

Galdeano, Zoel G. de, Correlaciones matemático-físico-químicas. Leciones explicadas en los cursos especiales y de amplición, organizados por la la Junta de la Facultad de ciencias de Zaragoza 1915—16. — 88 pp. 8. 1916. Pes. 2.

Galdeano, Zoel G. de, Razonamiento de mi Curso elemental de Cálculo infinitesimal, comprendiendo nociones de matemática físico-química. — 244 pp. 8. 1915. Pesetas 5.

Galdeano, Zoel G. de, Enseñanza matemática. T. 1. — 138 pp. 8. Pesetas 4. 1918.

Consideraciones sobre el proyecto de organización de las facultades de ciencias. El analisis matemático. La enseñanza y la educación cientif.

El Progreso Centífico. Revista semestral. Director Dr Zoel G. de Galdeano, Catedrático de la facultad de ciencias de Zaragoza. Año 1. 124 pp. 8. Zaragoza, Julio de 1918. Pesetas 4.

Chapman & Hall.

London.

John Wiley & Sons.

New York.

Carmichael, Robert D., The theory of relativity. (Mathemat. monographs, ed. by Mansfield Merriman and Robert S. Woodward. N:o 12) — 74 pp. 8. 1913. 8 s. 6 d.

Introd. — Postulates of relativity. — Measurement of length and time. — Equations of transformation. — Mass and energy. — Experim. verification of the theory. — Index.

Hudson, Ralph G., & Lipka, Joseph, A table of integrals. — 25 pp. 8. 1917. 1 s.

»Taken from the mathemat. section of the Engineers' Manual. . . The compl. mathemat. section is publ. under the title, A manual of mathematics.»

Miller, G. A., Blichfeldt, H. F., & Dickson, L. E., Theory and applications of finite groups. — XVII + 390 pp. 8. 1916. 23 s. Bd.

P. 1. Substitution and abstract groups.

Examples of groups and fundam. definitions. Substitution groups and Sylow's theorem. Fundam. definitions and theorems of abstract groups. Abelian groups. Groups whose orders are powers of prime numbers. Groups having simple abstract definitions. Isomorphisms. Solvable groups.

P. 2. Finite groups of linear homogeneous transformations.

Preliminary theorems. Linear groups in two variables. Some special types of groups. Linear groups in three variables. Group characteristics.

P. 3. Applications of finite groups.

The group of an algebraic equation for a given domain. Sufficient condition that an algebraic equation be solvable by radicals. Necessary condition that an algebraic equation be solvable by radicals. Constructions with ruler and compasses. Inflexion points of a plane cubic curve. The 27 straight lines on a gen. cubic surface and the 28 bitangents to a gen. quartic curve. Monodromic group.

Verlag von Friedrich Cohen.

Bonn.

PFLÜGER, A., Das Einsteinsche Relativitätsprinzip gemeinverständlich dargestellt. 9:e Aufl. — 44 pp. 8. 1920. M. 4.

H. Dunot et E. Pinat, Editeurs.

Paris.

MORVAN, J., Le Barême pratique pour les industriels, commerçants, banquiers, agents d'affaires etc., etc., écoles spéciales de comptabilité, d'industrie, de commerce etc., etc. Méthode complète de calculs rapides. 1:o Barême ou table des produits, 2:o Barême ou table du tant %, 3:o Comptes courants et d'intérêts. — 141 pp. 8. 1919. Fr. 6: — Relié (Majoration temp. 100 %).

P. 1. Clef de la première partie. Tables des produits.

P. 2. Clef de la deuxième partie. Tables du tant pour %.

P. 3. Tracé d'un compte-courant et d'intérêts. Méthode directe (par les intérêts — par les nombres). Méthode indirecte (par les nombres). Modèle d'un compte-courant sans intérêts.

Appendice. Application du barême pratique aux monnaies étrangères. Table d'addition (méthode pour la rapidité).

Verlag von Wilhelm Engelmann.

Leipzig.

PASCH, MORITZ, Mathematik und Logik. Vier Abhandlungen. Sonderabdr. aus Archiv f. die gesamte Psychologie, Bd 38. — 47 pp. 8. 1919. M. 2: —, 70 % Zuschlag.

Ueber innere Folgerichtigkeit. Ueb. d. Bildungswert d. Mathematik. Forschen u. Darstellung. Der Aufbau d. Geometrie.

Verlag von G. Freytag G. m. B. H.

Leipzig.

SCHWAB, KARL, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie. T. 1. Ausg. A· Für die mittleren Klassen der Realanstalten. 8:e Aufl. (Oskar Lesser's Mathematisches Unterrichtswerk.) — 281 pp. 8. 1921.

Planimetrie. Trigonometrie. Stereometrie.

Gauthier-Villars et Cie.

Paris.

BALLY, E., Géométrie synthétique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre. — VI + 98 pp. 8. 1920. 3 frcs.

Préf. Aperçu gén. sur les cycloïdes. Propriétés tangentielles de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Hypocycloïde, inverse du cercle inscrit au triangle de ses rebroussements. Propr. div. de l'hypocycloïde. Cubique gauche et développable de ses tangentes.

BUHL, A., Géométrie et analyse des intégrales doubles. (Scientia. No. 36.) — 66 pp. 8. 1920.

L'identité fondamentale. Formules de Riemann et de Stokes. Géométrie de la formule de Stokes. Travaux de MM. G. Humbert et G. Koenigs. Intervention d. courbures d. contours et d. cloisons. Formules d'Ossian Bonnet et de M. P. Appell. Etude de la form. (II). Travaux de M. E. Goursat. La form. de Stokes sur l. surfaces algébr. Travaux de M. E. Picard.

CAUCHY, AUGUSTIN, Oeuvres complètes, publ. sous la direction scientif. de l'Acad. d. Sciences... Série 2, T. 12. 472 pp. 4. 1916.

Exercices d'analyse et de physique mathématique (Nouveaux exercices) T. 2. — Paris 1841. Deuxième éd. réimprimée d'après la première éd.

GIRAUD, GEORGES, Leçons sur les fonctions automorphes. Fonctions automorphes de n variables. Fonctions de Poincaré. — 126 pp. 8. 1920.

Propriétés gén. de certains groupes automorphes. Les groupes lin. Groupes de M. Poincaré, de M. Picard, de M. Fubini. Groupes quadrat., comprenant l. groupes hyperabéliens. Groupes formés de plusieurs autres se prolongeant. Les fonctions de Poincaré.

HERMITE, CHARLES, Oeuvres, publ. sous les auspices de l'Acad. d. Sciences par EMILE PICARD. T. 4. — VI — 593 pp. 8. 1917.

LACAZE, H., Cours de cinématique théorique à l'usage d. candidats à la licence et aux écoles du gouvernement. — 138 pp. 8. Fr. 8. Majorat. temp. 100 %.

Vecteurs. Cinémat. du point. Mouvement d'un solide. Distribut. d. vitesses. Composition d. accélérations. Déplacement d'un vecteur dans un plan. Compléments.

LEBON, ERNEST, Table de caractéristiques de base 30 030 donnant en un seul coup d'œil les facteurs premiers des nombres premiers avec 30 030 et inférieurs à 901 800 900. T. 1, Fasc. 1: Tableau $\Pi' = Bk + 1$. Table d. caractér. $K < 30\,030$, K variant de 1 à 4 680. — XXIV + 56 pp. 4. 1920. Fr. 15. Major. temp. 100 %.

D'OCAGNE, le Lieutenant-Colonel, Principes usuels de nomographie avec application à divers problèmes concernant l'artillerie et l'aviation. — 67 pp. 8. 1920. Fr. 4: 50. Majorat. temp. 100 %. Frais de port & emball. 10 %.

Echelles fonctionnelles. Abaques cartésiens. Nomogrammes à points alignés. Applicat. de la méthode d. points alignés.

Jul. Gjellerups Forlag.

København.

PETERSEN, RICHARD, Matematiske Eksamensopgaver for Fabrikingeniører ved d. Polytekniske Læreanstalt. — 14 pp. 8. 1920.

Paul Hartung. Verlag.

Hamburg.

SCHMIDT, HARRY, Das Weltbild der Relativitätstheorie. Allgemeinverständliche Einführung in die Einsteinsche Lehre von Raum und Zeit. 139 pp. 2e, erw. Aufl. (4.—9. Tausend). 1920. M. 15.

Weltbild. d. neueren Phys. — Grundges. d. allg. Mech. — Koordinatensyst. — Absol. Raum. — Relativitätsprinz. d. Klass. Mech. — Weltäther. — Versuch v. Michelson u. Morley u. seine Deutung durch H. A. Lorentz. — Spez. Relativitätspr. Einsteins. — Vierdim. Welt. — Allg. Relat.-pr. Einsteins. — Weltbild d. Relat. — th.

Heckners Verlag.

Wolfenbüttel.

FRICKE, H., Die neue Erklärung der Schwerkraft. Kurzgefasste und gemeinverständliche Darstellung. — 24 pp. 8. 1920. M. 3: 30. + Teuerungszuschl.

FRICKE, H., Der Fehler in Einsteins Relätivitätstheorie. — 28 pp. 8. 1920. M. 5: 10. + Teuerungszuschl.

FRICKE, H., Eine neue und einfache Deutung der Schwerkraft und eine anschauliche Erklärung d. Physik d. Raumes. 137 pp. 8. 1919. M. 10: —, geb. M. 13: — + Teuerungzuschl.

Berechnung d. Sonnentemperatur aus d. Schwerkraft. Neubegründung d. Äthertheorie. Innere Reibung d. Lichtäthers als Ursache d. magnet. Erscheinungen. Normalzustand d. Fliessens als Urphänomen d. Physik. Entwickl. d. mod. Äthertheorien bis z. Relativitätsprinzip. Eine anschaul. Darstellung d. Schwerkraftlinien. Die Energie. Neue Grundlagen f. d. Astronomie. Aufklärung d. Vorgänge i. Schwerkraftfelde. Elast. Wirkungen d. Schwerkraftfeldes in Meteorol. u. Geophysik. Neue Prinzipien d. Naturphilos. Anm. u. Ergänz. Kurze Zusammenfassung d. Ergebnisse.

Librairie Scientifique J. Hermann.

Paris.

VESSIOT, E., Leçons de géométrie supérieure. Professées à l'Université de Lyon, et réd. par M. ANZEMBERGER. Edition revue et aug. Avec une préf. de G. KŒNIGS. — IX + 376 pp. 8. 1919.

Révision des points essentiels de la théorie des courbes gauches et des surfaces développables — Surfaces. — Étude des éléments fondam. des courbes d'une surface. — Les six invariants. Courbure totale. — Surfaces réglées. — Congruences de droites. — Congruences de normales. — Congruences de droites et correspondances entre deux surfaces. — Complexes de droites et équations aux dérivées partielles du 1er ordre. — Complexes linéaires. — Transformations de contact. Transform. dualist. Transform. de Sophus Lie, changeant les droites en sphères. — Systèmes triples orthogonaux. — Congruences de sphères et systèmes cycl. — Exercices.

Verlag von S. Hirzel.

Leipzig.

LENARD, P., Ueber Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation. Neue, verm. Aufl. — 35 pp. 8. 1920. M. 5 + Valutazuschl.

STARK, JOHANNES, Änderungen der Struktur und des Spektrums chemischer Atome. Nobelvortrag gehalten am 3. Juni 1920 in Stockholm. — 15 pp. 8. 1920. M. 3. geh.

Ulrico Hoepli.

Milano.

BURALI-FORTI, C., Logica matematica. 2:a ed. intieramente rifatta. (Manuali Hoepli.) — XXXII + 483 pp. 8. 1919. L. 9: 50.

Simboli ideograf. fondam. — Operatori, coppie, terne, . . . , operazioni, relazioni. — Algoritmo ideograf. in generale. — Definizioni. — Alcune applicazioni.

Marcolongo, R., Il problema dei tre corpi da Newton (1686) ai nostri giorni. (Manuali Hoepli. Ser. scientif. 403, 404, 405.) — VII + 166 pp. 8. 1919. L. 4: 50.

Lavori dei geometri del secolo XVIII. — Riduzione delle equazioni differenziali all'ordine minimo. — Probl. degli n corpi. Casi partic. — Integrali algebr. ed uniformi del probl. degli n corpi. — Soluzioni approssim. per serie infin.; per serie trigonometr. Ricerche di Sundman. — Il probl. ristretto dei tre corpi. Soluzioni period.

Carl Koch, Verlagsbuchhandlung.

Nürnberg.

Killermann, Anton: Beweis des Fermat'schen Lehrsatzes. VII + 86 pp. 1916. M. 4.

1. Allgemeines — 2. Ableitung d. Bildungsgesetzes für A, B, C in der Gleichung $A^n + B^n = C^n$. — Bildungsgesetzen für ungeradzahl.-Exp., u. s. w. Unters. für unendl. Werte. — Betr. d. Ferm. Gleich. für ung. Exp., wenn C = gerade Zahl. — Allgemeines über Bildungsges. für A, B u. C wenn n gerade. — 3. Erw. d. Bildungsges. f. A, B u. C. — Bestimmungsgleichung. — Symmetr. Bildungsges. für unger. n. — Bildungsges. wenn C ger. u. n ung. — 4. Ableit. d. Bildungsges. u. Bedingungen für n gerade, wenn die in den Bildungsges. für A, B u. C auftretenden Variabl. beliebige Fakt. mit n gemeins. haben mit Einschl. ger. Zahlen. 5. Übersicht. — Zusammenfassung d. Lösungen in ein einziges Bildungsges.

C. L. Krüger.

Dortmund.

Timpenfeld, P., Tabellen der Quadrate von 1 bis 12000, Kuben von 1 bis 2500, Quadrat- und Kubikwurzeln von 1 bis 1200, Kreisumfänge und -inhalte von 1 bis 1200. 9:e Aufl. 123 pp. 8. 1920. M. 12: — geb.

Universidad Nacional de La Plata.

La Plata (Rep. Argentina)

Universidad Nacional de La Plata. — Contribución al estudio de las ciencias fisicas y matemáticas. Serie técnica. Vol. 2: 3ª. No. 46. — 399 pp. 8. 1920.

Julio R. Castiñeiras: Cálculo de estructuras de hormigón armado. Esfuerzos de corte. Adherencia. Tensiones principales. Anclaje, unión y separación de las barras.

Verlag von B. G. Leopolds Universitätsbuchhandlung (Paul Babendererde).

Rostock.

Barnewitz, F., A. Einstein's Relativitätstheorie. Versuch einer volkstümlichen Zusammenfassung. 3:e verb. Aufl. 7.—10. Tausend. — 16 pp. 8. 1920. M. 2: —.

Longmans, Green & Comp.

London.

Silberstein, L., Elements of vector algebra. With diagrams. (7) + 42 pp. 8. 1919. 5 s. 6 d.

Vectors defined. Equality of vectors defined. Addition of vectors. Subtraction of vectors. Scalar product of two vectors. The vector product of vectors. Expansion of vector formulae. Iteration of vectorial multiplication. The linear vector operator. Hints on differentiation of vectors.

Young, J. W. A., The teaching of mathematics in the elementary and the secondary school. New ed. New impr. (American teachers series. Ed. by James E. Russell.) — XVIII + 359 pp. 8. 1920. 7 s. 6 d.

Study of the pedagogy of mathem. — Purpose and value of the study of mathem. in prim. and second. schools. — Methods and modes. — The heuristic method. — The individual mode. — The Perry movement; the laboratory method. — Miscell. points of method and mode. — Preparation of teachers; mathemat. clubs. — Material equipment. — The curriculum of math. — Definitions and axioms. — Teaching of arithmetic. — Teaching of geometry. — Teaching of algebra. — Limits. — Index.

Macmillan & Co, Ltd.

St. Martins street, London W. C.

Cusack, J., The arithmetic of the decimal system. — XVI + 492 pp. 8. 1920. 6 s.

Introduct. A decimal syst. What does it mean? How to express divisions a. subdiv. of a unit by the dec. syst. The simple rules. Applicat. of the dec. syst. to everyday calculations. Multiplicat. a. div. of money. Applicat. of the dec. syst. to calculat. resp. money. Applicat. of the dec. syst. to money, to weights, to measures. Advantages of the dec. syst. in calculations further considered. Applicat. of the dec. syst. to questions of profit a. loss, to quest. resp. stocks, to calculat. resp. shares, to questions on alligation. The metric syst. Applicat. of the dec. syst. to the finding of compound interest. Answers.

Junta para amplición de estudios e investigationes cientificas.

Madrid.

Laboratorio y Seminario Matematico, Publicaciones, t. 1—3. 1916—19. 8.

1. Rey Pastor, J., Fundamentos de la geometria proyectiva superior. — 432 pp. Pes. 12.

   Geom. elem. Geom. super. El espacio proyect. La continuidad geom. La proyect. real. Cálculo vector. proyect. El espacio compl. y la proyectividad compleja. La representación conf. proyect. Geom. proyect. de l. fig. alg. El concepto de curva analit. proyect.

2. Fernández Baños, O., Estudio sintético de los espacios complejos de n dimensiones.

Arenas Herrero, P. F., Operaciones financieras.

Pineda y Gutiérrez, P., Representaciones conformes según el método de Bieberbach.

Rodríguez Sanz, J., Grupos de susticiones que dejan invariable un recinto plano circular múltiplemente conexo. 279 pp. Pes. 8.

3. Araujo, Roberto, Las curvas W.

Orts, José Aracil, Resolución del problema de Dirichlet en algunos recintos elementales. Pes. 2: —.

Íñiguez Almech, J. M., Estudio de una correspondencia geométrica. Pes. 2: —

Masson & Cie.

120 Bd. Saint Germain, Paris 6.

Moureu, Charles, La chimie et la guerre. Science et avenir. — 384 pp. 8. 1920. Fr. 10: —

Verlag v. Felix Meiner.

Leipzig.

Bolzano, Bernard, Paradoxien des Unendlichen. Mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen herausg. von der Philosophischen Gesellschaft an der Universität Wien durch Alois Höfler. Mit Anmerkungen vers. von Hans Hahn. (Der Philosophischen Bibliothek Band 99.) — XI + 157 pp. 8. 1921.

Verlag von Carl Meyer (Gustav Prior).

Hannover.

Greve, Adolf: Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln nebst einer grösseren Anzahl von Hilfstafeln. Ausgabe A. 193 pp. 24e Aufl. 1921. M. 6: 60 + Zuschläge.

1. Fünfstell. Mantissen d. dekad. Log. aller Zahlen v. 1 bis 10.000.— 2. a) Tabelle zur Berechn. dekad. Log. auf 12 Dezimalst. m. 2 Beisp. Zur Erläut., u. s. w. [b)—f)]. — 3. Fünfstell. Log. d. trig. Funkt. v. Minute zu Minute . . . . — 4. Fünfstell. natürl. Zahlenwerte d. trig. Funkt. v. 10 zu 10 Minuten. — 5. a) Die Maskelyneschen Formeln . . . b) Tafel zur Verwandl. d. Dezimalgrade in Minuten u. Sek., u. s. w. [c)—h)]. — 6. a) Quadratzahlen v. 1 bis 1 000 u. Kubikzahlen v. 1 bis 100., u. s. w. [b)—p)]. 7. A. Astr. Tafeln. B. Physikalische Tabellen. C. Chemische Tafeln. — 8. Konstantentafeln.

C. F. Müllersche Hofbuchhandlung.

Karlsruhe i. B.

KIRCHBERGER, PAUL, Was kann man ohne Mathematik von der Relativitätstheorie verstehen? — VI + 87 pp. 8. 1920. M. 25: —.

Einleitung.

Spez. Relativitätstheorie.

Die neuen Tatsachen. Die Lorentzsche Deutung. Einsteins Relativierung d. Raumes. Relativierung d. Zeit. Korrekturen u. Zusammenfassung. Die vierdimensionale Veranschaulichung Minkowskis. Philosoph. Schlusswort z. spez. Relativitätstheorie.

Vom allgem. Relativitätsprincip.

Die Rotation d. Erde. Trägheit u. Schwere. Die krummen Lichtstrahlen. Newton u. Einstein. Das Eisenbahnunglück. Prüfung durch Tatsachen. Vergleich mit Kopernikus.

LAUE, M. v.: Über die Auffindung der Röntgenstrahlinterferenzen. Nobelvortrag, gehalten am 3. juni 1920 in Stockholm. 16 pp. 8. 1920. M. 8:—.

PLANCK, M.: Zu Max Plancks sechzigstem Geburtstag. Ansprachen, gehalten am 26 april 1918 in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft von E. WARBURG, M. v. LAUE, A. SOMMERFELD und A. EINSTEIN, nebst einer Erwiderung von M. PLANCK. 36 pp. 8. 1918. M. 4: 30.

P. Noordhoff.

Groningen.

BROUWER, L. E. J., Wiskunde, waarheid, werkelijkheid. 12 + 23 + 29 pp. 8. 1919. Fl. 1: 90.

Onbetrouwbaarheid d. log. principes. — Het wezen d. meetkunde. — Intuitionisme en formalisme.

SCHUH, FRED., & RUTGERS, J. G., Compendium der hoogere wiskunde, omvattende rekenkunde, hoogere stelkunde, neiuwere meetkunde, driehoeksmeting, elementaire beschrijvende meetkunde, analytische meetkunde van het platte vlak, differentiaalrekening, analytische meetkunde van de ruimte, integraalrekening, differentiaalmeetkunde van het platte vlak, differentiaalmeetkunde der ruimte, differentiaalvergelijkingen, beschrijvende meetkunde, vectoranalyse, kinematica, theoretische mechanica, waarschijnlijkheidsrekening en foutentheorie, met vraagstukken. Deel 3. Differentiaalrekening. Analytische meetkunde van de ruimte. Integraalrekening. Met 23 figuren in den tekst. IX + 239 pp. 8. 1919. Fl. 9:— Bd.

Voorwoord.

Differentiaalrekening.

Inleiding. Techniek v. het differentiëeren. Hoogere differentiaalquotiënten. Impliciete functies. Nieuwe veranderlijken. Reeksen. Reeksen v. Taylor en Mac Laurin. Bepaling v. limieten. Maxima en minima.

Analyt. meetkunde v. de ruimte.

Inleiding. Transformatie-formules. Plat vlak. Rechte lijn. Boloppervlak. Lineaire bollenstelsels. Meetkund. plaatsen. Onderzoek v. de algem. kwadrat. vergelijking. Voorwaarden aan een O_2 opgelegd. Doorsnede v. O_2's en lineaire stelsels O_2's. Cycl. doorsneden. Tangentiëele coördinaten. Algebr. oppervlakken en algebr. krommen. Algebr. krommen op een O_2 zonder dubbelpunt. Ruimtekrommen v. d 3^{en} en 4^{en} graad.

Integraalrekening.

Onbepaalde integralen. Bepaalde integralen. Oneigenlijke bepaalde integralen. Differentiëeren en integreeren onder het integraalteeken. Oppervlak- en booglengtebepaling. Dubbele en meervoud. integralen. Oppervlakbepaling v. gebogen vlakken (complanatie). Ellipt. integralen. Reeksen v. Fourier. Bernoulliaansche coëfficiënten.

Register. Corrigenda et addenda.

P. A. Norstedt & Söners Förlag.

Stockholm.

LAGERGREN, STEN, Stereometri för realgymnasiet. — 64 pp. 8. 1920. Kr. 3: 25.

Om räta linj., plan o. hörn. Om de regulj. polyedrarna. Om prismer. Fundamentalsats f. beräkn. av volymer. Om pyramider. Om cylindern. Om konen. Om sfären. Om rotationsytor o. rot.-kroppar. Om homog. kroppars tyndgpkt. Guldins regler. Exempel.

Office National des Universités et Ecoles Françaises.

96, Boulevard Raspail, Paris.

La science française, tomes 1—2, publ. par le Ministère de l'Instruction publique à l'occasion de l'exposition de San Francisco. — 396 + 403 pp. 8. 1915. —

1. La science française à l'exposit. de San Fransisco, par L. POINCARÉ. La philosophie, par H. BERGSON. La sociologie, p. E. DURKHEIM. La science de l'éducat., p. P. LAPIE. Les mathémat., p. P. APPELL. L'astronomie, p. B. BAILLAUD. La physique, p. E. BOUTY. La chimie, p. A. JOB. La minéralogie, p. A. LACROIX. La géologie, p. E. DE MARGERIE. La paléobotanique, p. R. ZEILLER. La paléontologie zoolog., p. M. BOULE. La biologie, p. F. LE DANTEC. Les sciences médicales, p. H. ROGER. La science géographique, p. E. DE MARTONNE.

2. Les études égyptologiques, p. G. MASPERO. L'archéologie class., p. M. COLLIGNON. Les études hist., p. CH. V. LANGLOIS. Hist. de l'art, p. E. MALE. La linguistique, p. A. MEILLET. L'indianisme, p. S. LÉVI. La sinologie, p. E. CHAVANNES. L'hellénisme,

p. A. Croiset. La philologie latine, p. R. Durand. La philologie celtique, p. G. Dottin. Les études sur la langue franç., p. A. Jeanroy. Les études sur la litterature franç. du moyen âge, p. A. Jeanroy. Les études sur la litterat. franç. moderne, p. G. Lanson. Les études italiennes, p. H. Hauvette. Les études hispaniques, p. E. Martinenche. Les études anglaises, p. E. Legouis. Les études german., p. Ch. Andler. Les sciences jurid. et polit., p. F. Larnaude. Les sciences économ., p. Ch. Gide.

Open Court Publishing Co.

122 S. Michigan Avenue, Chicago, Ill.

Halsted, Georg Bruce, Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus. Edited & transl. by G. B. H. — XIII + 246 pp. 8. 1920. 2 Dol. Bd.

Translator's pref. Introduct. Saccheri's title-page. Pref. to the reader. In place of an index. Proposition I—XXXIII with corollaries a. scholions, Lemma I—V. Prop. XXXIV—XXXIX, corollary, scholions. Notes. Subj. index. Index of proper names.

Verlag von Moritz Perles.

Wien & Leipzig.

Beer, Fritz, Die Einsteinsche Relativitätstheorie und ihr historisches Fundament. Sechs Vorträge für Laien. 6:e durchges. Aufl. — 80 pp. 8. 1920. M. 10 + 220 % Valuta-Zuschl.

Die Grundlagen d. Geometrie. Raum u. Zeit. Die Minkowskische Welt. Materie u. Energie. Allgem. Relativität u. Schwerkraft.

Philipp Reclam, jun.

Leipzig.

Euler, Leonhard, Vollständige Anleitung zur Algebra. Neue Ausg. (Reclam's Universalbibliothek. N:o 1802—1805 a.) — 527 pp. 8. 1920. Bibl.-Bd M. 9: 50.

Günther, Siegmund, Geschichte der Naturwissenschaften. 3:e Aufl. Mit dem Bildnis des Verf., 4 farb. u. 12 schwarzen Tafeln u. einem Gesamtregister. Teil 1—2. (Bücher d. Naturwissenschaft, hrsg. von Siegmund Günther. Bd 2—3. — Reclam's Universalbibliothek. N:o 5069—74.) — 136 + 290 pp. 8. 1917, 1919. Geschenkbd M. 3 + 100 %.

The Rice Institute.

Houston, Texas.

The Rice Institute Pamphlets, publ. by the Rice Institute, Houston, Texas. — Vol. 1, No. 2 (May, 1915). 193 pp. 8. Vol. 4, No. 1 (Jan., 1917). 117 pp. 8.

1: 2. Henri Poincaré. A lecture delivered at the inaug. of the Rice Inst., by Senator VITO VOLTERRA. — Molecular theories a. mathematics. A lecture deliv. at the inaug. of the Rice Inst., by Prof. EMILE BOREL.

4: 1. Aggregates of zero measure. Monogenic uniform non-analytic functions. Lectures deliv. at the inaug. of the Rice Inst., by Prof. EMILE BOREL. — The generalization of analytic functions. On the theory of waves and Green's method. Lectures deliv. . . . by Senator VITO VOLTERRA.

Johannes Römert.

Halberstadt.

RÖMERT, JOHANNES: Der praktische Mathematiker. Lehrbuch nebst Aufgabensammlung zur Veranschaulichung und leichteren Erlernung der Mathematik. Apparat, Lehrbuch (= wissenschaftliche Ausgabe, 44 pp.) und Unterhaltungsteil (= Unterhaltungs-Ausgabe & Auflösungen). 4. 1912. M. 5 + Zuschläge.

Wiss. Ausg., Inhalt: Winkeln. — Kongruenz d. Dreiecke. — Flächengleicheit d. Figuren. — Pythagoräische Lehrsatz. — Ähnlichkeitslehre. — Arithm. Formeln.

RÖMERT, JOHANNES, Der elementare Beweis des Fermat'schen Satzes $x^{2n+1} + y^{2n+1} = z^{2n+1}$ auf Grund der Zerlegung in Faktoren und der Regeln der Potenzlehre. (Die Propädeutik d. ebenen Mathem., von Johannes Römert. Teil 5. Potenzlehre. Abschnitt 16.) — 17 pp. + 10 hektogr. pp. 8. 1920. [Verlag von J. Schimmelburg (W. Cramer), Halberstadt].

»Die Vorarbeiten zu d. vorsteh. Beweise sind niedergelegt in meinen Handschriften Die Propädeutik d. ebenen Mathem., Ausgestellt i. Würtemb. Schulmuseum zu Stuttgart.»

Emil Roth.

Giessen.

NELL, A. M., Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen. Völlige Neubearbeitung von LUDWIG BALSER. 16:e Aufl. — — VI + 84 pp. + Figurentafel. 8. 1920. M. 8: — geb.

Sibyllen-Verlag.

Dresden.

PETZOLDT, JOSEPH, Die Stellung der Relativitätstheorie in der geistigen Entwicklung der Menschheit. 131 pp. 8. 1921. M. 8:50.

Stellungen d. mechan. Naturansicht. Angriff d. Philosophen. Philosoph. Sieg. Angriff d. Physiker. Physikal. Sieg. Geschlossene Front.

Leonhard Simion Nf.

Berlin.

Barthel, Ernst, Polargeometrie. Mit 23 Figuren. 95 pp. 1919. M. 4:50.

1. Der Grundgedanke u. seine Beweise: Der Grundgedanke... Vorläufige Auseinandersetzung mit den Anhängern Euklids u. Hilberts. — Theorie Geisslers. — Zwei Wege d. Grundl. d. Geom. — Axiom u. Def. — Die objekt. Geom. als logisch mögl. Geom. — Def. d. Geom. im Verh. zur Erfahrung. — Dreizehn Def. d. objekt. Geom. — Dedukt. d. Eigensch. von Parall. — Ebener Bew. für d. Grundged. — Dedukt. d. Parall.-Schnittpunkte aus d. Kontinuitätsprinz. — Ursache d. euklid. Irrtums. — Verh. d. eukl. Täuschung zur modernen Grundl. d. Geom. — Beweis d. Grundged. durch d. Hyperbel, durch d. Satz v. Pascal, durch d. trigonom. Tangente... durch d. harm. Teilung, durch d. Apollonischen Kreis, durch d. Parabel. — Beweis aus d. symm. Entspr. v. Ellipse u. Hyperbel, aus d. geforderten Lückenlosigkeit d. analyt. Gleichungen, aus d. Symm. überhaupt. — Die B-Kegelschn. — Widerl. eines Einwands durch d. Erfahrung. — Nachweis d. unendl. nahen Annäherung d. Kreises an d. Gerade. — Identität dieses Annäh.-problems mit d. eleatischen Pfeilprobl. — Erkl. d. erkenntnistheor. Zwiespaltes durch das Bergsonsche Prinzip. — Bew. d. Mittelpunktes im Annäh.-prozess. — Eine auffällige Weg-Zeitgl. — Beseitigung eines durch d. Vorstellungstendenz veranlassten Hindernisses. — Beseitig. eines analyt. Einw. — Beseitig. eines Einw. d. proj. Geom. — Gesetz v. d. Erhaltung d. geom. Elem. — Insichgeschl. v. Ger., Ebene u. Raum. — Math. u. raumtheor.-astr. Fruchtbarkeit d. Polargeom.

2. Math. Folgerungen. A. Planimetr. Teil: Definite Unendlichkeitsbegriff d. Polargeom. — ... Die Kugeloberfläche als Anschauungsmittel d. objekt. Planimetrie. — ... Verlauf d. Hyperbel. — ... Verlauf d. Parabel u. seine Darst. — ... Ellipse u. Gegenellipse. B. Stereometr. Teil: Kegel u. Zylinder. — ... Räumliche Strahlenbüschel. — Begriff d. Raumes. — Ein Gesetz d. Raumbewegung. — Zwillingsgeraden. — Windschiefe Geraden eines Raumes. — Schnittlinie zweier Ebenen. — Mehrzahl d. Räume. — Log. negat. Zahlen. — Dimensionenzahl d. Raumes. — Reversionskugel als math. Modell d. Raumes. — Geradlinige Bew. eines Punktes durch d. Raum... — Die Zeit als Grundbegr. d. Polargeom. — ... Bedeutung d. Lehrsätze d. eukl. Geom. innerhalb d. Polargeom. — Dreiteilung eines Winkels. — Berechnung d. Rauminhaltes in beliebigen Kubikeinh. — Empirischer Character d. Polargeom.

Julius Springer.

Berlin.

Ahrens, W., Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik. Mit 51 Textfiguren. — VI + 206 pp. 8. 1918. M. 5:60 + Teuerungs- u. Sortim.-Zuschl. 9:80.

Born, Max, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen gemeinverständlich dargestellt. Mit 129 Textabbildungen und einem Porträt

Einsteins. (Naturwissenschaftl. Monographien u. Lehrbücher, hrsg. von den Hrsgebern der »Naturwissenschaften» Arnold Berliner und August Pütter. Bd 3.) — X + 242 pp. 8. 1920. M. 37:40.

EINSTEIN, ALBERT, Äther und Relativitäts-Theorie. Rede gehalten am 5. Mai 1920 an der Reichs-Universität zu Leiden. — 15 pp. 8. 1920. M. 3:10.

FREUNDLICH, ERWIN, Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. Mit einem Vorwort von ALBERT EINSTEIN. 4:e, erweit. u. verb. Aufl. — 96 pp. 8. 1920. M. 11:—

HAHN, HANS, Theorie der reellen Funktionen. Bd 1. Mit 18 Textfiguren. — VII + 600 pp. 8. 1921. M. 136:—.

KLEIN, FELIX, Zur Feier seines siebzigsten Geburtstages. (Die Naturwissenschaften, H. 17, 1919). — 42 pp. 4. M. 20:80, inkl. valuta-Zuschl.

PÖSCHL, THEODOR, Einführung in die Mathematik, mit einfachen Beispielen aus der Flugtechnik. Mit 102 Textabbildungen. — VII + 134 pp. 8. 1917. M. 5:60 + Teuerungszuschlag 8:40.

REICHE, FRITZ, Die Quantentheorie. Ihr Ursprung und ihre Entwicklung. Mit 15 Textfiguren. — VI + 231 pp. 8. 1921. M. 34:—.

REICHENBACH, HANS, Relativitätstheorie und Erkenntnis apriori. — 110 pp. 8. 1920. M. 15:40.

SANTZ, ADOLF, Santz-Multiplikator. D. R. G. M. Kleinste, das gesamte Zahlenreich umfassende Rechentafel zum unmittelbaren Ablesen des Ergebnisses aller Längen-, Flächen-, Inhalts-, Gewichts- und Preis-Berechnungen, wie überhaupt der Multiplikation und Division beliebig vieler Zahlen. — X + 202 pp. 8. 1920. M. 33:— geb.

SCHEFFERS, GEORG, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In zwei Bänden. Bd 2. Mit 396 Fig. — 439 pp. 8. 1920. M. 52:—; geb. M. 60:—.

WEYL, HERMANN, Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. 4., erweit. Aufl. Mit 15 Textfiguren. IX + 300 pp. 8. 1921. M. 48:—.

Hofbuchhandlung Heinr. Staadt.

Wiesbaden.

CHRISTIANSEN, HANS, Absolut und relativ! Eine Ablehnung des »Relativitäts-Prinzips» Einsteins auf Grund einer reinen Begriffs-Mathematik. — 16 pp. 8. 1920. M. 3:—

B. G. Teubner.

Leipzig.

Fraenkel, A., Zahlbegriff und Algebra bei Gauss. Mit einem Anhang von A. Ostrowski: Zum ersten und vierten Gauss'schen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra. (Materialien für eine wissenschaftl. Biographie von Gauss, ges. von F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger, H. 8.) — 58 pp. 8. 1920.

W. J. Thieme.

Zutphen (Holland).

Derksen, H. A., Inleiding tot de hoogere wiskunde behandelende grafische voorstellingen en de beginselen d. differentiaal- en integraalrekening. (7) + 176 pp. 8. 1919. Fl. 3:50.

Grafische voorstellingen.

y is een eerste-graadsfunctie naar x. — De cirkel. Meetkund. plaatsen. — y is een functie v. d. 2. graad naar x. Maxima en minima v. functies v. d. 2 graad. — y is een functie v. d. 3 graad naar x. Maximum en minimum v. de functie $y = x^3 + ax + b$. — De vergelijking $x^4 + ax^2 + bx + c = o$. — y is een gebroken functie v. x. Oplossing v. stelsels vergelijkningen v. hoogeren graad met twee onbekenden. Het scheefhoek. coördinatenstelsel. Het poolcoördinatenstelsel. Kegelsneden. Asymptoten.

Beginselen d. differentiaalrekening.

Oneindig kleinen en oneindig grooten v. verschill. orde. Limieten. Differentialen en differentiaalquotienten. Het differentiaalquotient v. een macht. Het differentiaalquotient v. een som, verschil, produkt, quotient v. functies v. x. Differentiëeren v. functies v. functies. Differentiëeren v. exponentiëele en logarithm. functies. Differentiëeren v. goniometr. functies. Differentiëeren v. cyclometr. functies. Hoogere differentiaalquotienten. Differentiëeren v. impliciete functies. Maxima en minima. Parameters. Meetkund. toepassingen v. de differentiaalrekening.

Beginselen d. integralrekening.

Onbepaalde integralen. Integreeren bij gedeelten. Bepaalde integralen. Oppervlakken in poolcoördinaten. Lengte v. bogen. Inhouden v. omwentelingslichamen. Omwentelingsoppervlakken. Van buiten leeren. Antwoorden v. de opgaven ov. de differentiaal- en integraalrekening. Register.

Verlagsanstalt Tyrolia.

Innsbruck, Wien, München, Bozen.

Wulf, Theo, Einsteins Relativitätstheorie. Gemeinverständlich dargestellt. Mit 8 Abbildungen im Text. — 86 pp. 8. 1921.

Von Newton bis Einstein. Die spez. Relativitätstheorie Einsteins. Die allg. Relativitätstheorie. Beweise f. d. Relativitätstheorie. Bedeutung d. Relativitätstheorie f. d. Philos.

Union Deutsche Verlagsgesellschaft.

Zweigniederlassung, Berlin.

HENKLER, PAUL, Rechnen und Raumlehre in der Volksschule. Auf wissenschaftlicher Grundlage bearb. — 166 pp. 8. 1920. M. 10: —

A. Aufbau auf d. Erkenntnislehre.
 I. Die Aufgabe d. Erkenntnislehre.
 II. Erkenntnislehre u. Mathematik.
  1. Menge, Zahl, zählen. — 2. Rechnen. — 3. Raum u. Raumlehre. — 4. Die Denkweise i. mathem. Unterricht.
 III. Mathem. als Bestandteil der ges. Erkenntnisbildung.
B. Ethisches.
C. Psycholog. Ergänzungen.
D. Geschichtliches.

HENKLER, PAUL, Einführung in mathematisches Denken. Anregungen für den Unterricht und für die wissenschaftliche Fortbildung in Rechnen und Raumlehre. (Zur Fortbildung d. Lehrers. Anregungen u. Winke. Hrsg. v. Alfred Pottag. H. 48.) — 55 p. 8. 1919. M. 3: —

Die Sprache d. Mathem. Zählen u. Rechnen. Einige Grundbegriffe d. Raumlehre. Allgem. Arbeitsweisen, durch die mathem. Einsichten gewonnen werden. Der Funktionsbegriff. Mathem. in ihren Bezich. z. Wirklichkeit. Vorschläge z. Weiterbildung.

Vereinigung Wissenschaftlicher Verleger, Walter de Gruyter & Co.

Berlin.

AUGUST, E. F., Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 43. Aufl. in der Bearb. von F. August. VIII + 204 pp. 8. 1920.

BECKER, H., Geometriches Zeichnen. Neubearb. von J. Vanderlinn. 3:e (der Neubearb. 1:e) Aufl. 6:er Neudruck. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. (Sammlung Göschen. 58.). — 126 pp. 8. 1920. Kr. 1: 25 geb.

Einleitung. Einfache Konstruktionen zwischen geraden Linien u. d. Kreislinie. Konstruktion d. Kegelschnitte, Ellipse, Parabel, Hyperbel. Einige Eigenschaften d. Kegelschnitte, d. f. d. Zeichner v. Interesse sind: Pol, Polare, Sätze v. Pascal u. Brianchon. Konstruktion v. Korbbogenlinien u. Eilinien. Verwendung d. Kreislinie zu bestimmten Bogenformen. Konstruktion d. cykl. od. Rollkurven einschliesslich d. wicht Spirallinien. Konstruktion einiger and. Spirallinien. Konstruktion d. Konchoide. Konstruktion d. Cissoide. Konstruktion einiger Ovallinien. Verbindung v. geraden u. krummen Linien zu geometr. Ornamenten. Konstruktion v. Massstäben. Verkleinern u. Vergrössern v. Figuren.

Bürklen, O. Th., Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes. Mit 8 Figuren. 2:e, verb. u. verm. Aufl. (Sammlung Göschen. 309.) — 109 pp. 8. 1912. Kr. 1:25 geb.

Punkt, Ebene, gerade Linie. — Die Kugel. — Krumme Flächen (Herleitung d. Gleichung aus d. Entsteh.-Gesetz). — Flächen 2. Grades. — Raumkurven; Schnittlinien v. Flächen. Vermischte Aufgaben.

Burkhardt, Heinrich, Funktionentheoretische Vorlesungen. Neu hrsg. von Georg Faber. Bd 2. Elliptische Funktionen. 3. vollständig umgearb. Aufl. besorgt von Georg Faber. Mit zahlreichen Figuren im Text. XVI + 444 pp. 8. 1920.

Einleitung. Die auf d. Riemannschen Fläche f. $\sqrt{a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4}$ eindeut. Funktionen. Ellipt. Integrale. Allgem. Lehrsätze üb. ellipt. Funktionen. Die Funktionen $\wp u$ und σu. Darstellung d. ellipt. Funktionen durch σu und $\wp u$. Die ellipt. Funktionen zweiter Ordnung. Die Funktionen $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$, snw, cnw, dnw. Thetafunktionen. Das Umkehrproblem. Integrale zweiter u. dritter Gattung als Funktionen des Integrals erster Gattung. Normalformen d. ellipt. Integrale erster Gattung. Lineare Transformation d. Perioden. Die Modulfunktionen $J(\tau)$ und $\lambda(\tau)$. Allgem. üb. Modulfunktionen. Die Funktionen $J(n\tau)$ und $\lambda(n\tau)$. Transformation ellipt. Funktionen u. ellipt. Integrale. Ganzzahlige Multiplikation u. Teilung d. ellipt. Funktionen. Komplexe Multiplikation u. Teilung d. ellipt. Funktionen. Numer. Berechnung ellipt. Integrale u. Funktionen. Ausartungen elliptischer Funktionen. Algebr.-geometr. Anwendungen d. ellipt. Funktionen. Das sphär. Pendel.

Fischer, Paul B., Koordinatensysteme. Mit 8 Figuren. 2:e, verbess Aufl. (Sammlung Göschen. 507.) — 128 pp. 8. 1919. Kr. 1:25 geb.

Einleitung. — Die Descartes-Plückerschen Koordinaten. — Die projektiven Koordinaten. — Die krummlinigen Koordinaten. — Koordinatenbestimmung in d. mehrdimensionalen Geometrie.

Haas, Arthur Erich, Die Grundgleichungen der Mechanik, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung. Vorlesungen zur Einführung in die theoretische Physik, gehalten im Sommersemester 1914 an der Universität Leipzig. Mit 45 Abbildungen im Text. V + 216 pp. 8. 1914.

Das Princip d. stat. Momente. Das Prinzip d. Kräfteparallelogrammes. Das Prinzip d. virtuellen Geschwindigkeiten. Die Gleichgewichtsgleichungen v. Lagrange. Begründung d. Dynamik durch Galilei. Bewegungsaxiome. Natürl. Bewegungsgleichungen d. freien materiellen Punktes. Bewegungsgleichungen d. freien materiellen Punktes in rechtwinkl. u. in Polarkoordinaten. Die Keplerschen Gesetze d. Planetenbewegungen. Das Gravitationsprinzip. Das Prinzip d. Erhaltung d. Schwerpunktes. Das Prinzip d. Erhaltung d. Flächenmomente. Das Prinzip d. Erhaltung d. lebend. Kraft. Entsteh. d. Potentialbegriffes. Das Problem d. unfreien Bewegung. Das Prinzip v. d'Alembert. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen d. ersten Form u. d. Methode d. Multiplikatoren. Die generalisierten Bewegungsgleichungen v. Lagrange. Das Prinzip d. kleinsten Aktion. Das Hamiltonsche Prinzip u. d. Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

HAUBER, W., Statik. T. 1. Die Grundlehren der Statik starrer Körper. Mit 82 Figuren. Fünfter Neudruck. (Sammlung Göschen. 178.) — 148 pp. 8. 1919. Kr. 1:25 geb.

Einleitung. — Kräfte d. Ebene mit gemeins. (materiellem) Angriffspunkt. — Kräfte d. Ebene, d. in verschied. Punkten eines starren Körpers angreifen. — Kräfte d. Raumes mit gemeins. (materiellem) Angriffspunkt. — Kräfte d. Raumes, d. in verschied. Punkten eines starren Körpers angreifen. — Vom Schwerpunkt. — Von d. Widerstandskräften u. ihrer Bestimmung.

HAUSDORFF, FELIX, Grundzüge der Mengenlehre. Mit 53 Figuren im Text. — VIII + 476 pp. 8. 1914. M. 44: — geb. + 185 % Zuschlag. = 125: 40.

Mengen u. ihre Verknüpfungen: Summe, Durchschnitt, Differenz; Funktion, Produkt, Potenz. — Kardinalzahlen od. Mächtigkeiten. — Geordnete Mengen. Ordnungstypen. — Wohlgeordn. Mengen. Ordnungszahlen. — Bezieh. zwischen geordn. u. wohlgeordn. Mengen. — Punktmengen in allgem. Räumen. — Punktmengen in spez. Räumen. — Abbildungen od. Funktionen. — Inhalte v. Punktmengen. — Nachträge u. Anm.

HESSENBERG, GERHARD, Ebene und sphärische Trigonometrie. Mit 59 Figuren. 3:e, neubearb. Aufl. Durchgeseh. Neudruck. (Sammlung Göschen. 99.) 171 pp. 8. 1920. Kr. 1:25 geb.

Einleitung.

T. 1. Ebene Trigonometrie.

Das rechtwinkl. Dreieck. Trigonometr. Funktionen beliebiger Winkel. Das schiefwinkl. Dreieck. Additionstheoreme. Geometr. Anwendungen d. Additionstheoreme. Das Viereck.

T. 2. Sphärische Trigonometrie.

Vorbereitungen aus d. sphär. Geometrie. Das rechtwinkl. sphär. Dreieck. Das schiefwinkl. sphär. Dreieck.

T. 3. Berechnung u. algebr. Anwendung d. trigonometr. Funktionen.

Elementare Berechnungsmethoden. Der Moivresche Satz. Die Methode d. Hilfswinkel.

JÄGER, GUSTAV, Theoretische Physik. 3. Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Figuren. 4:e, verb. Aufl. Neudruck. (Sammlung Göschen. 78.) — 147 pp. 8. 1920. Kr. 1:25 geb.

Elektrostatik. Magnetismus. Elektromagnetismus.

KNOPP, KONRAD, Funktionentheorie. T. 2. Anwendungen u. Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. 2: e, vollst. neu bearb. Aufl. (Sammlung Göschen. 703.) 138 pp. 8. 1920. Kr. 1:25 geb.

1. Eindeutige Funktionen.

Ganze Funktionen. Meromorphe Funktionen. Period. Funktionen.

3. Mehrdeutige Funktionen.
Wurzel u. Logarithmus. Algebr. Funktionen. Das analyt. Gebilde.

Krause, Martin, Analysis der ebenen Bewegung. Unter Mitwirkung von Alexander Carl. VII + 216 pp. 1920. Kr. 6: 50.

Die wicht. Bestimmungsarten d. Bewegung starrer ebener Systeme. Die Krümmungstheorie d. ebenen Bewegung. Ballscher Punkt u. Kreis-punktkurve. Höhere Rückkehr-u. Wendepole. Die Burmesterschen Punkte. Die zweiten Krümmungsmittelpunkte d. Bahnkurven, die höh. Evoluten d. Polkurven u. Hüllbahnkurven. Die wicht. Bestimmungsarten d. Bewegung ähnlich veränderl. Systeme. Die Krümmungstheorie d. ebenen ähnlich veränderl. Bewegung. Die Kreispunktkurve. Die Evoluten d. Einhüllenden v. Systemkurven. Spez. ebene ähnlich veränderl. Bewegungen. Zusammenhänge zwischen d. Bahnkurven starrer u. ähnl. veränderl. Systeme.

Schmid, Theodor, Darstellende Geometrie. Bd 1. Mit 170 Figuren. 2:e Aufl. (Sammlung Schubert. 65.) — 278 pp. 8. 1919. Kr. 3: 50 geb.

Raumelemente, ebene Figuren u. eckige Körper. — Kugel, Zylinder, Kegel. — Kugel, Zylinder, Kegel (Fortsetzung); Plankurve u. Raumkurve. — Orthogonale Axonometrie (Neigung d. Achsensystemes. Elementaraufgaben. Drehung d. Achsensystemes. Eckige Körper. Kugel, Zylinder, Kegel.)

Wieleitner, Heinrich. Geschichte der Mathematik. T. 2. Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Hälfte 2. Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Figuren. (Sammlung Schubert. 64.) — VI + 220 pp. 8. 1921. Kr. 11:25.

Analyt. Geometrie d. Ebene. insbes. d. Kegelschnitte. Analyt. Raumgeometrie u. Flächen. Höhere Kurven i. allgem. Spezielle Kurven. Differentialgeometrie. Perspektive u. darstell. Geometrie. Trigonometrie. Elementargeometrie.

Willers, Fr. A., Graphische Integration. Mit 53 Fig. (Sammlung Göschen Nr. 801). — 142 pp. 8. 1920. M. 2: 10 + 100 % Teuerungszuschl.

Quadratur. Integration v. Diff. gl. erster Ordn. Integrat. v. simultanen Diff. gl. u. v. Diff. gl. höherer Ordn. Integrat. partieller Diff. gl.

Friedrich Vieweg & Sohn.

Braunschweig.

Isenkrahe, C., Zur Elementaranalyse der Relativitätstheorie. (Sammlung Vieweg, H. 51.) — 133 pp. 8. M. 6: — 1921.

Einl. Die Bedeut. d. »Grundlagen» in d. Auffassung Hilberts u. Einsteins. Erörterung einiger Vorfragen zu d. Darleg. Weyls. Das Probl. d. Augenblicks. Das Probl. d. Ortes. Das Probl. d. Beweg., d. zugehörigen Zeitverlaufs u. d. Wegbahn. Das Probl. d. Grenze, d. Dimension, d. Krümmung u. d. Strecke. Das Probl. d. Vergleichens.

Krit. d. Gleichheit zeitlicher Objekte. Die period. Geschehnisse. Das Probl. d. Berechn. v. Zeitstrecken. Das Probl. zeitlicher Koordinaten. Das Probl. d. Vergleichung räumlicher Strecken. Das Riemannsche Probl. — Zusammenstellungen.

Volkshochschul-Verlag.

Charlottenburg.

ENGELHARDT, VICTOR, Einführung in die Relativitätstheorie. Mit 3 Abbildungen im Text. (Volkstüml.-wissenschaftl. Lehr- u. Lernbücher. Hrsg. v. Max Apel. H. 4.) — 48 pp. 8. 1920. M. 3: —

Einleitung. Vom Weltbild i. allgem. Die »klass.» Mathem. Die »klass. Elektr.-Lehre». Der Michelsonsche Versuch. Relativität d. Zeit. Relativität d. Raumes. Relativität d. Masse. Ausblick üb. d. allgem. Relativitätstheorie.

Libraire Vuibert.

Paris.

BOULIGAND, GEORGES, Cours de geométrie analytique. Avec une préf. de M. CARTAN. — VII + 421 pp. 8. 1919. Fr. 16: —

Introd. Rappel de notions fondam. rel. aux vecteurs, aux segments, aux angles, aux projections. — Coordonnées. Représentation analyt. des lignes et des surfaces. — La droite et le plan. — Éléments de l'infini. Éléments imaginaires. — Propriétés gen. des lignes et des surfaces de la géometrie réelle. — Courbes et surfaces algébr. — Des lieux géométr. — Étude somm. de quelques transformations. Notions sur l'homographie. — Corrélation. Tangentes. Enveloppes. — Longueur d'un arc. Courbure. — Courbes du second ordre. — Surfaces du second ordre ou quadriques. — Intersection de deux quadriques. — Courbure des lignes tracées sur une surface. — Compléments.

BROCARD, H., & LEMOYNE, T., Courbes géométriques remarquables (courbes spéciales), planes & gauches. T. 1. — VIII + 451 pp. 8. 1920. Fr. 25: —.

Abaque. Acampte. Aclaste. Agnésienne. Alysoïde. Anacamptique. Anaclastique. Anallagmatique. Anallagmatique sphérique. Anamorphose. Angle. Anguinée. Antevoluta. Anticaustique. Antidéveloppée. Antidiamétrale. Antipodaire. Antistéréographique. Apienne. Araignée ou aranea. Arbelos. Arête de rebroussement. Arguésienne. Astroïde. Astroïde oblique. Astroïde projective. Atriphtaloïde. Autopodaire. Axe harmonique. Axe longitudinal. Axoïde Barycentrique. Besace. Bicorne. Bifolium. Biquadratique. Biquadratique sphérique. Biquartique. Boucle. Brachistochrone. Cappa. Caractéristique. Cardioïde etc., etc.

GALEMBERT, LE V[te] DE, Nouvelles méthodes de résolution des équations du 3[e] degré. (Compléments d'algèbre.) — 22 pp. 8. 1919. Fr. 1: 50.

ÜBER DIE KONFORME ABBILDUNG ENDLICH- UND UNENDLICH-VIELFACH ZUSAMMENHÄNGENDER SYMMETRISCHER BEREICHE.

VON

PAUL KOEBE

in JENA.

(JOHANNES THOMAE zu seinem achtzigsten Geburtstage am 11 Dezember 1920 zugeeignet).

In der Abhandlung VI der Serie «Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung»[1] habe ich u. a. die Aufgabe der konformen Abbildung eines symmetrischen mehrfach zusammenhängenden Schlitzbereichs auf einen symmetrischen Kreisbereich mittels eines Iterationsverfahrens behandelt. Die dort gegebene Lösung ist jedoch, was den Konvergenzbeweis anbetrifft, auf den Fall endlichen Zusammenhanges beschränkt. In vorliegendem Artikel (§ 3) wird das erwähnte Iterationsverfahren in einer Form begründet, die diesem Verfahren auch für den Fall unendlich hohen Zusammenhanges Geltung verleiht. Aber auch die umgekehrte Abbildungsaufgabe, bei der der endlich- oder unendlich- vielfach zusammenhängende Kreisbereich als gegeben betrachtet wird und die Abbildung auf einen Schlitzbereich verlangt wird, wird §§ 1 u. 2 ausführlich behandelt, indem gezeigt wird, dass eine unmittelbar aufstellbare unendliche Reihe SCHOTTKY'schen Typus diese Abbildung leistet.[2] Es ist bemerkenswert, dass beide bezeichnete Abbildungsaufgaben, von denen die eine die Umkehrung der andern ist, hier durch eine einfach

[1] Die Abhandlung VI führt den Untertitel »Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hyperelliptischer Kurven (Iterationsmethoden).» Erschienen in Math. Zeitschrift, Bd VII, 1920.

[2] Die Abbildung eines *endlich*-vielfach zusammenhängenden symmetrischen Kreisbereichs auf einen symmetrischen Schlitzbereich wurde zuerst in einem Aufsatze »ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Funktionen» (Gött. Nachr., 1886, p. 359) von H. WEBER behandelt. Weber beweist zunächst die Existenz der Abbildungsfunktion z unter Benützung der SCHWARZ'schen potentialtheoretischen Existenzbeweise und zeigt dann, dass die Grössen $\sqrt{\frac{z-a_{2\nu-1}}{z-a_{2\nu}}}$ durch unendliche Produkte darstellbar sind, wenn $a_{2\nu-1}$ und $a_{2\nu}$ die Endpunkte irgend eines der Begrenzungsschlitze dieses Schlitzbereiches sind.

geordnet fortschreitende unendliche Folge elementarer Rechenvorschriften gelöst erscheinen. In diesem Sinne einordnet sich die vorliegende Arbeit den von mir in der oben erwähnten Serie grundsätzlich verfolgten Bestrebungen einer rein funktionentheoretischen Umbildung der Theorie der konformen Abbildung. Dieser Tendenz wird auch der letzte Abschnitt (§ 5) gerecht, worin die Abbildung eines ganz beliebig begrenzten symmetrischen Bereichs B auf einen Schlitzbereich mittelst einer einfach unendlichen Folge reeller »Fundamentaltransformationen» ausgeführt wird (Schmiegungsverfahren), womit dann auch zufolge § 3 eine Abbildung auf einen Kreisbereich gewonnen ist. — Der Inhalt gliedert sich, wie folgt:

§ 1. Abbildung des m-fach zusammenhängenden Kreisbereichs auf einen Schlitzbereich. (Methode der Reihenbildung).

§ 2. Abbildung des unendlich-vielfach zusammenhängenden Kreisbereichs auf einen Schlitzbereich. (Methode der Reihenbildung).

§ 3. Das umgekehrte Abbildungsproblem, insbesondere für Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang. (Iterationsverfahren).

§ 4. Bemerkungen betreffend die Ränderzuordnung der auf einander abgebildeten Bereiche.

§ 5. Abbildung des allgemeinsten beliebig begrenzten symmetrischen Bereichs. (Schmiegungsverfahren).

§ 1.

Abbildung des m-fach zusammenhängenden Kreisbereichs auf einen Schlitzbereich. (Methode der Reihenbildung.)

1. Wir bezeichnen mit K einen von m getrennten Kreisen begrenzten symmetrischen m-fach zusammenhängenden Bereich in der Ebene der komplexen Veränderlichen ζ. Die Symmetrie des Bereiches bestehe in Bezug auf die Achse des Reellen. Sämtliche m Begrenzungskreise sollen die Achse des Reellen unter rechten Winkeln schneiden. Der unendlich ferne Punkt der ζ-Ebene werde als innerer Punkt des Bereiches angenommen.

Wir stellen uns als erste Aufgabe die, *den Bereich K eineindeutig konform auf einen symmetrischen Schlitzbereich S abzubilden*, der von m getrennten auf der Achse des Reellen einer z-Ebene liegenden Schlitzen begrenzt wird. Bei dieser Abbildung sollen je zwei symmetrischen Punkten der ζ-Ebene symmetrische Punkte der z-Ebene entsprechen; insbesondere also sollen den m in K enthaltenen auf der Achse des Reellen liegenden Strecken ebensolche Strecken entsprechen. Die Abbildungsfunktion $\varphi(\zeta)$ soll ferner längs den Begrenzungskreisen des Bereiches K regulär sein, wie

auch in dem ganzen endlichen Innern des Bereiches K. Im Unendlichen soll die Abbildungsfunktion sich gemäss der Formel

$$z = \varphi(\zeta) = \zeta + ((o))$$

verhalten. Es wird also verlangt, dass der unendlich ferne Punkt bei der Abbildung wieder in den unendlich fernen Punkt und zwar in der angegebenen Weise übergeht.

Die Abbildungsfunktion $\varphi(\zeta)$ ist durch die angegebenen Eigenschaften vollständig bestimmt. (*Unitätssatz.*) Wäre nämlich $\psi(\zeta)$ eine zweite Funktion der verlangten Art, so würde

$$w = \varphi(\zeta) - \psi(\zeta) = w(\zeta)$$

eine in K mit Einschluss der Begrenzung reguläre Funktion sein, deren imaginärer Teil an der ganzen Begrenzung den Wert Null hat. Daraus ergibt sich, dass der imaginäre Teil identisch verschwindet. Dann muss sich aber $w(\zeta)$ selbst auf eine Konstante reduzieren zufolge dem Satz, das der reelle bzw. imaginäre Teil einer von einer Konstanten verschiedenen regulären Funktion in beliebiger Nähe einer regulären Stelle algebraisch grössere wie kleinere Werte annimmt.

Da die gesuchte Funktion $\varphi(\zeta)$ auf den Begrenzungskreisen reelle Werte annimmt, können wir sie in bekannter Weise gemäss dem Riemann-Schwarz'schen Spiegelungsprinzip über diese Begrenzungskreise hinaus analytisch fortsetzen. Indem wir eine Spiegelung an einem solchen Begrenzungskreise mit einer Spiegelung an der Achse des Reellen kombinieren, ergibt sich eine reelle lineare Substitution, nämlich diejenige elliptische Substitution der Periode 2, deren Fixpunkte die beiden Schnittpunkte des betreffenden Kreises mit der Achse des Reellen sind. Diese elliptische Substitution ordnet die beiden Hälften des Kreises oberhalb und unterhalb der Achse des Reellen einander in der Weise zu, dass je zwei spiegelbildlich symmetrisch liegende Punkte einander entsprechen. Wir gewinnen so den m Begrenzungskreisen entsprechend m reelle lineare Substitutionen, denen gegenüber die Funktion $\varphi(\zeta)$ ungeändert bleibt. Der Bereich K kann demgemäss als ein Fundamentalbereich derjenigen linearen Substitutionsgruppe Γ aufgefasst werden, die durch unbegrenzt kombinierte Wiederholungen der genannten m erzeugenden Substitutionen entsteht.

Hiermit ist eine Auffassung der Funktion $\varphi(\zeta)$ gewonnen, die auf naturgemässe Weise zu einer die Funktion unmittelbar liefernden unendlichen Partialbruchreihe führt. Wir wollen zu diesem Zwecke die von der identischen Transformation verschiedenen Substitutionen der Gruppe Γ mit

$$\zeta_n = L_n(\zeta)$$

bezeichnen, wobei wir uns den Index n entsprechend den unendlich vielen Substitutionen der Gruppe Γ alle positiven ganzzahligen Werte durchlaufend denken. Dem Punkte $\zeta = \infty$ entspreche der Punkt

$$\omega_n = L_n(\infty).$$

Wegen des automorphen Verhaltens der Funktion $\varphi(\zeta)$ gegenüber den Substitutionen der Gruppe Γ wird das Unendlichwerden der Funktion $\varphi(\zeta_n)$ bei Annäherung der Grösse ζ_n an die Stelle ω_n dadurch gefunden werden können, dass man die Grösse ζ, die das Unendlichwerden der Funktion $\varphi(\zeta)$ im Unendlichen charakterisiert, in Abhängigkeit von ζ_n betrachtet:

$$\zeta = \zeta(\zeta_n) = L_n^{-1}(\zeta_n),$$

wo mit L_n^{-1} die zu L_n inverse Substitution bezeichnet wird. Für uns handelt es sich darum, den Hauptteil dieser Funktion von ζ_n zu bilden. Dieser wird aber für eine gebrochene lineare Substitution immer dadurch gefunden, dass man den Wert der betreffenden linearen Funktion für den Argumentwert ∞ von der Funktion selbst abzieht. Das gibt in unserem Falle

$$L_n^{-1}(\zeta_n) - L_n^{-1}(\infty)$$

als Hauptteil. Für die Partialbruchbildung der Funktion $\varphi(\zeta)$ ist in vorstehenden Ausdrucke ζ_n durch ζ zu ersetzen. Bedenken wir ferner, dass die Gesamtheit der Substitutionen L_n^{-1} der Gruppe Γ mit der Gesamtheit der Substitutionen L_n selber identisch ist, so erhalten wir folgende Partialbruchreihe

$$\zeta + \sum_n (L_n(\zeta) - L_n(\infty)),$$

d. i.

$$\zeta + \sum_n (\zeta_n - \omega_n).$$

2. Die so gewonnene Reihe ist nunmehr einer besonderen Untersuchung daraufhin zu unterwerfen, ob sie *konvergiert* und ob die durch sie dargestellte Funktion tatsächlich die gewünschte *Abbildung leistet*.

Was zunächst die Frage der Konvergenz anbetrifft, so kommt deren Prüfung auf die Prüfung der Konvergenz der Reihe

$$\sum_n |\zeta_n - \omega_n|$$

hinaus.

Denken wir uns ζ zunächst im gegebenen Fundamentalbereich K variierend, so variiert ζ_n in einem Bildbereiche desselben, nämlich einem Kreisbereiche K_n, der auch den Punkt ω_n in seinem Innern enthält. Die einzelne Grösse $|\zeta_n - \omega_n|$ ist also kleiner als der Durchmesser des umschliessenden Kreises K_n' von K_n. Nun ist aber die Summe der Umfänge und damit auch die Summe der Durchmesser aller solcher Kreise konvergent,[1] womit die gleichmässige Konvergenz unserer Reihe zunächst bei Beschränkung der Variabilität von ζ auf den Bereich K feststeht. Lässt man ζ die Grenze von K überschreiten und nimmt zu K eine endliche Anzahl aneinander anschliessender Bereiche K_n hinzu, so wird auch in dem so erweiterten Variabilitätsbereich gleichmässige Konvergenz der Reihen bestehen nach Abtrennung derjenigen endlich vielen Glieder der Reihe, die in den jenen Bereichen entsprechenden Punkten ω_n unendlich werden. Denn auch bei dieser erweiterten Variabilität wird die Summe $\sum\limits_n |\zeta_n - \omega_n|$ nach Abtrennung endlich vieler Glieder gleichmässig mit Hilfe der Summe der Durchmesser aller Kreise K_n' abgeschätzt werden können, weil der Uebergang von ζ_n zu ω_n jetzt immer nur die Ueberschreitung einer bestimmten beschränkten Anzahl von Kreisen K_n' erfordert, sodass $|\zeta_n - \omega_n|$ jedenfalls kleiner ist als die Summe der Durchmesser jener überschrittenen Kreislinien. Aus dem topologischen Gesetze der Nebeneinanderlagerung der Bereiche K_n ergibt sich sofort, dass bei dieser Abschätzung der einzelne Kreis K_n' nur eine beschränkte Anzahl von Malen zu Verwendung kommt, wobei die gemeinte Beschränkung der Anzahl eine für alle Werte des Index n gleichmässig gültige ist.

Die aufgestellte Reihe stellt nach Vorstehendem eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme der bei Anwendung des gruppentheoretischen Reproduktionsprozesses auf den Fundamentalbereich K freigelassenen unendlich vielen diskreten Punkte der Achse des Reellen meromorphe Funktion dar, die nur in den Punkten ∞ und ω_n unendlich wird und zwar mit den eingeführten Hauptteilen.

Die dargestellte Funktion nimmt offenbar auf der Achse des Reellen nur reelle Werte an, mithin an je zwei spiegelbildlich symmetrischen Punkten zur Achse des Reellen konjugiert komplexe Werte. Wendet man auf ζ eine erzeugende Substitution an, ersetzt also etwa ζ durch ζ_1, so bedeutet dies eine Ersetzung der Grösse ζ_n durch $\zeta_{n'}$ in der Weise, dass $(\zeta_1, \zeta_{n'})$ dieselbe Grössengesamtheit wie (ζ, ζ_n) bedeuten, nämlich ein und dasselbe vollständige System bezüglich der Gruppe Γ äquivalenter Werte. Die einzelnen Terme unserer Reihe werden demgemäss durch neue Terme ersetzt, die abgesehen von additiven Konstanten völlig

[1] Vgl. § 6 der Abhandlung IV der Serie »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung» in Acta math. Bd. 41, insbes. pag. 327, (1918).

übereinstimmen. Nach der Ersetzung findet nun aber ebenfalls Konvergenz der Reihe statt. Daraus folgt, dass das Resultat der Ersetzung nur eine Aenderung des Funktionswertes um eine additive Konstante sein kann. Diese additive Konstante muss jedoch gleich Null sein, weil sich bei Wiederholung der erzeugenden Substitution als einer elliptischen Substitution der Periode 2 die identische Substitution ergibt.

In spiegelbildlich symmetrischen Punkten eines Begrenzungskreises von K nimmt unsere Reihenfunktion wegen ihrer Realität auf der Achse des Reellen konjugiert komplexe Werte an, wegen der Aequivalenz solcher Punkte vermöge einer erzeugenden elliptischen Substitution nimmt sie andererseits ebenda gleiche Werte an. Das ist nur vereinbar, wenn die auf K angenommenen Werte reell sind.

3. Die Reihenfunktion hat, wie wir sehen, alle Eigenschaften, die wir oben für die Funktion $\varphi(\zeta)$ als charakteristisch nachgewiesen haben. Auch die Normierungsbedingung der Funktion $\varphi(\zeta)$ ist für unsere Reihenfunktion erfüllt, da alle Glieder der Reihe, abgesehen von dem ersten Gliede für $\zeta = \infty$ den Wert Null annehmen. Wir können somit die Reihenfunktion mit $\varphi(\zeta)$ bezeichnen. Zu beweisen bleibt jedoch noch, dass tatsächlich die gewünschte Abbildung durch $\varphi(\zeta)$ geleistet wird. Dieser Beweis gründet sich auf die erwähnten bereits festgestellten Eigenschaften der Funktion $\varphi(\zeta)$.

Man kann die Funktion $\varphi(\zeta)$ an jeder Stelle des Bereichs K nach der Methode der Reihenumkehrung umkehren. Diese Umkehrung kann man vollständig für das ganze Gebiet K mittels einer endlichen Anzahl von Umkehrungsreihen bewirken. Man erkennt hieraus, dass man den Bereich K in endlich viele Parzellen so zerlegen kann, dass diese Parzellen einzeln auf schlichte Gebiete (Bildparzellen) abgebildet werden; dabei kan man u. a. die etwa vorhandenen Nullstellen der Ableitung $\varphi'(\zeta)$ als Parzellenecken einführen. Es zeigt sich nun, wenn man die gefundenen Bildparzellen ihrerseits ordnungsgemäss aneinanderschliesst, dass dann ein Riemann'sches Flächenstück entsteht, das als eineindeutiges Bild von K anzusprechen ist. Dieses Flächenstück wird durch ganz über der Achse des Reellen verlaufende Linien begrenzt, die ausserdem ganz im Endlichen liegen. Daraus ist ohne weiteres klar, dass das betrachtete Flächenstück die Ebene endlichvielblättrig und zwar überall gleich-vielblättrig bedecken muss. Dass die Bedeckung eine einblättrige ist, folgt dann daraus, dass der unendlich ferne Punkt jedenfalls nur einfach bedeckt wird. Nunmehr ist klar, dass die Begrenzung unseres Flächenstückes nur von m von einander getrennt verlaufenden Schlitzen auf der Achse des Reellen gebildet sein kann. Damit ist aber die Abbildungsaufgabe, die wir uns in diesem Paragraphen gestellt haben, vollständig erledigt.

§ 2.

Abbildung des unendlich-vielfach zusammenhängenden Kreisbereiches auf einen Schlitzbereich.

(Methode der Reihenbildung.)

4. Nunmehr werde mit K ein symmetrischer Kreisbereich unendlich hohen Zusammenhanges der ζ-Ebene bezeichnet. Einen solchen denken wir uns durch unendlich viele getrennte die Achse des Reellen senkrecht schneidende Kreise begrenzt, die alle in einem endlichen Bezirke enthalten sind und ausserdem der Bedingung genügen, eine diskrete Gesamtheit zu bilden, womit gemeint ist, dass zwischen je zwei der Begrenzungskreise ein Intervall der Achse des Reellen liegt, das dem Innern des Bereiches K angehört. Die jetzt zu bestimmende Abbildungsfunktion $\varphi(\zeta)$, die den gegebenen symmetrischen Kreisbereich K auf einen Schlitzbereich S abbildet, soll ausserdem im Unendlichen wieder die frühere Normierungsbedingung

$$z = \varphi(\zeta) = \zeta + ((0))$$

erfüllen. Die Regularität der Abbildungsfunktion wird weiter auch auf den Begrenzungskreisen verlangt[1], wobei aber in denjenigen Durchstossungspunkten mit der Achse des Reellen eine Ausnahme zu machen ist, die Häufungspunkte von Begrenzungskreisen sind. Diese Ausnahmepunkte wollen wir als *singuläre Grenzpunkte* bezeichnen. Ganz allgemein mögen als singuläre Grenzpunkte diejenigen Punkte der ζ-Ebene bezeichnet werden, die sich als Häufungspunkte von Begrenzungskreisen des Bereichs K darstellen. Hiernach braucht ein singulärer Grenzpunkt nicht notwenig auf einem Begrenzungskreise zu liegen, er kann vielmehr für sich eine vollständige Begrenzung des Bereiches K darstellen (*accessorische Grenzpunkte*).

Dass für die gestellte allgemeine Abbildungsaufgabe der *Unitätssatz* gilt, ergibt sich durch eine leichte Modifikation der früheren Betrachtung für endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche. Leiste etwa $\varphi(\zeta)$ die Abbildung auf einen Schlitzbereich S der z-Ebene, $\psi(\zeta)$ eine Abbildung auf einen Bereich S' einer z'-Ebene, so könnten wir z' als Funktion von z betrachten. Die Differenz

$$z' - z = W(z)$$

wäre eine für $z = \infty$ verschwindende analytische Funktion, deren imaginärer Teil

[1] Siehe hierzu § 4 der vorliegenden Abhandlung.

in einem die Begrenzungsschlitze von S sämtlich enthaltenden schmalen rechtecksförmigen Streifen unter jede Grenze herabsinken müsste, wenn jener Streifen schmaler und schmaler gewählt würde. Daraus aber würde folgen, dass der imaginäre Teil von $W(z)$ im ganzen Aussengebiete des erwähnten Streifens beliebig klein abgeschätzt werden könnte, mithin identisch verschwinden müsste.

5. Es ist nun der Nachweis der tatsächlichen *Existenz* einer Abbildungsfunktion $\varphi(\zeta)$ zu führen. Dazu nehmen wir erneut auf unsere frühere Reihe Bezug und wollen dartun, dass sie *auch im vorliegenden Falle die gewünschte Abbildung leistet.*

Wir fassen dazu den Bereich K in derselben Weise wie früher als einen Fundamentalbereich mit nunmehr unendlich vielen elliptischen Substitutionen der Periode 2 als Erzeugenden auf, und setzen die Reihe an

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \sum_n (\zeta_n - \omega_n).$$

Was zunächst die Frage der *absoluten Konvergenz* der Reihe anbetrifft, so können wir jetzt nicht das Argument der Konvergenz der Summe der Umfänge aller Grundkreisbilder K'_n heranziehen; das ist aber auch nicht notwendig. Wir bemerken zunächst, dass bei Ausübung des Spiegelungsprozesses auf den Bereich K auch im vorliegenden Falle eine vollständige Bedeckung der ζ-Ebene mit Ausnahme einer unendlichen Menge diskreter Punkte der Achse des Reellen bewirkt wird. Man übersieht dies sofort, wenn man den Spiegelungsprozess stufenweise in der Weise vornimmt, dass man nach jedem Schritte das ganze bis dahin gewonnene Gebiet an einem seiner Begrenzungskreise spiegelt, wobei dann nach dieser Spiegelung alle neu auftretenden Begrenzungskreise Durchmesser haben, die kleiner sind als der Halbmesser des Spiegelungskreises. Bei der Spiegelung geht nämlich der unendlich ferne Punkt in den Mittelpunkt des Spiegelungskreises über. Man kann es daher offenbar so einrichten, dass man nach einer endlichen Anzahl von Spiegelungen den Bereich so erweitert hat, dass sämtliche nunmehr vorhandene Begrenzungskreise Durchmesser von beliebiger Kleinheit haben. Dadurch wird in der Tat klar, dass obere und untere Halbebene bei dem Spiegelungsprozesse nach und nach vollständig bedeckt wird, und dass auch auf der Achse des Reellen kein noch so klein angenommenes endliches Intervall existieren kann, das nicht durch den Gebietserweiterungsprozess ganz oder teilweise erfasst würde. Das durch den Spiegelungsprozess tatsächlich erfasste Gebiet der ζ-Ebene möge mit $Z^{(\infty)}$ bezeichnet werden, soweit es nur von inneren Punkten gebildet wird.

Zum Nachweis der gleichmässigen und absoluten Konvergenz gehen wir von der offenbaren Tatsache der Konvergenz der Summe der Länge aller Bildintervalle

eines beliebigen ganz in $Z^{(\infty)}$ enthaltenen reellen Intervalls s aus, wobei jedoch diejenigen Bildintervalle ausgenommen sind, die den unendlich fernen Punkt der ζ-Ebene enthalten. Von hier aus ergibt sich leicht der Satz, dass die Summe der Umfänge aller Bildkreise eines in $Z^{(\infty)}$ enthaltenen Kreises konvergiert[1], wenn vorkommendenfalls diejenigen Bildkreise ausgenommen werden, die durch den unendlich fernen Punkt der ζ-Ebene hindurchgehen und sich also als Geraden darstellen.

Die gleiche Bemerkung gilt von irgend einem in der ζ-Ebene angenommenen Kreisbogen oder Kreisbogenpolygon und deren vermöge der Substitutionsgruppe Γ sich ergebenden Bildkurven. Nun kann man aber die Punktpaare (ζ_n, ω_n) durch derartige unter einander vermöge der Gruppe Γ äquivalente Kreisbogenpolygone k_n mit einander verbinden, und die Länge eines solchen Kreisbogenpolygons ist immer grösser als die Länge $|\zeta_n - \omega_n|$; womit die gleichmässige und absolute Konvergenz unserer Reihe $\varphi(\zeta)$ dargetan ist.

Die Funktion $\varphi(\zeta)$ bleibt aus demselben Grunde wie früher gegenüber den Substitutionen der Gruppe Γ ungeändert. Sie nimmt auf der Achse des Reellen und auf den Begrenzungskreisen des Bereichs K nur reelle Werte an und ist auf der ganzen Begrenzung von K mit Ausnahme der singulären Grenzpunkte offenbar regulär.

6. Zu zeigen bleibt jedoch noch, dass die Funktion $\varphi(\zeta)$ die verlangte Abbildung auf einen symmetrischen Schlitzbereich S leistet.

Dazu gehen wir von der Auffassung der Gruppe Γ als Grenzfall einer Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden aus. Denken wir uns die unendlich vielen Erzeugenden der Gruppe Γ irgendwie numeriert, so können wir auf Grund dieser Numerierung die Gruppe Γ als Grenze einer Gruppe Γ_ν auffassen, wenn wir mit Γ_ν diejenige Gruppe bezeichnen, die aus den ν ersten Erzeugenden von Γ entspringt. Die unter Beschränkung auf die Gruppe Γ_ν gebildete Reihe

$$\varphi_\nu(\zeta) = \zeta + \sum_{n_\nu} (\zeta_{n_\nu} - \omega_{n_\nu}),$$

in der n_ν nur diejenigen Werte des allgemeinen Index n durchläuft, die Substitutionen der Gruppe Γ_ν entsprechen, ist auch gleichmässig und absolut konvergent. Sie ist ja nur eine Teilreihe der Reihe $\varphi(\zeta)$. Beim Uebergang von ν zu $\nu + 1$ werden der Reihe $\varphi_\nu(\zeta)$ jedesmal unendlich viele Terme der Reihe $\varphi(\zeta)$ hinzugefügt. Man hat daher

$$\varphi(\zeta) = \lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(\zeta).$$

[1] Siehe die Fussnote pag. 267.

Die Reihe $\varphi_\nu(\zeta)$ liefert nach § 1 eine schlichte Abbildung des durch die ν ersten Erzeugenden gekennzeichneten Kreisbereiches $K^{(\nu)}$ auf einen Schlitzbereich S_ν. Daraus folgt, das $\varphi_\nu(\zeta)$ den Bereich K, der ja ein Teilbereich von $K^{(\nu)}$ ist, ebenfalls eineindeutig auf einen schlichten Bereich S'_ν abbildet; und daraus ergibt sich weiter, das $\varphi(\zeta)$ als Grenzfunktion der Funktionenfolge $\varphi_\nu(\zeta)$ ebenfalls eine eineindeutige Abbildung des Bereichs K auf einen schlichten Bereich S leistet. Dass bei dieser Abbildung den Grenzkreisen nach Ausschluss der singulären Grenzpunkte in regulärer Weise Strecken der Achse des Reellen entsprechen müssen, geht bereits aus dem Früheren hervor. Indessen ist hiermit noch nicht dargetan, dass der Bereich S ein Schlitzbereich ist, d. i. ein Bereich, dessen *vollständige* Begrenzung auf der Achse des Reellen enthalten ist.

Um diese Frage zur Entscheidung zu bringen, nehmen wir an, der schlichte Bereich S besitze Begrenzungsteile, die in der oberen z-Halbebene liegen mögen. Es sei z'' ein solcher Grenzpunkt von S. Wir wählen nun in der Nähe von z'' einen Punkt z' im Innern von S und beschreiben um z' als Mittelpunkt einen Kreis k, der den Punkt z'' in seinem Innern enthält. Wir können die Anordnung so treffen, dass die Kreisfläche k ganz der oberen Halbebene angehört. Um z' als Mittelpunkt beschreiben wir nunmehr noch einen zweiten kleineren Kreis k' so, dass die ganze Kreisfläche k' mit Einschluss der Kreislinie k' im Innern von S enthalten ist. Der Fläche k' entspricht vermöge der durch $\varphi(\zeta)$ geleisteten Abbildung ein Bereich $\varkappa'$. Die Umkehrungsfunktion werde mit $\zeta = f(z)$ bezeichnet, entsprechend die Umkehrungsfunktion der Funktion $\varphi_\nu(\zeta)$ mit $f_\nu(z)$. Man bemerkt nun, dass die Umkehrungsfunktionen $f_\nu(z)$ nicht nur in k', sondern sogar in k erklärt sind, und zwar leistet $f_\nu(z)$ eine schlichte Abbildung der Kreisfläche k auf ein Gebiet, das ganz in dem ν-fach zusammenhängenden Kreisbereiche $K^{(\nu)}$ enthalten ist, der den Fundamentalbereich der Gruppe Γ_ν bildet. Wegen der Schlichtheit der durch die Funktionen $f_\nu(z)$ geleisteten Abbildungen und der Normierung dieser Abbildungsfunktionen im Unendlichen ergibt sich, dass die Funktionen $f_\nu(z)$ in k beschränkt sind. Da sie ausserdem in k mit wachsendem ν offenbar gegen $f(z)$ konvergieren als Umkehrungsfunktionen der konvergenten Funktionenfolge der $\varphi_\nu(\zeta)$, so ergibt sich nach einem bekannten Konvergenzsatze[1], dass die Folge der $f_\nu(z)$ auch in der ganzen Kreisfläche k gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion $f(z)$ aber ergibt dann eine Abbildung der Kreisfläche k auf ein schlichtes Gebiet $\varkappa$, das ganz der oberen ζ-Halbebene angehört. Die Umkehrungsfunktion $\varphi(\zeta)$ der Funktion $f(z)$ bildet nun aber $\varkappa$ auf ein durchaus

[1] S. § 6 der Abhandlung 5 der Serie »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung« in Math. Zeitschrift Bd 2, insbes. pag. 226.

inneres, keinen Begrenzungspunkt von S enthaltendes Teilgebiet von S ab, welches somit von der Fläche k verschieden wäre.

Damit ist ein Widerspruch hergeleitet und somit dargetan, dass die vollständige Begrenzung von S auf der Achse des Reellen enthalten ist.

§ 3.

Das umgekehrte Abbildungsproblem, insbesondere für Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang.

(Iterationsverfahren.)

7. Wir gehen nunmehr von einem beliebigen endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängenden symmetrischen Schlitzbereich S der z-Ebene aus. Sämtliche Begrenzungschlitze von S sollen auf der Achse des Reellen liegen, der unendlich ferne Punkt dem Innern von S angehören. Jeder einzelne Schlitz hat eine endliche von Null verschiedene Länge. Zwischen je zwei verschiedenen Begrenzungsschlitzen gibt es ein Intervall der Achse des Reellen, das dem Innern von S angehört. Diejenigen Begrenzungspunkte von S, die sich als Häufungspunkte von Begrenzungsschlitzen des Bereichs S darstellen, bezeichnen wir als singuläre Grenzpunkte. Diese können sich als Endpunkte von Schlitzen oder als selbständige Grenzpunkte (accessorische Grenzpunkte) darstellen. Wir fordern die Bestimmung einer Abbildungsfunktion

$$\zeta = f(z),$$

durch deren Vermittlung der *Bereich S in symmetrischer Weise auf einen (als unbekannt anzusehenden) symmetrischen Kreisbereich K* in der Weise eineindeutig konform abgebildet wird, dass dabei der unendlich ferne Punkt sich selbst entspricht, wobei $\zeta - z$ im Unendlichen verschwinden soll (*Normierungsbedingung*). Die Abbildungsfunktion soll sich auf den Begrenzungsschlitzen von S mit Ausnahme der singulären Grenzpunkte regulär verhalten, eine Bedingung, die für gewöhnliche Schlitzendpunkte, die nämlich nicht singuläre Grenzpunkte sind, dahin zu interpretieren ist, dass die Regularität der Abbildungsfunktion im gewöhnlichen Sinne nach Einführung einer lokalen Wurzeltransformation der z-Ebene bestehen soll.

Dass die hier gestellte Abbildungsaufgabe nicht mehr als eine Lösung zulassen kann (*Unitätssatz*), ergibt sich sofort, wenn man zwei Abbildungen annimmt und die so gesetzte Abbildungsbeziehung der beiden Kreisbereiche auf einander untersucht. Diese Abbildungsbeziehung erweitert sich nach dem

Spiegelungsprinzip sofort zu einer Abbildungsbeziehung der ζ-Ebene auf eine ζ'-Ebene, wobei in der ζ-Ebene und ζ'-Ebene je eine unendliche Gesamtheit diskreter Grenzpunkte auftritt, in denen diese Abbildungsbeziehung auch noch stetig wäre. Man kann jetzt den Unitätsbeweis auf die Feststellung gründen, dass die hiermit gesetzte eineindeutige Abbildungsbeziehung zwischen der oberen ζ-Halbebene und der oberen ζ'-Halbebene nur durch eine reelle lineare Transformation bewirkt werden kann, die sich wegen der Normierung im Unendlichen auf die Identität reduzieren muss. Wir können aber statt dessen den Beweis auf die Betrachtung der Differenz $\zeta' - \zeta$ als Funktion der Grösse ζ gründen. Diese Differenzfunktion verschwindet im Unendlichen. Ihr imaginärer Teil wird ausserdem längs eines die Grenzpunktmannigfaltigkeit in der ζ-Ebene einschliessenden schmalen rechtecksförmigen Streifens gleichmässig unendlich klein, wenn dieser Streifen schmäler und schmäler gewählt wird. Daraus folgt das identische Verschwinden des imaginären und folglich auch des reellen Teils derselben.

8. Nunmehr gehen wir zum *Existenzbeweis* über.

Wir denken uns zu dem Zwecke die unendlich vielen Begrenzungsschlitze des Bereichs S, deren keiner sich auf einen Punkt reduziert, irgendwie numeriert. Wir wenden sodann eine Folge von Elementartransformationen auf S an, deren einzelne die Verwandlung der von einem endlichen Schlitze begrenzten Ebene auf das Aeussere einer mit dem Schlitze konzentrischen Kreislinie bewirkt, wobei auch der Normierungsbedingung im Unendlichen genügt wird. Die Funktion

$$Z + \frac{1}{Z} = z \text{ mit der Umkehrung } z = \frac{1}{2}\left(Z + \sqrt{Z^2 - 4}\right)$$

bildet bekanntlich das Aeussere des Z-Einheitskreises auf die längs des endlichen, die Punkte -2 und $+2$ verbindenden Schlitzes aufgeschnitten zu denkende z-Ebene ab, wobei der unendlich ferne Punkt sich selbst entspricht und $Z - z$ im Unendlichen verschwindet. Geht man von einem beliebigen endlichen Schlitz s auf der Achse des Rellen der z-Ebene aus, so liefert die erwähnte Transformation, umgekehrt genommen und sinngemäss modifiziert, eine Abbildung der durch s begrenzten Ebene auf das Aeussere eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Schlitzmittelpunkt zusammenfällt und dessen Durchmesser gleich der halben Länge des Schlitzes ist. Bei dieser Abbildung werden die nicht auf s enthaltenen Punkte der Achse des Reellen näher an den erwähnten Mittelpunkt herangerückt (*Fundamentaltransformation*).

Wir wenden nun die Fundamentaltransformation zunächst auf den ersten Begrenzungsschlitz von S an. Dabei geht S in einem Bereich S'_1 über, der

abgesehen von unendlich vielen Schlitzen auch von einem Kreise begrenzt wird. Indem wir S'_1 an dem gefundenen Begrenzungskreise spiegeln, erweitern wir den Bereich S'_1 zu einem nur noch von Schlitzen begrenzten Bereich S_1. Die so neu hinzugekommenen Schlitze sind wieder zu numerieren und ausserdem mit einem Nebenindex 1 zu versehen, der andeuten soll, dass diese Schlitze erst nach der ersten Fundamentaltransformation aufgetreten sind. Jetzt wird die Fundamentaltransformation auf irgend einen Begrenzungsschlitz von S_1 angewandt, wobei S_1 in S'_2 übergeht, welcher Bereich seinerseits durch Spiegelung am gewonnenen Begrenzungskreise zu einem Schlitzbereich S_2 erweitert wird, wobei neu zu numerierende Begrenzungsschlitze auftreten, denen der Nebenindex 2 beizufügen ist.

Das geschilderte Verfahren kann i. inf. fortgesetzt werden. Dabei ist jetzt zwecks Erreichung unseres Hauptzieles nur einer Bedingung zu genügen, nämlich der folgenden: es soll im Laufe des Verfahrens jeder einmal eingeführte Schlitz auch einmal als Transformationslinie für die Fundamentaltransformation verwandt und dadurch zum Fortfall gebracht werden. Dieser Bedingung kann z. B. durch die allgemeine Vorschrift genügt werden, dass immer ein Schlitz als Transformationslinie verwandt werden soll, für den die Summe aus Nummer und Index möglichst klein ist.

Die sämtlichen Begrenzungsschlitze des Bereiches S_n bestimmen ein endliches Intervall σ_n auf der Achse des Reellen, das vom äussersten linken Begrenzungspunkte bis zum äussersten rechten Begrenzungspunkte von S_n reicht. Aus den Vorbemerkungen über die Fundamentaltransformation entnimmt man, dass die Länge des Intervalls σ_n mit zunehmendem Index n immer kleiner wird, wobei jedes folgende Intervall im vorhergehenden enthalten ist. Gleichwohl bleiben die Längen der σ_n, die wir auch mit dem Zeichen σ_n bezeichnen, oberhalb einer angebbaren von Null verschiedenen endlichen Schranke. Das ergibt sich so:

Der Bereich S wird durch die Fundamentaltransformationen sukzessive in Bereiche $S^{(1)} \equiv S'_1, S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots$ übergeführt. Das zu S gehörende Intervall σ enthält reelle Teilintervalle, die zum Innern des Bereichs S gehören. Diesen Intervallen entsprechen bestimmte Intervalle in den Bereichen $S^{(n)}$. Die zusammengesetzte Abbildungsfunktion, die den Bereich S in den Bereich $S^{(n)}$ überführt, werde mit

$$f_n(z) = \zeta_n$$

bezeichnet. Diese Abbildungsfunktion erfüllt im Unendlichen die Normierungsbedingung. Auf sie findet daher unser Verzerrungssatz für unendliche Bereiche Anwendung.[1] Diesem zufolge müssen die einzelnen reellen Teilintervalle je eine

[1] S. § 8 der pag. 272 zitierten Abhandlung.

von der Wahl des Index n unabhängig bestimmbare Mindestlänge haben. Die Längen σ_n sind aber grösser als jede der erwähnten Mindestlängen, sogar grösser als die Summe aller dieser Mindestlängen.

9. Wir hatten oben mit S_n den nach Anwendung von n Fundamentaltransformationen gewonnenen erweiterten Schlitzbereich bezeichnet. Andererseits hatten wir mit $S^{(n)}$ den nach n-maliger Anwendung des Fundamentaltransformation aus S als Bild dieses Bereiches entstandenen neuen Bereich bezeichnet. Wir wollen dementsprechend mit $S_n^{(m)}$ denjenigen Bereich bezeichnen, der aus S_n als eineindeutiges Bild dieses Bereiches nach Anwendung von m weiteren Fundamentaltransformationen entsteht. Die Begrenzung dieses Bereichs weist m oder weniger als m Linien auf, die sich nicht als Schlitze, sondern als einfach geschlossene Linien darstellen. Wir bezeichnen mit $d_n^{(m)}$ die Maximaldistanz, die zwischen den Punkten jener Linien und der Achse des Reellen besteht. Dann wollen wir nunmehr zeigen, dass die Grösse $d_n^{(m)}$ bei frei bleibendem m unendlich klein wird, wenn n über alle Grenzen wächst, d. h. es gibt eine von m unabhängige obere Schranke d_n der Grössen $d_n^{(m)}$, die bei unbegrenzt wachsendem Index n ihrerseits unendlich klein wird.

Um diesen Nachweis zu führen, benötigen wir einige Hilfsbetrachtungen.

10. Es sei B irgend ein den Nullpunkt in seinem Innern enthaltender schlichter einfach zusammenhängender Bereich innerhalb des Einheitskreises einer z-Ebene, dessen Abbildungsmöglichkeit auf das Innere des Einheitskreises einer w-Ebene als bekannt angesehen wird. Nach dem Schwarz'schen Lemma, angewandt auf die Funktion $\frac{z(w)}{w}$, schliessen wir, dass bei dieser Abbildung das Vergrösserungs-Verhältnis $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=0} > 1$ ist. Durch Verkleinerung der Bildkreisfläche unter Beibehaltung des Nullpunktes kann man zu einer wohl bestimmten Abbildungsfunktion übergehen, bei der das Vergrösserungsverhältnis an der Nullstelle den Wert 1 hat. Der Radius $R_B^{(0)}$ der so definierten Kreisfläche ist dann kleiner als 1 und völlig bestimmt. Wir nennen ihn den *invarianten Radius* des Bereichs B, wobei der Index 0 die besondere Bedeutung des Nullpunktes bei der Abbildung hervorhebt. Das Schwarz'sche Lemma lehrt sofort, dass der invariante Radius sich verkleinert, wenn man von B zu einem Teilbereiche von B übergeht. Es ist ferner aus der Definition sofort zu erkennen, dass der invariante Radius eine unveränderliche Grösse ist gegenüber allen eineindeutigen konformen Transformationen des Bereichs B, bei denen der Punkt 0 fest bleibt und das Vergrösserungsverhältnis der Transformation in 0 den Wert 1 hat.

Die Begriffbestimmung des invarianten Radius wie auch die Bemerkung über Vergrösserung bzw. Verkleinerung desselben erstreckt sich offenbar nicht nur auf Bereiche B innerhalb des Einheitskreises sondern überhaupt auf schlichte einfach zusammenhängende Bereiche B, die den Nullpunkt im Innern enthalten.

Wir kehren jetzt wieder zu der Vorstellung eines Bereiches B zurück, der ganz innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene enthalten ist. Es sei ϱ die Länge des Abstandes des dem Nullpunkte am nächsten liegenden Begrenzungspunktes von B vom Nullpunkte. Der Radius $R_B^{(0)}$ liegt dann, wie schon bemerkt, unterhalb 1, aber auch oberhalb ϱ, wie man sofort erkennt. Darüber hinaus beweisen wir jetzt den Satz.

Satz: Es besteht für alle Bereiche B mit dem Minimalabstande ϱ die Relation:

$$(*) \qquad \varrho \leqq R_B^{(0)} < \frac{\sqrt{\varrho}}{\frac{1}{2}(1+\varrho)} < 1 .$$

Zum Beweise wenden wir auf den Bereich B die erste Schmiegungsoperation unseres Schmiegungsverfahrens an, d. h. wir unterwerfen B derjenigen eineindeutigen Abbildung, die den zweiblättrigen Bereiche $|z| \leqq 1$ mit dem Windungspunkte erster Ordnung in einem im Abstande ϱ von Nullpunkte gelegenen Randpunkte von B auf die schlichte Einheitskreisfläche unter Festhaltung des Nullpunktes abbildet. Diese Abbildung setzt sich in einfacher Weise elementar zusammen. Das dabei an der Nullstelle stattfindende Vergrösserungsverhältnis ist

$$(1-\varrho^2)\,\frac{1}{2\sqrt{\varrho}}\,\frac{1}{1-\sqrt{\varrho}^{\,2}} = \frac{1+\varrho}{2\sqrt{\varrho}} .$$

Hieraus ergibt sich durch Verkleinerung des Bildbereiches im Verhältnis $\frac{2\sqrt{\varrho}}{1+\varrho}$ eine Abbildung des Bereiches B auf einen Bereich B', der ganz im Kreise K' mit dem Radius $\frac{2\sqrt{\varrho}}{1+\varrho}$ enthalten ist. Für diese Abbildung besteht an der Nullstelle das Vergrösserungsverhältnis 1. Weil B' in der erwähnten Kreisfläche K' enthalten ist, findet sich nunmehr, dass der invariante Radius $R_B^{(0)}$, der gleich $R_{B'}^{(0)}$ ist, kleiner als der Radius des Kreises K' ist, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

Wir merken noch diejenige Fassung dieses Satzes an, die sich ergibt, wenn man anstelle des Einheitskreises eine beliebige Kreisfläche mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius r treten lässt, innerhalb deren der Bereich B enthalten sein soll, während ϱ die alte Bedeutung behalten möge. Man findet dann

$$(**) \qquad \varrho \leqq R_B^{(0)} < \frac{\sqrt{\varrho\, r}}{\frac{1}{2}(\varrho + r)}\; r .$$

Hierin liegt insbesondere, wenn mit ϱ' die Maximaldistanz der Begrenzung des Bereichs B vom Nullpunkte bezeichnet wird,

$$(**) \qquad \varrho < R_B^{(0)} < \frac{\sqrt{\varrho\,\varrho'}}{\frac{1}{2}(\varrho + \varrho')}\,\varrho'.$$

Nunmehr gehen wir zur Betrachtung von *Aussenbereichen* in der z-Ebene über, d. h. von Bereichen A, die vom ganzen Aeusseren einer im Endlichen liegenden Linie gebildet werden und für die die Möglichkeit der Ausführung ihrer Fundamentalabbildung bekannt ist. Damit ist auch die Möglichkeit der Abbildung eines solchen Bereiches auf das Aeussere eines gewissen endlichen Kreises gegeben, bei der im Unendlichen die Normierungsbedingung, dass $w - z$ im Unendlichen verschwinden soll, erfüllt wird. Diese Abbildung ist offenbar völlig bestimmt. Es wird auf diese Weise jedem solchen Aussenbereiche A ein *invarianter Mittelpunkt,* nämlich der Mittelpunkt des gewonnenen Kreises und ein *invarianter Radius* R_A (*halbe Oeffnungsweite*), nämlich der Radius des gewonnenen Kreises zugeordnet.

Wir haben für das Folgende unsere Aufmerksamkeit vor allem auf die Oeffnungsweite zu richten. Diese kann auch erklärt werden als Radius desjenigen Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, auf dessen Aeusseres der gegebene Bereich A in der Weise abgebildet werden kann, dass dabei das Unendliche sich selbst entspricht und das Vergrösserungsverhältnis im Unendlichen den Grenzwert 1 besitzt. Die Oeffnungsweite des Aussenbereiches A ist offenbar gegenüber kongruenten Verschiebungen des Bereiches A invariant; bei ähnlichen Abbildungen von A wird die Oeffnungsweite nach Maassgabe des Vergrösserungsverhältnisses jener ähnlichen Abbildung geändert. Man bemerkt ferner sogleich, dass die Oeffnungsweite eines Aussenbereichs A vergrössert wird, wenn man von diesem Bereiche zu einem Teilbereiche desselben übergeht, d. h. zu einem Bereiche, dessen Begrenzungslinie die Begrenzungslinie von A umschliesst. Schliesslich bemerken wir noch, dass die Oeffnungsweite auch als halbe Länge desjenigen Schlitzes erklärt werden kann, den man erhält, wenn man eine Abbildung des Bereiches A auf einen von einem einfachen Schlitze begrenzten Bereich unter Beobachtung der Normierungsbedingung im Unendlichen vornimmt.

Nach diesen Vorbemerkungen mögen nunmehr insbesondere solche Bereiche A betrachtet werden, deren Begrenzungslinien den Einheitskreis der z-Ebene umschliessen. Es möge mit ϱ_A die Länge des Maximalabstandes der Bereichsbegrenzung vom Nullpunkte bezeichnet werden. Dann ergibt sich aus der Formel (*) mittels einer Inversion am Einheitskreise

$$1 < \frac{\frac{1}{2}(1+\varrho_A)}{\sqrt{\varrho_A}} < R_A < \varrho_A\,.$$

Aus dieser Formel entnehmen wir den weiterhin wichtigen Satz

Satz: Es sei A ein veränderlich vorgestellter Aussenbereich ausserhalb des Einheitskreises, dessen Begrenzungslinie l den Einheitskreis umschliesst. Der Oeffnungsradius R_A nähere sich unbegrenzt dem Werte 1. Dann muss sich auch die Distanzgrösse ϱ_A dem Werte 1 unbegrenzt nähern, wobei die Annäherung eine gleichmässige ist insofern, als der Annäherungsgrad wesentlich nur durch den Kleinheitsgrad der Grösse $(R_A - 1)$ bestimmt wird, nämlich von der besonderen Begrenzungsform des Bereichs A durchaus unabhängig ist.

Dieser Satz überträgt sich sofort auf einen veränderlichen Bereich A', dessen Begrenzung das Intervall $(-2, \ldots, +2)$ umschliesst, in dem Sinne, dass hier der Annäherung der Invariante $R_{A'}$ an den Wert 1 die gleichmässige Annäherung der Begrenzung von A' an das genannte Intervall entspricht.

11. Die in voriger Nummer entwickelten Resultate wenden wir jetzt auf unsere Bereiche $S_n^{(m)}$ an oder, richtiger gesagt, auf diejenigen einfach zusammenhängenden Aussenbereiche $[S_n^{(m)}]$, die sich aus den Bereichen $S_n^{(m)}$ ergeben, wenn man alle dem Innern dieser Bereiche angehörenden reellen Intervalle zur Begrenzung hinzunimmt; die invariante Oeffnungsweite des einzelnen Bereichs $[S_n^{(m)}]$ ist gleich derjenigen des Bereichs $[S_n]$, d. h. gleich $\frac{\sigma_n}{2}$. Nun bilden die Grössen σ_n eine abnehmende Grössenfolge, die aber, wie wir sahen, oberhalb einer endlichen von Null verschiedenen Schranke bleibt. Der Bereich $[S_n^{(m)}]$ ist ein Teilbereich des Bereichs $[S_{n+m}]$ mit der Oeffnungsweite $\frac{\sigma_{n+m}}{2}$. Da nun der Unterschied $\sigma_{n+m} - \sigma_n$ mit wachsendem n bei freibleibendem m unendlich klein wird, ergibt sich jetzt, dass die Begrenzung des Bereichs $[S_n^{(m)}]$ von dem Intervall σ_{n+m} einen Maximalabstand hat, der mit unbegrenzt wachsendem n bei freibleibendem m unendlich klein wird.

Damit ist die oben (in 9) aufgestellte Behauptung bewiesen.

Es ist somit klar, dass die Grösse

$$\mathfrak{I}(\zeta_{n+m} - \zeta_n) = \frac{1}{i}\,\mathfrak{R}(\zeta_{n+m} - \zeta_n)$$

längs σ_n, mithin im ganzen von der σ_n begrenzten Aussenbereiche σ_n mit unbegrenzt wachsendem n bei freibleibendem m gleichmässig unendlich klein wird.

Fixieren wir jetzt einen Bereich S_ν, so sind die Grössen ζ_n für $n > \nu$ in diesem Bereiche sämtlich erklärt. Die Differenz $\Im(\zeta_{n+m} - \zeta_n)$ ist, sofern man sie als Funktion von ζ_n betrachtet, nicht nur in $S_\nu^{(n-\nu)}$, sondern in dem weiteren Bereiche S_n erklärt. Aus dem Vorstehenden folgt daher das gleichmässige Unendlichkleinwerden der betrachteten Differenzgrösse in S_ν, mithin die gleichmässige Konvergenz der Funktionen $\Im(\zeta_n(\zeta_\nu))$ im ganzen Bereiche S_ν mit Einschluss des Randes. Daraus schliessen wir weiter, dass die Funktion $\zeta_n(\zeta_\nu)$ selber in jedem inneren Teilbereiche von S_ν gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion

$$\zeta(\zeta_\nu) = \lim_{n \to \infty} \zeta_n(\zeta_\nu)$$

leistet eine Abbildung des Bereiches S_ν auf einen Schlitzbereich Z_ν. Die Begrenzung des Bereichs Z_ν hat von der Achse des Reellen einen Maximalabstand δ_ν, von dem jetzt noch zu zeigen ist, dass

$$(*) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \delta_\nu = 0$$

ist. Dies folgt aber daraus, dass die Grösse ζ_n ein Bild des Bereichs S_ν auf einen Bereich $S_\nu^{(n-\nu)}$ entwirft, dessen Begrenzung von der Achse des Reellen einen Abstand hat, der allein abhängig von ν bei freibleibendem $(n-\nu)$ abgeschätzt werden kann. Diese uns bekannten Abschätzungen liefern die Schranke d_ν, die in der Tat mit wachsendem Index ν unendlich klein wird. Da die Funktion $\Im(\zeta_n(\zeta_\nu))$ im ganzen Bereich S_ν mit Einschluss der Begrenzung gleichmässig gegen die Grenzfunktion $\Im(\zeta(\zeta_\nu))$ konvergiert, so bedeutet dies, dass jene Schranke auch für die Grenzfunktion selbst, die nun längs der erwähnten Begrenzung stetig sein muss, besteht. Schöpft man also den Bereich S_ν mit Näherungsbereichen aus, so wird $\Im(\zeta(\zeta_\nu))$ längs der Begrenzung der Näherungsbereiche Werte annehmen, die gleichmässig unter jede die erwähnte Schranke übersteigend angenommene Grösse herabsinken.

Hiermit ist die aufgestellte Formel (*) vollkommen bewiesen.

Das Ergebnis ist eine Abbildung des Bereiches S auf einen symmetrischen Bereich Z_0, dessen obere und untere Hälfte unbegrenzte allseitige Spiegelungsfähigkeit besitzt so, dass in der oberen und unteren Halbebene bei Ausübung dieses analytischen Spiegelungsprozesses eine vollständige singularitätenfreie Bedeckung der betreffenden Halbebene eintritt. Hieraus schliessen wir nun, dass die den Begrenzungsschlitzen des Bereichs S bei Z_0 entsprechenden Linien der oberen und unteren Halbebene die Eigenschaft besitzen, eine Zerlegung der betreffenden Halbebene in zwei in Bezug auf diese Linien im analytischen Sinne spiegelbildlich symmetrische Hälften zu zerlegen. Dann müssen diese Linien Halbkreise sein, die auf der Achse des Reellen senkrecht stehen. D. h. der Bereich Z_0 ist ein symmetrischer Kreisbereich K.

§ 4.
Bemerkungen betreffend die Ränderzuordnung der auf einander abgebildeten Bereiche.

12. Wir haben die in Vorstehendem behandelten Abbildungsaufgaben bisher dadurch in gewisser Weise begrifflich beschränkt, dass wir von vornherein nur solche Abbildungen verlangten, die auch eine analytische Ränderzuordnung vermitteln, wobei allerdings bei Bereichen unendlich hohen Zusammenhanges die singulären Grenzpunkte eine gewisse Ausnahmestellung einnahmen. Man kann nun die Fragestellung dadurch erweitern, dass man die Abbildungsbeziehung unter Aufrechterhaltung ihrer Symmetrie inbezug auf die Achse des Reellen nur für die inneren Bereichpunkte fordert. Wir wollen jetzt noch zeigen, dass jede Abbildungsfunktion, die dem so erweiterten Problem entspricht, auch das speziellere Problem löst, indem nämlich die analytische Ränderzuordnung immer von selbst eintritt. Auch die soeben noch beibehaltene Forderung der Symmetrie der Abbildung kann fallen gelassen werden, da auch diese sich als eine Folge der übrigen Bedingungen, d. s. insbesondere die Symmetrie der Bereiche K und S und die der Symmetrie angepasste Normierungsbedingung im Unendlichen, herausstellt.

Es werde zunächst die im weiteren Sinne zu verstehende Abbildung zweier symmetrischen Schlitzbereiche S_1 und S_2 auf einander betrachtet. Die Abbildungsfunktion $z_2(z_1)$ genüge im Unendlichen der Normierungsbedingung $z_2 = z_1 + ((0))$. Dann wird der Imaginärteil der Grösse $z_2 - z_1$ eine Funktion von z_1, die im Unendlichen und bei Annäherung an den Rand von S_1 verschwindet, daher im ganzen Bereiche S_1 verschwindet; womit denn auch $z_2 - z_1$ selbst identisch verschwinden muss. Die Abbildungsfunktion $z_2(z_1)$ vermittelt daher die identische Abbildung. Damit ist aber auch der analytische Charakter der Abbildung am Rande evident, desgleichen die Symmetrie der Abbildung.

Hat man nun eine Abbildungsbeziehung im weiteren Sinne zwischen einem symmetrischen Schlitzbereiche und einem symmetrischen Kreisbereiche oder zwischen zwei symmetrischen Kreisbereichen, so kann man zwecks Untersuchung der Abbildungsbeziehung am Rande die Kreisbereiche zunächst in symmetrischer Weise auf symmetrische Schlitzbereiche abbilden, nämlich durch unsere oben betrachtete Reihenfunktion, die zugleich eine analytische Ränderzuordnung vermittelt. Hierdurch wird man wieder auf die Betrachtung der Abbildungsbeziehung von Schlitzbereichen geführt und erkennt durch Rückübertragung das Bestehen analytischer Ränderzuordnung für die ursprünglich betrachtete Abbildungsbeziehung sowie die Symmetrie dieser Abbildung.

Vorstehende Bemerkungen gelten in gleicher Weise für Bereiche endlichen wie unendlich hohen Zusammenhangs.

§ 5.

Abbildung des allgemeinsten beliebig begrenzten symmetrischen Bereichs. (Schmiegungsverfahren.)

13. Es sei nunmehr B ein völlig beliebiger endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter symmetrischer Bereich der z-Ebene, der den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthalte. Der Bereich werde als nur von inneren Punkten gebildet vorgestellt. Er kann als Grenze endlich-vielfach zusammenhängender Näherungsbereiche $B^{(\nu)}$ erklärt werden, die ihn nach und nach ausschöpfen. Wir stellen uns die Aufgabe, eine Abbildungsfunktion $F(z)$ zu bestimmen, die den Bereich konform auf einen symmetrischen *Schlitzbereich* S_* abbildet, wobei der unendlich ferne Punkt in der Weise sich selbst entsprechen soll, dass die Funktion $F(z)$ im Unendlichen die Verhaltungsformel

$$F(z) = z + ((0))$$

erfüllt. Bei dieser Aufgabestellung wird es nötig, den Begriff des symmetrischen Schlitzbereiches S_* von vornherein so weit als möglich aufzufassen. Wir verstehen jetzt darunter jeden endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereich, dessen vollständige Begrenzung auf der Achse des Reellen enthalten ist. Das einzelne Begrenzungskontinuum eines solchen Bereichs stellt sich entweder als endliche Strecke (*gewöhnlicher Schlitz*) oder als einzelner Punkt (*punktförmiger Schlitz*) dar.

Der *Unitätsbeweis* für die zu lösende Abbildungsaufgabe ist nach früherem Muster sofort zu führen, indem man die Differenz zweier angenommenen Abbildungsfunktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ untersucht und von deren imaginärem Teil zeigt, dass er identisch verschwinden muss.

Zum *Existenzbeweis* verlangen wir die effektive Bildung einer Funktion $F(z)$ mittels einer unendlichen Folge *reeller Fundamentaltransformationen.*

Wir bestimmen diejenigen spiegelbildlich symmetrisch zur Achse des Reellen liegenden Begrenzungspunkte des Bereichs B_1 die von der Achse des Reellen den grössten Abstand haben, und benutzen sie als Verzweigungspunkte der Fundamental-transformation. Der Ausdruck dieser Fundamentaltransformation lautet, wenn $\pm 2i$ die Verzweigungspunkte sind,

$$Z - \frac{1}{Z} = z, \text{ d. i. } z = \frac{1}{2}\left(Z + \sqrt{Z^2 + 4}\right) \cdot$$

Durch Anwendung der zuvor erklärten Fundamentaltransformation gehe z in z_1, der Bereich B in einen Bereich B_1 über. Mit dem Bereiche B_1 wird nunmehr in derselben Weise verfahren, wie mit dem Bereiche B. Der Bereich B_1 geht dann in einen Bereich B_2 der z_2-Ebene über und so fort. Es wird behauptet, dass sich auf solche Weise bei unbegrenzter Wiederholung des Verfahrens (*Schmiegungsverfahren*)[1] in der Grenze die gesuchte Abbildungsfunktion in der Gestalt

$$F(z) = \lim_{n=\infty} z_n(z)$$

ergibt.

Der Beweis stützt sich zunächst auf die Bemerkung, dass die Grössen z_n auf Grund ihrer Normierung im Unendlichen infolge eines wiederholt zur Anwendung gelangten *Schränkungssatzes* in jedem endlichen Teilbereiche des Bereichs B *beschränkt* bleiben. Daraus ergibt sich, dass die Begrenzung aller Bereiche B_n in einem endlichen von n unabhängig bestimmbaren Bezirke bleiben. Man kann daher insbesondere eine von n unabhängige positiv reelle Grösse Δ bestimmen, unterhalb der die absoluten Beträge der reellen Koordinaten der Begrenzungspunkte aller Bereiche B_n bleiben.

Bei der Ausübung jeder Fundamental-transformation werden zweitens die Bereichpunkte jedesmal der *Achse des Reellen angenähert*, wie der Ausdruck $Z - \frac{1}{Z}$ mit Bezug auf die Achse des Reellen sofort erkennen lässt. Für den Grad der Annäherung, welche die Begrenzungspunkte des Bereichs B_n erfahren, lässt sich elementar eine Abschätzung ausrechnen, die nur von der Entfernung der Verzweigungspunkte der Fundamentaltransformation von der Achse des Reellen und von der Grösse Δ abhängt. Hieraus ergibt sich aber, dass die Maximalabweichung der Begrenzung des Bereichs B_n von der Achse des Reellen bei unbegrenzt zunehmendem n unter jede Grenze herabsinkt und daraus weiter die gleichmässige Konvergenz zunächst des imaginären Teils der Funktion $z_n(z)$ im ganzen Bereich B gegen eine Grenzfunktion, die, wenn $z = x + iy$ gesetzt wird, im Unendlichen wie $y + ((0))$ unendlich wird und bei Annäherung an die Grenze von B auf dem Wege der Ausschöpfung dieses Bereiches vermöge endlich-vielfach zusammenhängender Näherungsbereiche gleichmässig unendlich klein wird. Hieraus folgt schliesslich die gleichmässige Konvergenz der Funktionen $z_n(z)$ selbst in jedem solchen Näherungsbereiche, wenn man sich diesen mittels endlich vieler Kreisscheiben unter Einbeziehung einer unendlich grossen Aussenkreisscheibe

[1] Diese Benennung des Verfahrens rechtfertigt sich erst später, wenn gezeigt wird dass die wesentliche Leistung des Verfahrens eine fortgesetzt zunehmende Anschmiegung der Bereichgrenze an die Achse des Reellen ist.

überdeckt denkt und beachtet, dass in jeder dieser Kreisflächen die unendlich klein werdende Schwankung des imaginären Teils der Differenz

$$z_{n+m}(z) - z_n(z)$$

die unendlich klein werdende Schwankung des reellen Teiles dieser Differenzgrösse für eine konzentrische, etwas kleiner zu wählende Kreisfläche zur Folge hat.[1]

14. Es sei der Bereich B insbesondere ein *Kreisbereich* K_*, den wir dabei jetzt im allgemeinsten Sinne verstehen wollen, nämlich als einen Bereich, dessen sämtliche Begrenzungskontinuen Kreise sind, deren jeder einzelne sich auch auf einen Punkt (punktförmiger Begrenzungskreis) reduzieren darf. Wenden wir auf K_* das Schmiegungsverfahren der vorigen Nummer an, so bemerken wir sogleich, dass hierbei ein Schlitzbereich S_* entsprechend allgemeinster Art gewonnen wird. Es werden nämlich notwendig den gewöhnlichen Begrenzungskreisen gewöhnliche und den punktförmigen Kreisen punktförmige Schlitze entsprechen. Denn andernfalls würde entweder die Abbildungsfunktion oder deren Umkehrungsfunktion eine Funktion sein, die längs eines Kreisbogens bezw. längs eines endlichen Schlitzes sich auf einen konstanten Wert reduziert, die daher überhaupt eine Konstante sein müsste.

Wir bemerken weiter, dass die gewöhnlichen Begrenzungskreise (oberer und unterer Halbbogen) notwendig *regulär abgebildet* werden; denn man kann der Anwendung des Schmiegungsverfahrens zunächst eine elementare Abbildung vorausgehen lassen, durch die ein beliebig gewählter solcher Begrenzungskreis regulär auf einen Schlitz abgebildet wird, und auf den so gewonnenen Bereich erst das Schmiegungsverfahren anwenden, wobei dann offenbar der in der Voroperation gewonnene Schlitz eine reguläre Abbildung erfährt. In den punktförmigen Begrenzungskreisen besteht, da ihnen punktförmige Schlitze entsprechen, eo ipso Stetigkeit. Darüber hinaus besteht sogar Regularität der Abbildungsfunktion, sofern es sich um solche punktförmigen Begrenzungsschlitze handelt, die nicht Häufungspunkte gewöhnlicher Begrenzungskreise sind. Denn man kann einen solchen punktförmigen Begrenzungskreis als inneren Punkt (nicht Endpunkt)

[1] S. »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I«. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 145 pag. 190, ferner den Artikel des Verfassers »über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie« in Math. Zeitschrift Bd. 6, pag. 61.

Ohne den in Rede stehenden Hilfssatz anzuwenden, kann man das gleichmässige Unendlichkleinwerden der betrachteten Differenzgrösse $z_{n+m} - z_n$ auch nach dem Muster der in Abhandlung V der genannten Serie in § 3 gegebenen Entwicklung beweisen; s. Math. Zeitschrift Bd. 2 pag. 210 ff.

eines kleinen Intervalls der Achse des Reellen auffassen, das keinen gewöhnlichen Begrenzungskreis trifft, und nunmehr einen neuen Bereich dadurch bilden, dass man alle auf diesem Intervall enthaltenen punktförmigen Begrenzungskreise löscht. Das Schmiegungsverfahren, auf diesen neuen Bereich angewandt, nimmt offenbar rechnungsmässig denselben Verlauf wie auf den ursprünglichen Bereich angewandt. Die neue Fassung zeigt jedoch, dass das erwähnte Intervall eine reguläre Abbildung erfährt.

15. Es werde nunmehr die Aufgabe gestellt, einen *Bereich B allgemeinster Art in symmetrischer Weise auf einen Kreisbereich K_** allgemeinster Art abzubilden unter Berücksichtigung nur der inneren Punkte, wobei im Unendlichen wieder unsere stets angewandte Normierungsbedingung erfüllt werden soll.

Hier gilt es zunächst den *Unitätsbeweis* zu liefern. Dies erfordert den Nachweis, dass zwei Kreisbereiche allgemeinster Art nur durch die identische Transformation im genannten Sinne auf einander abgebildet werden können. Um dies zu erkennen genügt es, den Nachweis der Regularität einer so zunächst nur für die inneren Punkte der Bereiche definierten Abbildung auf den gewöhnlichen Begrenzungskreisen festzustellen, weil dann sofort der Unitätsbeweis der Nummer 7 in Kraft treten kann.

Man bemerkt zunächst sofort, dass bei der genannten Abbildung zweier Kreisbereiche K_* auf einander gewöhnlichen Begrenzungskreisen nur gewöhnliche Begrenzungskreise und punktförmigen Begrenzungskreisen nur punktförmige Begrenzungskreise entsprechen können. Darüber hinaus erkennt mann die Regularität der Abbildung, indem man jeden der beiden Kreisbereiche auf einen symmetrischen Schlitzbereich abbildet. Diese Hilfsabbildungen sind, wie wir sahen, auf den gewöhnlichen Begrenzungskreisen regulär. Die gewonnenen beiden Schlitzbereiche aber können in der Tat nur durch die identische Transformation auf einander bezogen werden, wie das wiederholt von uns angewandte Verfahren der Differenzbildung lehrt, wenn man den imaginären Teil der Differenzfunktion untersucht.

Was nun die *Existenz* einer Funktion anbetrifft, die den Bereich B auf einen Kreisbereich K_* leistet, so ist jetzt der Weg zur Bestimmung einer solchen Funktion vorgezeichnet. Man wird zunächst B auf einen Schlitzbereich S_* abbilden, wobei sich teils gewöhnliche, teils punktförmige Schlitze ergeben. Darauf wird man den Bereich S_* mit Hilfe unseres Iterationsverfahrens der Nummern 8—11 behandeln in der Weise, dass nur die gewöhnlichen Begrenzungsschlitze des Bereiches S_* zur Bildung der Transformation herangezogen werden. Der Bereich S_* wird demnach so behandelt, als ob es sich um die Abbildung des Be-

reiches S handelt, der durch die gewöhnlichen Begrenzungsschlitze des Bereiches S_* als Begrenzungslinien erklärt werden kann. Man bemerkt, dass bei dieser Abbildung die gewöhnlichen Begrenzungsschlitze von S_* in gewöhnliche Begrenzungskreise des gewonnenen Bereiches K_* übergehen, hingegen die punktförmigen Begrenzungsschlitze von S_* in punktförmige Begrenzungskreise von K_*.

16. Es drängt sich noch die Frage auf, *welche Begrenzungskontinuen* des ganz allgemein vorgestellten Bereichs B *in gewöhnliche Begrenzungsschlitze* des Bereichs S_* und infolgedessen in gewöhnliche Begrenzungskreise des Bereichs K_* übergehen. Die Mannigfaltigkeit der verschiedenen Begrenzungskontinuen des Bereichs B wird im umfassendsten Falle nicht abzählbar sein. Hingegen muss die Mannigfaltigkeit der im Sinne der Fragestellung ausgezeichneten Begrenzungskontinuen notwendig abzählbar sein, weil die Menge der gewöhnlichen Begrenzungsschlitze von S_* offenbar abzählbar ist. Die Antwort auf diese Frage wird durch die allgemeine Theorie der Ränderzuordnung für Abbildung beliebiger einfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf die Fläche des Einheitskreises gegeben.[1] Nach dem allgemeinen Ergebnis dieser Theorie folgt bei Anwendung auf die hier vorliegende Abbildung der oberen Hälfte B' des Bereiches B, die einen einfach zusammenhängenden Bereich darstellt, auf die als Halbebene sich darstellende obere Hälfte des Schlitzbereiches S_* unmittelbar folgendes Resultat:

Die ausgezeichneten Begrenzungskontinuen von B sind diejenigen, die *mindestens zwei und dann selbstverständlich unendlich viele aus dem Innern des Bereiches B' her erreichbare Punkte* aufweisen. Man kann leicht Beispiele von Bereichen B mit unendlich vielen nicht punktförmigen Grenzkontinuen bilden, deren sämtliche Grenzkontinuen bei der Abbildung auf einen Schlitzbereich S_* bezw. einen Kreisbereich K_* in punktförmige Begrenzungsschlitze bezw. punktförmige Begrenzungskreise übergehen.

Was die Frage nach dem *regulären analytischen Charakter* der Ränderzuordnung anbetrifft, so gibt auch hierfür die l. c. gegebene Theorie der Ränderzuordnung einfach zusammenhängender Bereiche sofort die Antwort: Jedes freie regulär analytische Begrenzungsstück wird regulär durch die Abbildungsfunktion auf ein ihm entsprechendes Begrenzungsstück von S_* bezw. K_* abgebildet.

[1] S. »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I »Journ. f. Math. Bd. 145, §§ 8—11. S. auch Angaben in einem Artikel von mir, der in der *Hilbert-Festschrift* (Berlin, 1922, Verlag Julius Springer) erscheinen soll.

Literatur.

Das Problem der konformen Abbildung beliebiger endlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche hat seine erschöpfende Erledigung gefunden, worüber man besonders folgende Veröffentlichungen von mir nachsehe: Jahresbericht der D. M. V. 1908 (Seite 50 der Mitteilungen u. Nachrichten, Sitzung der Göttinger Math. Gesellschaft vom 25. 2. 08 Gött. Nachr. 1908 (22 Febr. und 11 Juli), 1909 (20 Febr.), 1910 (26 Febr. u. 28 Mai); Jahresber. der D. M. V. 1906, 1907, 1910; Journ. f. Math. Bd. 138 (1910), § 15; Math. Ann. Bd. 69 (1910) pag. 60; Math. Zeitschrift Bd. 7 (1920).

Einen Weg zur Lösung der Abbildungsaufgabe für symmetrische Bereiche unendlich hohen Zusammenhanges habe ich schon in Gött. Nachr. 1908 am Schlusse einer Note vom 11 Juli bezeichnet und später in einer Dissertation von Herrn A. Fischer (Jena, 1915) ausführen lassen. Gewisse unsymmetrische Fälle unendlich hohen Zusammenhanges habe ich durch Herrn K Georgi in einer Dissertation (Jena, 1915) behandeln lassen.

ÜBER DIE AUTOMORPHEN FUNKTIONEN ZWEIER VERÄNDERLICHEN.

Von

P. J. MYRBERG

in Helsingfors.

Herrn Professor G. Mittag-Leffler zu seinem 75-jährigen Geburtstage, als Zeugnis meiner aufrichtigen Verehrung für seine Persönlichkeit und sein Lebenswerk, ebenso wie meiner tiefgefühlten Dankbarkeit für die Gelegenheit zu Studien als Stipendiat des Institutes Mittag-Leffler.

P. J. Myrberg.

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in zwei Teile. Der erste von ihnen, dessen Inhalt von geometrisch-gruppentheoretischer Natur ist, hat den Zweck, die Theorie der Singularitäten der automorphen Funktionen von mehreren Veränderlichen von einem neuen Standpunkt aus zu entwickeln. Es handelt sich hier vor allem um eine zweckmässige Verallgemeinerung des Diskontinuitätsbegriffs, welche erlaubt, der Existenz der wesentlichen Singularitäten bei automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen eine natürliche Erklärung zu geben.

Der zweite Teil ist den Reihenentwicklungen automorpher Funktionen gewidmet. Insbesondere wird eine neue Gattung unendlicher Reihen gegeben, welche wie die Poincaréschen Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension direkt zur Darstellung automorpher Differentiale führen.

Die folgende Untersuchung beschäftigt sich mit einer speziellen Klasse automorpher Funktionen zweier Veränderlichen. Die wichtigsten Resultate werden aber in einer Form gegeben, in der ihre Gültigkeit in viel allgemeineren Fällen und für beliebig viele Veränderliche zur Evidenz gebracht wird.

I. Definition hyperbolischer Bewegungen.

1. Den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden die allgemeinsten diskontinuierlichen Gruppen reeller projektiven Substitutionen

$$X = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}, \quad Y = \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}, \tag{1}$$

deren entsprechende lineare homogene Substitutionen

$$u_i' = \alpha_i u_1 + \beta_i u_2 + \gamma_i u_3 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

eine vorgelegte indefinite quadratische Form

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \sum_{p,q=1}^{3} a_{p,q} u_p u_q \tag{3}$$

mit reellen Koeffizienten invariant lassen. Geometrisch stellt jede derartige Substitution eine »hyperbolische Bewegung» oder eine »Spiegelung» dar, wobei

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0 \tag{4}$$

die Gleichung des in der Cayleyschen Massbestimmung gebrauchten absoluten Kegelschnittes in homogenen Koordinaten ist.

2. Die allgemeinste hyperbolisch kongruente Abbildung (Bewegung oder Spiegelung) enthält drei willkürliche Parameter. Um diese Parameter in den Koeffizienten von (1) explizite hervortreten zu lassen, legen wir den folgenden Untersuchungen die spezielle quadratische Form

$$\varphi_0(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 \tag{4$'$}$$

zu Grunde, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, weil bekanntlich jede reelle indefinite ternäre quadratische Form vermittels einer reellen ternären Substitution in die Form φ_0 bzw. $-\varphi_0$ transformiert werden kann. Dies bedeutet geometrisch, dass wir den allgemeinen reellen Kegelschnitt (4) durch den mit ihm kollinearen Einheitskreis ersetzen. Zwischen den neun Koeffizienten von (1) herrschen in diesem Falle die Relationen

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 &= 1, & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 &= 0, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 &= 1, & \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 - \alpha_3\gamma_3 &= 0, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \gamma_3^2 &= -1, & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Wir wollen jetzt in wohlbekannter Weise die »hyperbolische Ebene», d. h. das Innere des »absoluten Kreises» $x^2 + y^2 = 1$ (einschl. des Randes) in Zusammenhang mit der komplexen t-Ebene bringen, wo jeder hyperbolischen Bewegung und Spiegelung eine durch eine reelle lineare Substitution

$$t' = \frac{at + b}{ct + d} \tag{6}$$

vermittelte Kreisverwandtschaft entspricht.

Zu diesem Zweck projizieren wir zunächst die t-Ebene stereographisch auf die Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \qquad (\xi + i\eta = t)$$

vom Pole $\xi = \eta = 0, \zeta = 1$ aus, und nachher diese Kugel orthogonal auf die $\xi\zeta$-Ebene. Wenn die x-und die y-Achse zu der ξ- und der ζ-Achse parallel und der Mittelpunkt der Kugel zum Nullpunkt der xy-Ebene gewählt werden, erhält man in dieser Weise die Relationen

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \qquad & y &= \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \\ \xi &= \frac{x}{1 - y} \qquad , & \eta &= \pm \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1 - y}. \end{aligned} \tag{7}$$

Wir zerlegen jetzt die lineare Funktion (6) in ihren reellen und imaginären Bestandteil und erhalten dadurch die quadratische Cremonasubstitution

$$\xi' = \frac{ac(\xi^2 + \eta^2) + (ad + bc)\xi + bd}{c^2(\xi^2 + \eta^2) + 2cd\,\xi + d^2}, \qquad \eta' = \frac{(ad - bc)\eta}{c^2(\xi^2 + \eta^2) + 2cd\,\xi + d^2}. \tag{8}$$

Vermittels der Relationen (7) erhält man alsdann für die Transformation der Variabeln x, y den Ausdruck

$$\begin{aligned} X &= \frac{(ad + bc)x + (ac - bd)y + (ac + bd)}{(ab + cd)x + \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)y + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}, \\ Y &= \frac{(ab - cd)x + \frac{1}{2}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)y + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{(ab + cd)x + \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)y + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}, \end{aligned} \tag{9}$$

wo die Determinante der neun Koeffizienten gleich der dritten Potenz der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ist. Diese Koeffizienten bilden die allgemeinste Lösung der Gleichungen (5) unter der Voraussetzung

$$D = \pm 1,$$

d. h. die Formeln (9) stellen die allgemeinste im Cayleyschen Sinne kongruente Abbildung der hyperbolischen Ebene auf sich selbst dar.

Nach dem Vorzeichen der Determinante D hat man zwischen zwei wesentlich verschiedenen Fällen zu unterscheiden. Dem Fall $D = 1$ entspricht nämlich eine Kreisverwandtschaft, bei welcher jede der beiden t-Halbebenen in sich überführt wird, und eine Kollineation (1), die geometrisch eine hyperbolische Bewegung darstellt. Dem Fall $D = -1$ entspricht eine Kreisverwandtschaft, bei welcher die beiden t-Halbebenen miteinander vertauscht werden, und eine Kollineation, die geometrisch eine hyperbolisch kongruente Abbildung mit Umlegung der Winkel, also eine Spiegelung, repräsentiert.

4. Durch die Formeln (7) ist eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der hyperbolischen Ebene und den aus zwei konjugiert komplexen t-Werten gebildeten Punktpaaren festgestellt, wobei die reellen Punkte des absoluten Kreises und die doppelt zu zählenden Punkte der reellen t-Achse einander entsprechen.

Indem wir jetzt die Variabeln x und y beliebige reelle oder komplexe Werte annehmen lassen, ordnen wir jedem Wertpaar (x, y) die durch (7) bestimmten Grössen

$$\sigma = \xi + i\eta, \qquad \tau = \xi - i\eta \tag{10}$$

zu, welche wir durch Punkte der t-Ebene repräsentieren. Hierdurch wird eine umkehrbar eindeutige Beziehung festgestellt zwischen den Punkten des durch die reellen und imaginären Bestandteile von x und y definierten vierdimensionalen Raumes R_4 und den Punktpaaren σ, τ der t-Ebene. Die Grössen σ, τ wollen wir die »t-Koordinaten» des betreffenden Punktes von R_4 nennen und diesen Punkt selbst mit $P(\sigma, \tau)$ oder kurz (σ, τ) bezeichnen.

Aus dem Obigen geht hervor, dass die Punkte $P(\sigma, \tau)$ und $P(\tau, \sigma)$ identisch sind.

Für die Punkte der hyperbolischen Ebene stimmt die obige Zuordnung mit der in der vorigen Nummer angegebenen überein, da in diesem Falle σ und τ konjugiert komplexe Grössen sind. Ferner entspricht jedem ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Punkte P der reellen xy-Ebene ein Punktpaar σ, τ der

reellen t-Achse, nämlich die Bilder der beiden Schnittpunkte der Polaren von P mit dem absoluten Kreis. Schliesslich sei noch bemerkt, dass komplexen Punkten des absoluten Kreises komplexe Doppelpunkte der t-Ebene zugeordnet werden.

Es sei nun

$$(11) \qquad Ax + By + C = 0$$

die Gleichung irgend einer reellen oder komplexen Geraden. Die Abhängigkeit zwischen den t-Koordinaten ihrer Punkte wird durch die bilineare Gleichung

$$(12) \qquad (C+B)\,\sigma\tau + A\,(\sigma+\tau) + (C-B) = 0$$

dargestellt, welche eine involutorische Projektivität zwischen σ und τ definiert.

Die Koeffizienten von (11) seien insbesondere reell. Jenachdem diese Gerade den absoluten Kreis schneidet oder nicht, hat man auf der reellen t-Achse eine hyperbolische oder elliptische Involution, deren Fixpunkte die Repräsentanten des Poles der genannten Geraden sind. Insbesondere entsprechen im ersten Falle der innerhalb des absoluten Kreises gelegenen Sehne die Paare konjugierter Punkte auf dem durch die Fixpunkte der hyperbolischen Involution gehenden Orthogonalkreise der reellen Achse.

Es sei schliesslich (11) eine Tangente des absoluten Kreises, welche diesen Kreis in einem beliebigen reellen oder komplexen Punkt $(\varkappa, \varkappa)$ berührt. Die Involution (12) nimmt dann die ausgeartete Form

$$\sigma = \varkappa \text{ bzw. } \tau = \varkappa$$

an. Hieraus kann zur späteren Anwendung der Schluss gezogen werden, dass der Punkt (σ, τ) den Schnittpunkt der durch die Punkte (σ, σ) und (τ, τ) des absoluten Kreises gezogenen Tangenten bildet.

II. Die invarianten Mannigfaltigkeiten hyperbolischer Bewegungen.

5. Wir haben die Kollineationen (9) als Bewegungen bzw. Spiegelungen der hyperbolischen Ebene gedeutet. Es ist unsere nächste Aufgabe, die fundamentalen Eigenschaften dieser Transformationen in dem ganzen vierdimensionalen Raum R_4 zu untersuchen. Bei dieser Untersuchung handelt es sich vor allem um die Bestimmung der Gesamtheit der invarianten Gebilde, d. h. der Punktmannigfaltigkeiten, welche jeder Kollineation (9) gegenüber invariant bleiben.

Weil diese Fragen an und für sich ein geometrisches Interesse besitzen, wollen wir bei ihnen ausführlicher verweilen, als es für die funktionentheoretischen Zwecke notwendig wäre.

Die Gesamtheit der reellen Kollineationen (9) bildet eine ∞^3- fach ausgedehnte kontinuierliche Gruppe, in welcher die Gruppe der Kollineationen mit positiver Determinante, der eigentlichen hyperbolischen Bewegungen, als eine ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei enthalten ist.

Es sei nun $P(x, y)$ irgend ein Punkt des Raumes R_4. Diejenigen Punkte dieses Raumes, zu welchen man vom Punkte P aus vermittels aller möglichen hyperbolischen Bewegungen gelangen kann, bilden ein algebraisches Kontinuum, welches wegen der Anzahl der in (9) enthaltenen unbestimmten Parameter im Allgemeinen dreidimensional ist. Es ist ersichtlich, dass diese Mannigfaltigkeiten uns die einfachsten invarianten Gebilde liefern, aus denen sich alle anderen zusammensetzen lassen.

Zur näheren Untersuchung dieser invarianten Mannigfaltigkeiten betrachten wir das Doppelverhältnis

$$J(\sigma, \tau) = \frac{\sigma - \sigma}{\sigma - \bar{\tau}} : \frac{\tau - \sigma}{\tau - \bar{\tau}} \quad \left(= \frac{\sigma - \sigma}{\sigma - \bar{\tau}} \cdot \frac{\tau - \tau}{\tau - \bar{\sigma}} \right), \tag{13}$$

wo $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ die konjugierten Zahlen von σ und τ bedeuten. Dieser Ausdruck hat für jedes Wertpaar σ, τ einen ganz bestimmten Wert, von demjenigen Fall abgesehen, wo σ und τ reell und einander gleich sind.

Wenn die Punkte σ und τ auf derselben Seite der reellen Achse liegen, ist offenbar $0 < J(\sigma, \tau) \leq 1$. Speziell ist $J(\sigma, \tau) = 1$ für $\sigma = \tau$. Wenn dagegen die Punkte σ, τ in verschiedenen Halbebenen liegen, ist $J(\sigma, \tau) < 0$. Speziell ist hier $J(\sigma, \tau) = -\infty$, wenn σ und τ konjugiert komplexe Zahlen sind. Sobald irgend einer der Punkte σ, τ zur reellen Achse gelangt, wird $J(\sigma, \tau) = 0$ (vorausgesetzt, dass jene Punkte dabei nicht zusammenfallen).

Wir wählen jetzt irgend einen Punkt (x, y), der dem reellen absoluten Kreis nicht angehört. Es seien σ, τ seine t-Koordinaten und J der entsprechende Wert von (13). Jeder auf x und y ausgeübten reellen Kollineation (9) entspricht eine reelle lineare Substitution (6) der Variabeln σ und τ. Jede solche Substitution lässt aber das Doppelverhältnis $J(\sigma, \tau)$ invariant. Es besteht daher die Gleichung

$$J(\sigma, \tau) = J \tag{14}$$

für sämtliche Punkte derjenigen Mannigfaltigkeit M, welche erhalten wird, wenn der gegebene Punkt (x, y) allen reellen Kollineationen (9) unterworfen wird.

6. Wir nehmen zuerst

$$J \neq 0, 1, -\infty$$

an. Nach dem Obigen sind dann die Zahlen σ, τ, welche der Gleichung (14) genügen, voneinander verschiedene nicht konjugierte Zahlen und daher $\bar{\sigma} \neq \tau$, $\bar{\tau} \neq \sigma$.

Wenn σ_1, τ_1 und σ_2, τ_2 zwei beliebige Lösungen von (14) sind, gibt es in diesem Falle stets eine reelle lineare Substitution (6), welche gleichzeitig σ_1, τ_1 auf σ_2, τ_2 und $\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}_1$ auf $\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}_2$ abbildet. Dies wird in der Tat durch die Substitution

$$(15) \qquad \frac{t' - \sigma_2}{t' - \tau_2} = K \frac{t - \sigma_1}{t - \tau_1}$$

geleistet, wenn K der Bedingung

$$(15)' \qquad K = \frac{\bar{\sigma}_2 - \sigma_2}{\bar{\sigma}_2 - \tau_2} : \frac{\bar{\sigma}_1 - \sigma_1}{\bar{\sigma}_1 - \tau_1} \quad \left(= \frac{\bar{\tau}_2 - \sigma_2}{\bar{\tau}_2 - \tau_2} : \frac{\bar{\tau}_1 - \sigma_1}{\bar{\tau}_1 - \tau_1} \right)$$

gemäss gewählt wird.

Im vorliegenden Falle gehören daher sämtliche Punkte von R_4, deren t-Koordinaten die Gleichung (14) befriedigen, der oben definierten Mannigfaltigkeit M an, welche wir von jetzt ab mit H_J bezeichnen wollen. Diese Mannigfaltigkeit hat als einzige Grenzpunkte die reellen Punkte des absoluten Kreises. Um dies einzusehen, braucht man nur auf irgend ein der Gleichung (14) genügendes Wertpaar σ, τ die lineare Substitution

$$t' = t_0 + \varrho (t - t_0)$$

auszuüben, wo t_0 einen beliebigen reellen Wert hat und ϱ ein reeller Parameter ist. Wenn der Wert von ϱ von Eins bis Null kontinuierlich abnimmt, wobei die Gleichung (14) fortwährend ihre Gültigkeit behält, nähern sich die Grössen σ und τ beide kontinuierlich dem Wert t_0, und der zugeordnete Punkt (x, y) von H_J konvergiert mithin gegen den Punkt (t_0, t_0) des absoluten Kreises. Jeder reelle Punkt dieses Kreises ist somit ein Grenzpunkt der Mannigfaltigkeit H_J und andere Grenzpunkte kann es nach dem Obengesagten nicht geben.

Die invariante Mannigfaltigkeit H_J besitzt wesentlich verschiedene Charaktere, jenachdem $J < 0$ oder $J > 0$ ist.

Im ersten Falle repräsentieren die t-Koordinaten σ und τ irgend eines inneren Punktes von H_J Punkte der t-Ebene, welche auf verschiedenen Seiten der reellen Achse liegen. Weil nun (σ, τ) und (τ, σ) einen und denselben Punkt von R_4 darstellen und weil anderseits $J(\sigma, \tau) \equiv J(\tau, \sigma)$ ist, so können die Koordinaten σ_1, τ_1 und σ_2, τ_2 zweier beliebigen inneren Punkte von H_J im vorliegenden Falle so gewählt werden, dass σ_1 und σ_2 auf einer und derselben Seite der reellen t-Achse liegen, und ebenfalls τ_1 und τ_2. Es ist dann möglich, eine kontinuierliche

Folge von infinitesimalen Substitutionen (6) zu definieren, welche σ_1 in σ_2 und τ_1 in τ_2 überführen, ohne dass die reelle Achse überschritten wird. M. a. W. können die entsprechenden Punkte von H_J miteinander vermittels einer auf H_J gelegenen kontinuierlichen Kurve vereinigt werden, deren sämtliche Punkte innere Punkte von H_J sind. Die Mannigfaltigkeit H_J besteht also im vorliegenden Falle $J < 0$ aus einem einzigen dreidimensionalen Kontinuum, dessen Grenzpunkte aus der Gesamtheit der reellen Punkte des absoluten Kreises bestehen.

Wenn $J > 0$ ist, sind die Punkte σ und τ auf derselben Seite der reellen Achse gelegen. Bei beliebiger Verschiebung des Punktes (x, y) im Innern von H_J können die Punkte σ und τ nach dem Obigen die reelle Achse nicht überschreiten. Hieraus geht aber hervor, dass die Mannigfaltigkeit H_J im Falle $J > 0$ aus zwei verschiedenen dreidimensionalen Kontinua besteht, die nur längs der Peripherie des reellen absoluten Kreises miteinander zusammenhängen. Das eine Kontinuum entspricht den Punktpaaren der oberen Halbebene, das andere denjenigen der unteren Halbebene. Diese Halbebenen gehen vermittels jeder reellen Substitution (6) negativer Determinante ineinander über und mithin werden die betreffenden zwei Kontinua vermittels jeder Kollineation (9) negativer Determinante ineinander überführt. Einer Spiegelung der Halbebenen an der reellen Achse entspricht im Speziellen der Uebergang vom Punkte (x, y) zum konjugierten Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$. Die beiden Kontinua sind also miteinander spiegelbildlich kongruent.

7. Es erübrigt noch die oben ausgeschlossenen Spezialfälle zu untersuchen.

Im Falle $J = -\infty$ sind σ und τ in der zugeordneten Gleichung (14) konjugiert komplexe Grössen, und die entsprechenden Punkte (x, y) sind also reelle Punkte im Inneren des absoluten Kreises. Die Mannigfaltigkeit $H_{-\infty}$ ist daher identisch mit der reellen hyperbolischen Ebene, die als Grenzpunkte die reellen Punkte des absoluten Kreises hat.

Im Falle $J = 1$ ergibt sich aus (13) dass σ und τ komplex und einander gleich sind. Die entsprechenden Punkte (x, y) sind die komplexen Punkte des absoluten Kreises. Die invariante Mannigfaltigkeit H_1 besteht also aus der Gesamtheit der komplexen Punkte des absoluten Kreises, die ein zweidimensionales Kontinuum bilden, welches von den reellen Punkten des absoluten Kreises begrenzt ist.

Es sei schliesslich $J = 0$. Dann ist entweder eine der zugeordneten Grössen σ, τ reell oder es sind beide reell. Diese Eigenschaften bleiben bei Ausführung irgendeiner Substitution (6) mit reellen Koeffizienten unverändert. Es sei nur eine der t-Koordinaten reell. Die im allgemeinen Falle für $J > 0$ erhaltenen Re-

sultate gelten hier unverändert, indem einer der Ausdrücke (15)' für K stets einen bestimmten Wert gibt. Man hat also im Falle $J=0$ zwei dreidimensionale invariante Mannigfaltigkeiten, welche erhalten werden, wenn die eine t-Koordinate alle reellen Werte, die andere aber alle der einen oder anderen Halbebenen zugehörigen komplexen Werte durchläuft. Diese Mannigfaltigkeiten hängen in den durch die reellen σ und τ repräsentierten Punkten (σ, τ) mit einander zusammen, welche eine invariante zweidimensionale Mannigfaltigkeit bilden, nämlich das Äussere des reellen absoluten Kreises. Beide Teile von H_0 sind übrigens spiegelbildlich miteinander kongruent.

8. Durch die obigen Betrachtungen sind alle invarianten Mannigfaltigkeiten bestimmt worden. Unter diesen Mannigfaltigkeiten gibt es eine eindimensionale, nämlich die Mannigfaltigkeit der reellen Punkte des absoluten Kreises, und drei zweidimensionale, nämlich das Innere und das Äussere des absoluten Kreises und die Mannigfaltigkeit der komplexen Punkte dieses Kreises.

Die übrigen Mannigfaltigkeiten sind alle dreidimensional und können durch die aus (14) folgende Gleichung

$$(16) \qquad (1-x\bar{x}-y\bar{y})^2=\lambda(1-x^2-y^2)(1-\bar{x}^2-\bar{y}^2)$$

dargestellt werden[1], wo

$$\lambda=\left(\frac{1+J}{1-J}\right)^2.$$

Unter den dreidimensionalen Gebilden (16) ist wohl am meisten bekannt die Hypersphäre

$$(16)' \qquad x\bar{x}+y\bar{y}-1=0,$$

die für $J=-1$ erhalten wird. In der Theorie der automorphen Funktionen hat jedoch der Fall $J=0$ die wichtigste Bedeutung, d. h. die Gleichung[1]

$$(17) \qquad (1-x\bar{x}-y\bar{y})^2=(1-x^2-y^2)(1-\bar{x}^2-\bar{y}^2),$$

die auch in der Form

$$(x_1 y_2-x_2 y_1)^2=x_2^2+y_2^2$$

[1] Für $J>0$ stellt (16) die Mannigfaltigkeit H_J dar, für $J\leq 0$ die Gesamtheit der Mannigfaltigkeiten H_J und $H_{\frac{1}{J}}$. Also stellt insbesondere die Gleichung (17) die Gesamtheit der Gebilde H_0 und $H_{-\infty}$ dar.

darstellbar ist, wenn $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$ gesetzt wird. Es wird nämlich aus den späteren Untersuchungen hervorgehen, dass das Gebilde H_0 für die automorphen Funktionen der in vorliegender Arbeit untersuchten Gruppen als natürliche Grenze dieselbe Rolle spielt, wie der Grenzkreis für die lakunären automorphen Funktionen einer Variabeln.

Zur Gleichung (17) ist PICARD[1] in einer kürzlich erschienen Arbeit über eine spezielle Gruppe reeller hyperbolischer Bewegungen gelangt, ohne jedoch die prinzipielle Wichtigkeit des Gebildes H_0 zu betonen.

9. Aus der Gleichung (14) geht hervor, dass durch irgend einen Punkt des Raumes R_4 eine und im allgemeinen nur eine invariante Mannigfaltigkeit H_J geht. Eine Ausnahme machen nur die reellen Punkte des absoluten Kreises, die zu jedem invarianten Gebilde gehören.

Wir sagen der Kürze wegen, der Punkt (σ, τ) liege auf dem Gebilde H_J, bzw. innerhalb oder ausserhalb desselben, jenachdem das zugeordnete Doppelverhältnis (13) gleich, kleiner oder grösser als J ist. Wenn also J alle reellen Werte von $+1$ bis zu $-\infty$ durchläuft, erhält man die ∞^1-fache Schar ineinander geschalteter invarianter Gebilde, unter welchen die hyperbolische Ebene $H_{-\infty}$ das innerste und der absolute Kreis, als Träger sowohl der reellen als komplexen Punkte, das äusserste ist.

Wir untersuchen jetzt die Teilung des Ganzen Raumes R_4 durch das spezielle invariante Gebilde H_0 näher.

Das Innere von H_0 besteht nach dem Obigen aus der Gesamtheit der Punkte (σ, τ), deren σ und τ Punkte verschiedener t-Halbebenen darstellen. Diese Punkte bilden einen einfachzusammenhängenden Bereich A, welcher u. a. die hyperbolische Ebene und die Hypersphäre $(16)'$ als Teile enthält.

Das Äussere von H_0 besteht dagegen aus zwei verschiedenen, mit einander spiegelbildlich kongruenten Gebieten B und C, nämlich aus den zwei Punktmannigfaltigkeiten, deren σ und τ entweder beide der oberen oder beide der unteren t-Halbebene angehören. Diese Gebiete werden durch einen zweidimensionalen Teil von H_0, nämlich durch den ausserhalb des absoluten Kreises gelegenen Teil der reellen xy-Ebene von einander getrennt.

10. Die Eigenart des Gebildes H_0 lässt sich noch in folgender Weise charakterisieren, was für die späteren Anwendungen wichtig ist:

[1] *Sur certains groupes discontinus correspondant aux formes quadratiques ternaires;* (Annales scientifiques de l'école normale supérieure. III série, tome 33; 1916).

Vgl. auch G. GIRAUD, *Leçons sur les fonctions automorphes*, S. 122.

Es sei

$$x_0 x + y_0 y - 1 = 0 \tag{18}$$

die Gleichung irgend einer reellen Geraden. Man hat dann auch die Gleichung

$$x_0 \bar{x} + y_0 \bar{y} - 1 = 0. \tag{18$'$}$$

Aus (18) und (18)$'$ erhält man durch leichte Umformung

$$(1 - x\bar{x} - y\bar{y})^2 - (1 - x^2 - y^2)(1 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2) = (x_0^2 + y_0^2 - 1)(x\bar{y} - \bar{x}y)^2.$$

Nun sei (x, y) ein beliebiges, dieser Gleichung genügendes Wertpaar, H_J die durch den entsprechenden Punkt des Raumes R_4 gehende invariante Mannigfaltigkeit und (16) die Gleichung dieser Mannigfaltigkeit. Nach der obigen Gleichung ist dann sign. $(\lambda - 1) =$ sign. $(x_0^2 + y_0^2 - 1)$, und nach der S. 297 gegebenen Relation zwischen λ und J ist somit sign. $J =$ sign. $(x_0^2 + y_0^2 - 1)$. Hieraus geht aber hervor, dass der Punkt (x, y) dem Innern, dem Äussern von H_0 oder dem Gebilde H_0 selbst angehört, jenachdem die Gerade (18) den absoluten Kreis schneidet, nicht trifft oder berührt.

Hiernach kann das invariante Gebilde H_0 als die Einhüllende der Tangenten des reellen absoluten Kreises angesehen werden, wobei diese Tangenten als Träger ihrer sowohl reellen als komplexen Punkte, somit als zweidimensionale Mannigfaltigkeiten zu betrachten sind.

11. Die Existenz der oben gefundenen invarianten Mannigfaltigkeiten H_J lässt sich invariantentheoretisch in folgender Weise begründen.

Bekanntlich besitzt die allgemeine ternäre quadratische Form (3), ausser der Determinante der Koeffizienten, welche eine »Invariante« ist, noch einen zweiten invarianten Ausdruck, nämlich die »Kontravariante»

$$F = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

wo die kontragredienten Variabeln

$$v_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \end{vmatrix}, \quad v_2 = \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ \bar{u}_3 & \bar{u}_1 \end{vmatrix}, \quad v_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{vmatrix}$$

der zur Substitution der kongredienten Variabeln u und u reziproken Substitution zu unterwerfen sind. Wir wählen die Variabeln u und u konjugiert imaginär und legen bei der Bildung der Kontravariante F die spezielle Form (4)$'$ zu Grunde. Für F ergibt sich dann der Ausdruck

$$F_0 = \begin{vmatrix} u_2 \, u_3 \\ \bar{u}_2 \, \bar{u}_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 \, u_1 \\ \bar{u}_3 \, \bar{u}_1 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} u_1 \, u_2 \\ \bar{u}_1 \, \bar{u}_2 \end{vmatrix}^2.$$

Die Gleichung

(20) $$F_0 = \lambda \varphi_0 \bar{\varphi}_0,$$

wo $\bar{\varphi}_0$ die konjugierte Grösse von φ_0 bedeutet, stellt aber, wie leicht einzusehen ist, die Gleichung (16) der invarianten Mannigfaltigkeiten H_J in homogenen Punktkoordinaten dar.

III. Diskontinuierliche Gruppen hyperbolischer Bewegungen.

12. Bevor wir zur funktionentheoretischen Seite unserer Betrachtungen übergehen, haben wir gewisse Aufgaben im Gebiet der geometrischen Gruppentheorie zu lösen. Es handelt sich vor allem um die Definition und Untersuchung der allgemeinsten im Raume R_4 »eigentlich diskontinuierlichen» Gruppen reeller hyperbolische Bewegungen, d. h. Gruppen mit endlich ausgedehntem, vierdimensionalem Fundamentalbereich, indem nur diese Gruppen automorphe Funktionen besitzen können.

Zu diesem Zweck hat man die Häufungsmengen $M'(P)$ derjenigen Punktmengen $M(P)$ zu studieren, die aus den vermittels der Substitutionen der betrachteten Gruppe erhaltenen Transformierten irgend eines gegebenen Punktes P bestehen. Die Punkte der Mengen $M'(P)$, welche wir »Grenzpunkte» der Gruppe nennen wollen, können in zwei Klassen geteilt werden.

Es zeigt sich nämlich, dass die Häufungsmenge $M'(P)$ von der Wahl des Ausgangspunktes P unabhängig ist, sobald dieser Punkt ausserhalb gewisser spezieller Punktgebilde von höchstens dritter Dimension gewählt wird. Die Punkte dieser koiinzidierenden Mengen $M'(P)$ werden wir »Hauptgrenzpunkte» der Gruppe nennen und ihre Gesamtheit mit (M) bezeichnen. Wenn aber der Punkt P jenen speziellen Punktgebilden angehört, kann es eintreffen, dass $M'(P)$ Punkte enthält, die in (M) nicht vorkommen. Diese Punkte wollen wir »spezielle Grenzpunkte» der Gruppe nennen.

13. Wir wollen zunächst den einfachsten Fall, die zyklischen Gruppen, für sich betrachten.

Es sei

(21) $$\frac{t' - t_1}{t' - t_2} = K \frac{t - t_1}{t - t_2}$$

irgend eine reelle lineare Substitution mit den Fixpunkten t_1 und t_2. Die zugeordnete Kollineation (9) hat dann im ganzen drei invariante Punkte (σ, τ), nämlich die Punkte

$$(t_1, t_1),\ (t_2, t_2),\ (t_1, t_2).$$

Die beiden ersten sind Punkte des absoluten Kreises; sie sind reell oder konjugiert komplex, jenachdem die Substitution (21) hyperbolisch oder elliptisch ist. Der dritte Fixpunkt ist stets reell und liegt im ersten Falle ausserhalb, im zweiten innerhalb des reellen absoluten Kreises.

Bei einer parabolischen Substitution gibt es ein einziges invariantes Punktpaar, nämlich (t_0, t_0), wo t_0 den Fixpunkt der parabolischen Substitution bezeichnet, und demgemäss hat die zugeordnete Kollineation nur einen, auf dem reellen absoluten Kreis gelegenen Fixpunkt.

Jede von einer einzigen elliptischen Substitution erzeugte Gruppe ist entweder endlich oder kontinuierlich. Wir nehmen daher die Substitution (21) als hyperbolisch an und bezeichnen sie kurz $\Sigma(t)$. Es sei die reelle positive Zahl $K < 1$. Die Punkte $\Sigma^n(t)$ und $\Sigma^{-n}(t)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ haben dann, unter der Voraussetzung $t \neq t_2$ *bzw.* $t \neq t_1$, die Fixpunkte t_1 *bzw.* t_2 zu Häufungsstellen.

Wenn also der Punkt $P(\sigma, \tau)$ von R_4 keiner der beiden durch (t_1, t_1) und (t_2, t_2) gehenden Tangenten des absoluten reellen Kreises angehört, reduziert sich die Häufungsmenge $M'(P)$ immer auf die zwei Punkte (t_1, t_1) und (t_2, t_2), wenn dagegen P auf einer dieser Tangenten liegt und von den ebengenannten zwei Punkten verschieden ist, tritt in $M'(P)$ der neue Punkt (t_1, t_2) auf.

Die Punkte (t_1, t_1) und (t_2, t_2) sind daher die Hauptgrenzpunkte, der Punkt (t_1, t_2) der einzige spezielle Grenzpunkt der zyklischen Gruppe.

Im Falle einer parabolischen Substitution ist der auf dem absoluten Kreis liegende Fixpunkt der einzige Hauptgrenzpunkt, während keine speziellen Grenzpunkte existieren.

14. Es sei jetzt Γ eine beliebige Gruppe hyperbolischer Bewegungen und g die Gruppe der zugeordneten reellen linearen Substitutionen (6). Diese beiden miteinander holoedrisch isomorphen Gruppen sind offenbar gleichzeitig diskontinuierlich.

Bekanntlich ist die Nichtexistenz infinitesimaler Substitutionen für die eigentliche Diskontinuität der Gruppe g in der komplexen Ebene hinreichend. Eine Folge davon ist, dass die diskontinuierlichen Gruppen reeller hyperbolischer Bewegungen im Raume R_4 eigentlich diskontinuierlich sind. Wir werden einen Beweis für unsere Behauptung erbringen, indem wir für diese Gruppen einen Fundamentalbereich konstruieren, d. h. einen vierdimensionalen Bereich, der zu jedem Punkt

des Raumes R_4 (*bzw.* eines Teiles desselben) einen und nur einen mit demselben äquivalenten Punkt aufweist.

Wir wollen aber zunächst eine Klassifikation unserer Gruppen Γ einführen.

Bekanntlich besteht die Menge (m) der Grenzpunkte jeder diskontinuierlichen Gruppe g reeller linearen Substitutionen entweder aus der Gesamtheit der Punkte der reellen Achse oder aus einem auf dieser Achse gelegenen System diskreter Puukte. Die ersten Gruppen, unter dessen die Modulgruppe die bekannteste ist, wollen wir *Gruppen erster Klasse,* die anderen *Gruppen zweiter Klasse* nennen. Diese Benennungen übertragen wir auf die zugeordneten Kollineationsgruppen Γ.

Es sei g zunächst eine Gruppe erster Klasse. R_0 sei ein etwa in der oberen t-Halbebene gewählter Fundamentalbereich von g und $\bar{R}_0$ das Spiegelbild von R_0 bezüglich der reellen Achse. Ausser in den möglicherweise vorhandenen »parabolischen Ecken» gibt es zwischen den beiden Bereichen R_0 und $\bar{R}_0$ keinen Zusammenhang.[1]

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit derjenigen Punkte (σ, τ) des Raumes R_4, deren σ dem Bereich R_0 angehört, während τ ein beliebiger Punkt der unteren Halbebene ist. Diese Punkte (σ, τ) bilden einen einfachzusammenhängenden, innerhalb H_0 gelegenen vierdimensionalen Bereich A_0, welcher ein Fundamentalbereich der Gruppe Γ ist, wenn man sich auf den innerhalb des Gebildes H_0 gelegenen Teil A von R_4 beschränkt. (vergl. S. 298).

Es sei nämlich (σ, τ) irgendein innerer Punkt von A. Der Punkt $t = \sigma$ liegt dann in einem Bildbereich von R_0, der durch eine gewisse Substitution Σ erhalten wird. Durch die Kollineation (9), welche der inversen Substitution Σ^{-1} entspricht, wird offenbar der Punkt (σ, τ) in einen Punkt von A_0 überführt.

Anderseits gibt es im Bereiche A_0 keine zwei hinsichtlich Γ äquivalente Punkte. Denn im entgegengesetzten Falle wären die zugeordneten Punkte σ, welche beide im Fundamentalbereich R_0 liegen, bezüglich g miteinander äquivalent.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass die Gruppe Γ in den Räumen B und C ausserhalb H_0 die Fundamentalbereiche B_0 *bzw.* C_0 besitzt, welche aus der Gesamtheit der Punkte (σ, τ) bestehen, deren σ-Koordinaten Punkte von R_0 *bzw.* $\bar{R}_0$ repräsentieren, während τ auf die obere *bzw.* untere Halbebene beschränkt ist.

Es sei alsdann Γ eine Gruppe zweiter Klasse. Die Bereiche R_0 und $\bar{R}_0$ hängen dann längs endlicher Strecken der reellen Achse miteinander zusammen. Die Bereiche A_0, B_0 und C_0 bilden also einen einzigen Bereich, welcher zum Fundamentalbereich der Gruppe Γ gewählt werden kann.

[1] R_0 und $\bar{R}_0$ können offenbar ihre Rolle vertauschen.

15. Es sei jetzt $P(\sigma, \tau)$ ein beliebiger Punkt von R_4 derart, dass von den entsprechenden Punkten σ und τ der t-Ebene keiner der Menge (m) angehört, und es sei m' ein beliebig gegebener Punkt dieser Menge. Es gibt dann immer eine unendliche Folge von Substitutionen der Gruppe G, die, auf den Punkt σ ausgeführt, eine gegen m' konvergierende Punktfolge geben. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses (13) konvergieren die Transformierten des Punktes τ vermittels dieser Substitutionen gegen denselben Grenzpunkt m'.

Hieraus geht hervor, dass die Menge (M) der Hauptgrenzpunkte der betrachteten Gruppe Γ mit der auf dem reellen absoluten Kreise liegenden Punktmenge (m, m) zusammenfällt, wo m die Punkte der Menge (m) durchläuft.

Wenn Γ eine Gruppe erster Klasse ist, umfasst demnach die Menge (M) sämtliche reellen Punkte des genannten Kreises, wogegen sie aus diskreten Punkten dieses Kreises besteht, wenn Γ der zweiten Klasse angehört.

Zur Bestimmung der speziellen Grenzpunkte schicken wir den folgenden Hilfssatz voraus.

Hilfssatz. *Es gibt stets Substitutionen der Gruppe g, deren Fixpunkte von zwei beliebig gegebenen Punkten der Menge (m) beliebig wenig abweichen.*

Zum Beweis wählen wir in vorgeschriebenen beliebig kleinen Umgebungen der gegebenen Punkte, etwa in der oberen Halbebene, irgend zwei Kreisbogenpolygone, welche Bilder des Fundamentalbereichs sind. Es sei K der obere Randkreis des einen Polygons, K' der entsprechende Randkreis des zweiten, Σ diejenige Substitution von g, die K in K' überführt. Wir nehmen an, dass K' nicht der obere Randkreis des zweiten Polygons ist.[1] Dann ist Σ offenbar eine hyperbolische Substitution, die den einen Kreis auf den anderen in der Weise abbildet, dass die Inneren und Äusseren einander wechselseitig entsprechen und deren Fixpunkte *bzw.* innerhalb der Kreise K und K' liegen. Weil nun die Radien der Randkreise der Polygone bei unbegrenzter Annäherung an die reelle Achse unterhalb jeder endlichen Grenze herabsinken, ist die Richtigkeit des ausgesprochenen Hilfssatzes bewiesen.

Jetzt sei P irgend ein Punkt, von dem wenigstens die eine t-Koordinate einen Punkt der Menge (m) repräsentiert. Die zugeordnete Häufungsmenge $M'(P)$ besteht dann offenbar aus Punkten, deren t-Koordinaten beide Punkte der Menge (m) darstellen und welche sich daher unter den Polen derjenigen Geraden befinden, welche die Hauptgrenzpunkte paarweise verbinden. Anderseits ist jeder dieser Pole wegen des obigen Hilfssatzes entweder ein ausserhalb des absoluten Kreises liegender Fixpunkt einer hyperbolischen Substitution oder eine

[1] Wäre dies nicht der Fall, so brauchte man nur das zweite Polygon durch ein nächst unten folgendes zu ersetzen.

Häufungsstelle solcher Fixpunkte. Weil nach N:o 13 jeder dieser Fixpunkte ein spezieller Grenzpunkt für die betreffende zyklische Untergruppe ist, so ist dargetan, dass die Gesamtheit der speziellen Grenzpunkte und ihrer Häufungspunkte mit der Gesamtheit derjenigen ausserhalb des absoluten Kreises gelegenen Punkte zusammenfällt, wo die durch die Hauptgrenzpunkte gezogenen Tangenten einander paarweise schneiden.

Bei den Gruppen erster Klasse besteht demnach die Menge der speziellen Grenzpunkte und ihrer Häufungspunkte aus der Gesamtheit des Äussern $x^2+y^2>1$ des absoluten Kreises, bei den Gruppen zweiter Klasse aus einer in jenem Bereiche gelegenen Menge diskreter Punkte.

Durch das Obige ist die Diskontinuität der Gruppen Γ für alle Punkte des Raumes R_4, von den im Bereiche $x^2+y^2\geq 1$ liegenden Grenzpunkten abgesehen, bewiesen.

IV. Häufung beliebiger Punktmannigfaltigkeiten.

16. Die grundlegende Bedeutung der Grenzpunkte bei den automorphen Funktionen einer komplexen Veränderlichen besteht darin, dass jene Punkte gerade die wesentlichen Singularitäten der Gesamtheit der automorphen Funktionen erschöpfen, und dass sich ausserhalb jener Punkte diese Funktionen wie rationale Funktionen verhalten.

In der Theorie der automorphen Funktionen von zwei und mehreren Variabeln hat man mit Erscheinungen von wesentlich neuer Art zu tun. Der Grund dazu liegt in dem Umstande, dass die Singularitäten der Funktionen mehrerer Veränderlichen keine isolierten Punkte, sondern kontinuierliche Gebilde sind, woraus folgt, dess es für die Untersuchung der Singularitäten im Falle mehrerer Veränderlichen nicht hinreicht, die Häufung einzelner Punkte zu untersuchen. Man hat vielmehr hier ein ganz neues Problem zu lösen, nämlich die Bestimmung der Häufungsgebilde von räumlich ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. Von dem neuen Standpunkt aus wird man eine volle Analogie zwischen den automorphen Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen hinsichtlich der Eigenart der wesentlichen Singularitäten gewinnen.

Wir werden die folgenden Untersuchungen in allgemeinerer Form durchführen, als es für die funktiontheoretischen Zwecke erforderlich wäre.

17. Es sei (μ) eine ganz beliebige im Raume R_4 gelegene abgeschlossene Punktmenge. Wir betrachten die Gesamtheit der Punktmengen $S(\mu)$, die aus der gegebenen Menge vermittels der verschiedenen Substitutionen S der Gruppe Γ er-

halten werden. Es sei $\Gamma(\mu)$ die Gesamtheit der Häufungspunkte der Mengen $S(\mu)$. Jeder Punkt von $\Gamma(\mu)$ hat also die Eigenschaft, dass in einer beliebig kleinen Umgebung desselben Punkte von unendlich vielen Mengen $S(\mu)$ vorhanden sind.

Hinsichtlich der Menge $\Gamma(\mu)$ werden wir folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Satz. *Die Punkte der Menge $\Gamma(\mu)$ liegen sämtlich auf den durch die Hauptgrenzpunkte gehenden, als zweidimensional betrachteten Tangenten des absoluten Kreises, vorausgesetzt, dass die gegebene Menge (μ) keinen Hauptgrenzpunkt dieser Gruppe enthält.*

Es sei U ein beliebiger Bereich des Raumes R_4, welcher von den genannten Tangenten überall endlichen Abstand hat. Unser Satz lässt sich offenbar auch so aussprechen, dass es unter den Bildbereichen von U nur endlich viele gibt, die Punkte der gegebenen Menge (μ) enthalten.

Es seien D_1 und D_2 die von den Punkten σ bezw. τ beschriebenen Bereiche der t-Ebene, wenn $P(\sigma, \tau)$ den Bereich U beschreibt. Wegen der gemachten Voraussetzung haben die Bereiche D_1 und D_2 von den Grenzpunkten (m) der Gruppe g einen endlichen, von Null verschiedenen kürzesten Abstand.

Wenn es nun unendlich viele Bildbereiche von U gäbe, die Punkte von (μ) enthalten, könnten wir unter den entsprechenden Substitutionen von g eine unendliche Folge auswählen derart, dass die vermittels dieser Substitutionen erhaltenen Bildpunkte eines beliebig gewählten, ausserhalb der Menge (m) gelegenen Punktes P der *t-Ebene* gegen einen bestimmten Punkt m' dieser Menge konvergieren würden. Die entsprechenden Bildbereiche von D_1 und D_2 würden dann (vgl. S. 303) m' als einzigen Grenzpunkt besitzen, und, da die Menge (μ) abgeschlossen ist, würde sie demnach den Punkt (m', m') des reellen absoluten Kreises enthalten, was unserer Voraussetzung widerspricht.

18. Der obige Satz wird in zweckmässiger Weise durch den folgenden Satz ergänzt, wodurch funktionentheoretisch wichtige Schlüsse ermöglicht werden.

Satz. *Wenn die Menge (μ) keinen Hauptgrenzpunkt von Γ enthält, und wenn dazu die Gesamtheit der Punkte der t-Ebene, die von den t-Koordinaten σ und τ der einzelnen Punkte von (μ) repräsentiert werden, eine gewisse zweidimensionale Umgebung jedes Punktes der Menge (m) überall dicht bedeckt, so besteht die Menge $\Gamma(\mu)$ aus den reellen und komplexen Punkten sämtlicher durch die Hauptgrenzpunkte der Gruppe gehenden Tangenten des absoluten Kreises.*

Es sei wiederum (21) eine hyperbolische Substitution der Gruppe g. Wir beschreiben um den Fixpunkt t_2, welcher bei der Annahme $K < 1$ ein Repulsionszentrum ist, einen kleinen Kreis C_2, welcher ganz in der im Satze vorausgesetzten Umgebung des Grenzpunktes t_2 liegt. Weil nach der Voraussetzung der Haupt-

grenzpunkt (t_2, t_2) der Menge (μ) nicht angehört, können wir den Kreis C_2 so klein annehmen, dass die einem Punkte von (μ) entsprechenden Punkte σ und τ nie beide innerhalb C_2 fallen. Es gibt also eine solche Teilmenge (μ') von (μ), dass von den zugehörigen Punkten σ', τ' die einen, sagen wir die Punkte σ', das Innere von C_2 überall dicht bedecken, während die Punkte τ' ausserhalb C_2 liegen. Vermittels einer hinreichend grossen positiven Potenz Σ^n von (21) wird C_2 auf einen den attrahierenden Fixpunkt t_1 umschliessenden Kreis C_1 abgebildet, so dass das Äussere des einen Kreises dem Innern des anderen entspricht, und umgekehrt. Die Punkte $\Sigma^n(\sigma')$ bedecken dann das Äussere von C_1 überall dicht, während die Punkte $\Sigma^n(\tau')$ sämtlich im Innern von C_1 liegen. Weil nun bei unbegrenzt wachsendem n der Kreis C_1 sich nach dem Punkt t_1 zusammenzieht, so ist dargetan, dass jeder Punkt (σ, t_1), wo σ einen beliebigen Wert hat, ein Häufungspunkt der Mengen $\Sigma^n(\mu)\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ist. Mithin umfasst die Menge $\Gamma(\mu)$ jeden Punkt der durch (t_1, t_1) gehenden, als zweidimensionale Mannigfaltigkeit aufgefassten Tangente des absoluten Kreises. Weil nun die Hauptgrenzpunkte der Gruppe gerade aus der Gesamtheit der Fixpunkte der hyperbolischen Substitutionen und ihrer Häufungspunkte bestehen, ist der obige Satz hiermit bewiesen.

19. Die Bedingungen des obigen Satzes sind insbesondere für jede algebraische Mannigfaltigkeit erfüllt. In der Tat sind die t-Koordinaten σ, τ in diesem Falle miteinander algebraisch verbunden, und die Punkte σ (*bzw.* τ) bedecken sogar die ganze t-Ebene. Wir haben somit den

Satz. *Die Häufungsgebilde der vermittels der Substitutionen der diskontinuierlichen Gruppe Γ erhaltenen Transformierten eines beliebigen algebraischen Gebildes*

$$P(x, y) = 0 \tag{22}$$

bestehen aus der Gesamtheit der durch die Hauptgrenzpunkte gehenden Tangenten des absoluten Kreises, vorausgesetzt, dass das gegebene Gebilde keinen Hauptgrenzpunkt der Gruppe enthält.

Es mag hier nebenbei bemerkt werden, dass die Richtigkeit dieses Satzes speziell für lineare Gebilde aus der polaren Beziehung zwischen den Punkten und Geraden auf Grund der Ergebnisse der N:o 15 ohne weiteres geschlossen werden kann.

Durch das Obige ist dargetan, dass die durch die Hauptgrenzpunkte gehenden Tangenten des absoluten Kreises als Häufungsgebilde von räumlich ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten dieselbe Rolle spielen, wie die Hauptgrenzpunkte als Häufungsstellen für die Transformierten isolierter Punkte. Es ist daher zweckmässig, diese Tangenten »Hauptgrenzgebilde» der Gruppe zu nennen. Bei den Gruppen erster Klasse ist ihre Gesamtheit mit dem dreidimensionalen Gebilde H_0 identisch, während sie bei den Gruppen zweiter Klasse auf H_0 diskret liegen.

20. Neben den Hauptgrenzgebilden können spezielle Grenzgebilde als Häufungsgebilde auftreten, wenn das gegebene Gebilde den Voraussetzungen des obigen Satzes nicht genügt. Wir wollen dies durch ein paar Beispiele erläutern.

Wir betrachten zuerst irgend eine durch den attrahierenden Fixpunkt der hyperbolischen Substitution (21) gehende Sekante. Aus N:o 13 geht hervor, dass ihre vermittels der Wiederholung von (21) erhaltenen Transformierten als Häufungsgebilde die durch die Fixpunkte t_1, t_2 gehende Gerade haben, welche daher ein spezielles Grenzgebilde ist.

Wir betrachten ferner die Transformierten des Gebildes

$$A\left(\frac{\sigma - t_2}{\sigma - t_1}\right) + B\left(\frac{\tau - t_2}{\tau - t_1}\right) + C = 0 \tag{23}$$

vermittels der Potenzen von (21). Aus ihren Gleichungen

$$A\left(\frac{\sigma - t_2}{\sigma - t_1}\right) + B\left(\frac{\tau - t_2}{\tau - t_1}\right) + C\,K^n = 0 \quad (|K| < 1)$$

geht hervor, dass sie als Grenzgebilde das durch die Gleichung

$$A\left(\frac{\sigma - t_2}{\sigma - t_1}\right) + B\left(\frac{\tau - t_2}{\tau - t_1}\right) = 0$$

dargestellte, im allgemeinen nicht lineare Gebilde haben, welches teils ausserhalb der Mannigfaltigkeit H_0, teils auf derselben liegt, wenn $\frac{B}{A}$ reell und negativ ist.

V. Die Picardschen Reihen.

21. Dem Poincaréschen Gedankengang folgend beweist Picard die Existenz automorpher Funktionen bei eigentlich diskontinuierlichen Gruppen in zwei Variabeln vermittels unendlicher Reihen der Form

$$\Theta(x, y) = \sum R(S, T)\left(\frac{\partial(S, T)}{\partial(x, y)}\right)^m, \tag{24}$$

wo R eine rationale Funktion bedeutet und die Summierung sich über die Gesamtheit der Substitutionen (S, T) der betreffenden Gruppen erstreckt. Jede Reihe der obigen Form ist nämlich für hinreichend grosse Werte m absolut und gleichmässig konvergent und genügt der Funktionalgleichung

$$\Theta(S, T) = \Theta(x, y) \left(\frac{\partial(S, T)}{\partial(x, y)}\right)^{-m}, \tag{25}$$

die der Funktionalgleichung

$$\Theta(S) = \Theta(z) \left(\frac{dS}{dz}\right)^{-m}$$

der Poincaréschen Θ-Funktionen analog ist. Der Quotient irgend zweier Funktionen (24), die nicht identisch verschwinden, ist daher eine automorphe Funktion der betreffenden Gruppe.

22. Nach PICARD sind die Reihen (24) für $m \geq 2$ in gewissen Bereichen des Raumes R_4 absolut und gleichmässig konvergent u. a. bei allen diskontinuierlichen Gruppen linearer Substitutionen

$$X = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}, \quad Y = \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3} \tag{26}$$

mit komplexen ganzzahligen Koeffizienten, deren zugeordnete homogene Substitutionen eine vorgelegte ternäre indefinite quadratische oder Hermitesche Form in sich überführen (»Hyperfuchssche Gruppen»).[1] Ferner hat PICARD in einer kürzlich erschienenen Abhandlung den speziellen Fall näher betrachtet, wo $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu$ reelle ganze Zahlen sind, und für den Konvergenzexponent m in diesem Falle den genaueren Wert $m = 1$ gefunden.[2] Dieses Resultat kann in folgender Weise verschärft und verallgemeinert werden.

Satz. *Die Θ-Reihen sind, von einem gewissen Glied ab, in jedem endlichen, von den auf H_0 gelegenen Hauptgrenzgebilden in endlicher Entfernung gelegenen Bereich für $m \geq \frac{2}{3}$ absolut und gleichmässig konvergent, vorausgesetzt, dass die singulären Gebilde der rationalen Funktion $R(x,y)$ keinen Hauptgrenzpunkt der Gruppe enthalten.*

Wir gehen von der Beobachtung aus, dass die einzelnen Glieder der Reihe (24) im allgemeinen für die Punkte der algebraischen Gebilde

$$\frac{1}{R(S, T)} = 0, \quad \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0 \tag{27}$$

[1] E. PICARD. *Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions.* (Acta mathematica, Bd. 1; 1882).

[2] E. PICARD. *Sur les fonctions de deux variables complexes restant invariables par les substitutions d'un groupe discontinu.* (Comptes rendus 1916).

und nur für diese polar unstetig werden. Nach unserer Voraussetzung enthalten die ersteren Gebilde keinen Hauptgrenzpunkt und dasselbe gilt für die Fluchtgeraden

$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0, \tag{27$'$}$$

die vermittels der Substitutionen der Gruppe Γ ineinander übergeführt werden, indem diese Geraden wegen der Relation

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_3^2 = -1 \tag{28}$$

ausserhalb des absoluten Kreises liegen. Die Bedingungen des in N:o 17 bewiesenen Satzes betreffs der Häufung der Transformierten einer algebraischen Mannigfaltigkeit sind also gültig, und wir erhalten das Resultat, dass die Gebilde (27) die Gesamtheit der Hauptgrenzgebilde und nur diese als Häufungsgebilde haben.

Es sei jetzt U ein beliebiger endlicher Bereich des Raumes R_4, welcher von den Hauptgrenzgebilden eine von Null verschiedene Entfernung hat. Die vermittels der verschiedenen Substitutionen von Γ erhaltenen Bildbereiche von U haben nach S. 303 als einzige Häufungspunkte die Hauptgrenzpunkte der Gruppe. Weil nach unserer Voraussetzung die Funktion $R(x, y)$ in diesen Punkten endlich ist, und weil anderseits, nach dem oben Gesagten, der Bereich U nur von endlich vielen unter den Gebilden (27) durchsetzt wird, so sieht man, dass, wenn diejenigen Glieder der Reihe, die diese Gebilde als polare Unstetigkeiten besitzen, ausgelassen werden, in sämtlichen übrigen Gliedern der Reihe die Grössen $|R(S, T)|$ im Bereiche U unter einer endlichen Grenze liegt. Hieraus folgt, dass die Reihe (24) hinsichtlich der absoluten und gleichmässigen Konvergenz durch die Reihe

$$\sum \left(\frac{\partial (S, T)}{\partial (x, y)}\right)^m = \sum \frac{1}{(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^{3m}} \tag{29}$$

ersetzt werden kann, welche der speziellen Wahl $R(x, y) \equiv 1$ der rationalen Funktion entspricht.

23. Wir behaupten jetzt, dass die Untersuchung der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der Reihe (29) auf die Untersuchung der Konvergenz der Reihe

$$\sum \frac{1}{\gamma_3^{3m}} \tag{30}$$

zurückgeführt werden kann.

Es sei Δ der kürzeste Abstand der Punkte des Bereichs U von den Fluchtlinien (27)'. Man hat dann für jede Substitution und jeden Punkt des Bereichs U die Ungleichung

$$\left|\frac{\alpha_3 x + \beta_3 x + \gamma_3}{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}}\right| \leq 1,$$

deren linke Seite den kürzesten Abstand des Punktes (x, y) von den Punkten der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $(27)'$ darstellt. Wegen der Relation (28) ist daher für jeden Punkt von U

$$(31) \qquad \frac{1}{|\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3|} \leq \frac{1}{\varDelta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma_3^2 - 1}}.$$

Anderseits ist in diesem Bereich, wenn die grösste Entfernung seiner Punkte vom Nullpunkt mit d bezeichnet wird,

$$\frac{|\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3|}{\gamma_3} \leq \frac{|\alpha_3 x + \beta_3 y|}{\gamma_3} + 1 \leq \frac{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2} \cdot \sqrt{|x|^2 + |y|^2}}{\gamma_3} + 1$$
$$< \sqrt{|x|^2 + |y|^2} + 1 \leq d + 1,$$

und somit

$$(31)' \qquad \frac{1}{|\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3|} > \frac{1}{d+1} \cdot \frac{1}{\gamma_3}.$$

Durch die Ungleichungen (31) und $(31)'$ ist die Gleichzeitigkeit der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der Reihe (29) im Bereich U mit der Konvergenz der aus lauter positiven Gliedern bestehenden Reihe (30) dargetan.

24. Nun folgt aus (1) und (9) die Gleichung

$$(32) \qquad \gamma_3 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$

die uns zeigt, dass die Reihe (30) bis auf einen Zahlenfaktor $(= 2^{3m})$ mit der Reihe

$$(33) \qquad \sum \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{3m}}$$

übereinstimmt, wo sich die Summierung über sämtliche Substitutionen

$$t' = \frac{at + b}{ct + d} = \Sigma(t)$$

der Gruppe g erstreckt. Wegen der Relation

$$(34) \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{|\Sigma(i)|^2 + 1}{\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{d\,t}\right|}, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

kann diese letzte Reihe (33) in der Form

$$(35)\qquad \sum \frac{1}{(|\Sigma(i)|^2+1)^{3m}}\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{d\,t}\right|^{3m}$$

geschrieben werden.

Wir wollen annehmen, dass der Punkt $t=i$ im Innern des Fundamentalbereichs R_0 der Gruppe g liegt, was man im allgemeinen durch geeignete Wahl von R_0 erreichen kann.[1] Es sei $\varkappa_0$ ein kleiner Kreis mit dem Mittelpunkt $t=i$ und dem Radius ϱ, der ganz innerhalb R_0 liegt. Für den Inhalt τ des vermittels der Substitution $\Sigma(t)$ erhaltenen Bildkreises $\varkappa$ hat man dann die Ungleichung

$$(36)\qquad \tau > \frac{\tau_0}{|c\,t+d|^4_{\max}}, \qquad (\tau_0 = \pi\varrho^2),$$

wo das Maximum für die Punkte des Kreises $\varkappa_0$ zu nehmen ist. Weil ferner die reellen Punkte $\Sigma^{-1}(\infty) = -\dfrac{d}{c}$ vom Mittelpunkte $t=i$ des Kreises $\varkappa_0$ einen endlichen Abstand $\geqq 1$ haben, so gilt für jeden Punkt t von $\varkappa_0$ die Ungleichung

$$(37)\qquad 1-\varrho \leqq \left|\frac{t+\dfrac{d}{c}}{i+\dfrac{d}{c}}\right| \leqq 1+\varrho.$$

Aus (36) und (37) ergibt sich

$$(38)\qquad \left|\frac{d\,\Sigma(i)}{d\,t}\right|^2 = \frac{1}{|c\,i+d|^4} \leqq \frac{(1+\varrho)^4}{|c\,t+d|^4_{\max}} < (1+\varrho)^4\,\frac{\tau}{\tau_0}.$$

In analoger Weise findet man für jeden Punkt von $\varkappa_0$

$$\left|\frac{\Sigma(i)}{\Sigma(t)}\right| = \left|\frac{i+\dfrac{b}{a}}{t+\dfrac{b}{a}}\right| : \left|\frac{i+\dfrac{d}{c}}{t+\dfrac{d}{c}}\right| > \frac{1-\varrho}{1+\varrho},$$

woraus folgt

$$(39)\qquad |\Sigma(i)| > \frac{1-\varrho}{1+\varrho}\,|\Sigma(t)|_{\max}$$

[1] Nur wenn $t=i$ ein elliptischer Fixpunkt ist, ist dies nicht möglich. In diesem Falle bedarf aber die folgende Darstellung nur einer unbedeutenden Modifizierung.

$$\left|\frac{\alpha_3 x + \beta_3 x + \gamma_3}{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}}\right| \leq \Delta,$$

deren linke Seite den kürzesten Abstand des Punktes (x, y) von den Punkten der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit (27)' darstellt. Wegen der Relation (28) ist daher für jeden Punkt von U

(31)
$$\frac{1}{|\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3|} \leq \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma_3^2 - 1}}.$$

Anderseits ist in diesem Bereich, wenn die grösste Entfernung seiner Punkte vom Nullpunkt mit d bezeichnet wird,

$$\frac{|\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3|}{\gamma_3} \leq \frac{|\alpha_3 x + \beta_3 y|}{\gamma_3} + 1 \leq \frac{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2} \cdot \sqrt{|x|^2 + |y|^2}}{\gamma_3} + 1$$
$$< \sqrt{|x|^2 + |y|^2} + 1 \leq d + 1,$$

und somit

(31)'
$$\frac{1}{|\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3|} > \frac{1}{d+1} \cdot \frac{1}{\gamma_3}.$$

Durch die Ungleichungen (31) und (31)' ist die Gleichzeitigkeit der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der Reihe (29) im Bereich U mit der Konvergenz der aus lauter positiven Gliedern bestehenden Reihe (30) dargetan.

24. Nun folgt aus (1) und (9) die Gleichung

(32)
$$\gamma_3 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$

die uns zeigt, dass die Reihe (30) bis auf einen Zahlenfaktor $(= 2^{3m})$ mit der Reihe

(33)
$$\sum \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{3m}}$$

übereinstimmt, wo sich die Summierung über sämtliche Substitutionen

$$t' = \frac{at + b}{ct + d} = \Sigma(t)$$

der Gruppe g erstreckt. Wegen der Relation

(34)
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{|\Sigma(i)|^2 + 1}{\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{d\,t}\right|}, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

kann diese letzte Reihe (33) in der Form

$$(35)\qquad \sum \frac{1}{(|\Sigma(i)|^2+1)^{3m}}\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{dt}\right|^{3m}$$

geschrieben werden.

Wir wollen annehmen, dass der Punkt $t=i$ im Innern des Fundamentalbereichs R_0 der Gruppe g liegt, was man im allgemeinen durch geeignete Wahl von R_0 erreichen kann.[1] Es sei $\varkappa_0$ ein kleiner Kreis mit dem Mittelpunkt $t=i$ und dem Radius ϱ, der ganz innerhalb R_0 liegt. Für den Inhalt τ des vermittels der Substitution $\Sigma(t)$ erhaltenen Bildkreises $\varkappa$ hat man dann die Ungleichung

$$(36)\qquad \tau > \frac{\tau_0}{|ct+d|^4_{\max}}, \qquad (\tau_0=\pi\varrho^2),$$

wo das Maximum für die Punkte des Kreises $\varkappa_0$ zu nehmen ist. Weil ferner die reellen Punkte $\Sigma^{-1}(\infty)=-\frac{d}{c}$ vom Mittelpunkte $t=i$ des Kreises $\varkappa_0$ einen endlichen Abstand $\geqq 1$ haben, so gilt für jeden Punkt t von $\varkappa_0$ die Ungleichung

$$(37)\qquad 1-\varrho \leqq \left|\frac{t+\frac{d}{c}}{i+\frac{d}{c}}\right| \leqq 1+\varrho.$$

Aus (36) und (37) ergibt sich

$$(38)\qquad \left|\frac{d\,\Sigma(i)}{dt}\right|^2=\frac{1}{|ci+d|^4}\leqq\frac{(1+\varrho)^4}{|ct+d|^4_{\max}}<(1+\varrho)^4\,\frac{\tau}{\tau_0}.$$

In analoger Weise findet man für jeden Punkt von $\varkappa_0$

$$\left|\frac{\Sigma(i)}{\Sigma(t)}\right|=\left|\frac{i+\frac{b}{a}}{t+\frac{b}{a}}\right|:\left|\frac{i+\frac{d}{c}}{t+\frac{d}{c}}\right|>\frac{1-\varrho}{1+\varrho},$$

woraus folgt

$$(39)\qquad |\Sigma(i)|>\frac{1-\varrho}{1+\varrho}|\Sigma(t)|_{\max}$$

[1] Nur wenn $t=i$ ein elliptischer Fixpunkt ist, ist dies nicht möglich. In diesem Falle bedarf aber die folgende Darstellung nur einer unbedeutenden Modifizierung.

Aus (38) und (39) ergibt sich

$$(40)\qquad \frac{1}{(|\Sigma(i)|^2+1)^2}\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{d\,t}\right|^2 < \frac{C_1\,r}{(C_2\,|\Sigma(t)|^2+1)^2} < C_1\int\limits_{(\varkappa)}\frac{r\,d\,r\,d\,\varphi}{(C_2 r^2+1)^2},$$

wo r, φ polare Koordinaten in Bezug auf Origo bedeuten und C_1 und C_2 positive, von Null verschiedene endliche Konstanten sind, welche von der Substitution $\Sigma(t)$ unabhängig sind.

Wir summieren jetzt die Ungleichungen (40) über die Gesamtheit der Substitution von Γ und bemerken, dass die entsprechenden Kreise $\varkappa$ alle ausserhalb einander liegen. Als Resultat erhält man die Ungleichung

$$(41)\qquad \sum\frac{1}{(|\Sigma(i)|^2+1)^2}\left|\frac{d\,\Sigma(i)}{d\,t}\right|^2 < C_1\int\limits_{r=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\frac{r\,d\,r\,d\,\varphi}{(C_2 r^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{C_1}{C_2}.$$

Mithin konvergiert die Reihe (35), und somit auch die Reihe (30) für $m = \frac{2}{3}$, und also a fortiori für $m > \frac{2}{3}$, womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

25. Für die Gruppen der zweiten Klasse hat man das folgende genauere Resultat, welches für die Untersuchungen des folgenden Kapitels wichtig ist.

S a t z. *Die Picardschen Reihen sind bei Gruppen der zweiten Klasse schon für* $m = \frac{1}{3}$ *absolut und gleichmässig konvergent.*

Wir nehmen an, dass der Punkt $t = \infty$ kein Grenzpunkt ist, was stets vermittels einer reellen linearen Transformation erreicht werden kann. Nach einem bekannten Satz von Burnside und Ritter konvergiert in diesem Falle die Reihe

$$\sum\frac{1}{c^2}.$$

Auf Grund der Relation (32) ist dann die Reihe

$$(42)\qquad \sum\frac{1}{\gamma^{\frac{2}{3}}}$$

a fortiori konvergent.

Für die Gruppen der ersten Klasse kann man dagegen zeigen, dass die Reihe (42) divergiert. Wir wollen den Beweis indess hier übergehen.

26. Aus der gleichmässigen Konvergenz der Picardschen Reihen (24) folgt, dass sie analytische Funktionen der Variabeln x, y darstellen. Zur Untersuchung ihrer analytischen Eigenschaften bemerken wir zunächst, dass die betreffenden Funktionen für die Punkte der Gebilde (27) im allgemeinen polar unstetig werden. In der Tat können diese singulären Gebilde einander nur in einzelnen Punkten aufheben, wenn es nicht zufälligerweise eine Substitution von Γ gibt, die eines unter den singulären Gebilden der rationalen Funktion $R(x, y)$ entweder in sich selbst oder in irgend ein anderes überführt.

Wir setzen ferner wie stets voraus, dass die singulären Gebilde von $R(x, y)$ keinen Hauptgrenzpunkt der Gruppe Γ enthalten. Unter dieser Voraussetzung bestehen die Häufungsgebilde der Gebilde (27) aus den Hauptgrenzgebilden, deren Punkte somit sämtlich wesentlich singuläre Stellen und zwar die einzigen derartigen Stellen der Funktionen (24) sind. Hieraus folgt aber, dass der Charakter der durch die Picardschen Reihen definierten automorphen Transzendenten wesentlich von der Klasse der Gruppe abhängt.

Es sei nämlich Γ zuerst eine Gruppe erster Klasse. Nach den Ergebnissen des Kapitels IV fällt die Gesamtheit der Hauptgrenzgebilde mit dem Gebilde H_0 zusammen. Jeder Punkt dieser dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist daher ein wesentlich singulärer Punkt für sämtliche Picardsche Θ-Funktionen.

Wir haben also in diesem Falle das bemerkenswerte Resultat, dass jede Picardsche Reihe drei verschiedene analytische Funktionen definiert, welche in je einem unter den drei von H_0 begrenzten Räumen A, B, C existieren (vrgl. S. 298), über deren Grenze hinaus sie nicht analytisch fortgesetzt werden können. Wesentlich anders verhält es sich bei den Gruppen zweiter Klasse. Die Hauptgrenzgeraden bilden hier eine Menge auf H_0 gelegener diskreter Geraden, durch welche der vierdimensionale Raum R_4 nicht geteilt wird. Jede Picardsche Reihe definiert also eine einzige analytische Funktion, deren Existenzbereich, von den Hauptgrenzgeraden abgesehen, den ganzen Raum R_4 umfasst.

Durch die obigen Betrachtungen ist eine vollständige Analogie mit den automorphen Funktionen einer Variabeln hinsichtlich der Eigenart der Singularitäten gewonnen, welche Analogie wir durch den folgenden Satz ausdrücken.

S a t z. *Die von den Picardschen Reihen dargestellten analytischen Funktionen sind transzendente Funktionen, deren wesentliche Singularitäten nicht von der Wahl der Funktionen, sondern nur von der Gruppe allein abhängen. Ausser diesen Singularitäten gibt es nur polare Unstetigkeiten.*

27. Die obigen Betrachtungen setzen voraus, dass die Picardschen Reihen nicht identisch verschwinden. Diese Möglichkeit ist bei den Θ-Funktionen, welche

Pole besitzen, ausgeschlossen. Wir wollen in dieser Nummer die Existenz von polfreien nicht identisch verschwindenden Funktionen nachweisen.

Es sei Γ eine Gruppe erster Klasse, und $R(x, y)$ eine rationale Funktion, die für reelle Werte der Variabeln x, y reell und positiv ist. Wir nehmen an, dass die polaren Unstetigkeiten von $R(x, y)$, ausser der stets geltenden oben gemachten Voraussetzung, noch der weiteren genügt, dass keine ihrer Punkte innerhalb H_0 liegen. Dies erreicht man z. B durch die Wahl

$$R(x, y) = \frac{1}{(Ax + By + C)^2},$$

wo $Ax + By + C = 0$ die Gleichung irgend einer reellen ausserhalb des absoluten Kreises liegenden Geraden ist.

Unter den obigen Voraussetzungen ist die innerhalb des Gebildes H_0 existierende Θ-Funktion polfrei. Dass diese Funktion nicht identisch Null ist, geht aus der Gleichung

$$\Theta(0,0) = \sum R(S(0,0), T(0,0)) \frac{1}{\gamma_3^{3m}} \tag{43}$$

hervor, deren rechte Seite eine Reihe mit lauter positiven Gliedern darstellt.

28. Wir wollen in dieser Nummer auf eine Analogie zwischen den Picardschen Reihen $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension $(m = 1)$

$$\Theta(x, y) = \sum R(S, T) \frac{\partial(S, T)}{\partial(x, y)} \tag{44}$$

und den Poincaréschen Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension

$$\Theta(z) = \sum R(S) \frac{dS}{dz}$$

hinweisen.

Diese Poincaréschen Reihen stellen, nach Multiplikation mit dz, wenn sie absolut konvergieren, automorphe Differentiale dar. Ganz analog besitzt man in den Reihen (44) analytische Ausdrücke, die unmittelbar automorphe Doppeldifferentiale ergeben.

In der Tat folgt aus der Funktionalgleichung (25) im Falle $m = 1$, also aus der Gleichung

$$\Theta(S, T) = \Theta(x, y) \left(\frac{\partial(S, T)}{\partial(x, y)}\right)^{-1}, \tag{45}$$

die Relation

$$\Theta(S, T)\, dS\, dT = \Theta(x, y)\, dx\, dy,$$

woraus hervorgeht, dass der Ausdruck

(46) $$\Theta(x, y)\, dx\, dy$$

ein automorphes Doppeldifferential darstellt.

Dagegen ist es nicht möglich, von den Picardschen Reihen aus in entsprechender Weise zur Darstellung einfacher automorpher Differentiale zu gelangen. Diese Darstellung kann bei den Gruppen zweiter Klasse durch eine neue Verallgemeinerung der Poincaréschen Reihen erreicht werden, wie wir im folgenden Kapitel zeigen wollen.

VI. Eine neue Verallgemeinerung der Poincaréschen Reihen.

29. Wir bilden das folgende Paar einander »konjugierter» Reihen:

(47) $$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum \left\{ A(S, T) \frac{\partial S}{\partial x} + B(S, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right\}, \\ \bar{\varphi}(x, y) &= \sum \left\{ A(S, T) \frac{\partial S}{\partial y} + B(S, T) \frac{\partial T}{\partial y} \right\}, \end{aligned}$$

wo A und B rationale Funktionen bezeichnen, deren singuläre Gebilde keinen Hauptgrenzpunkt der Gruppe enthalten.

Hinsichtlich der Konvergenz der neuen Reihen gilt der

Satz. *Die Reihen* (47) *sind bei allen Gruppen zweiter Klasse absolut und gleichmässig konvergent.*

In Analogie mit der Untersuchung der Picardschen Reihen kann man sich hier auf den Nachweis der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der speziellen Reihen

$$\sum \frac{\partial S}{\partial x}, \sum \frac{\partial S}{\partial y}, \sum \frac{\partial T}{\partial x}, \sum \frac{\partial T}{\partial y}$$

beschränken. Es genügt die erste dieser Reihen zu betrachten, weil sich die Untersuchung für die übrigen ganz ähnlich gestaltet.

Aus

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{(\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) y + (\alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1)}{(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^2}$$

31. Zu der zweiten oben genannten Methode zur Bildung automorpher Funktionen aus (47) gelangt man in folgender Weise.

Die Funktionen (47) genügen, wie leicht zu verifizieren ist, den Funktionalgleichungen

$$\tag{51} \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(S, T)\frac{\partial S}{\partial x} + \overline{\varphi}(S, T)\frac{\partial T}{\partial x}, \\ \overline{\varphi}(x, y) &= \varphi(S, T)\frac{\partial S}{\partial y} + \overline{\varphi}(S, T)\frac{\partial T}{\partial y}. \end{aligned}$$

Es seien nun $\varphi_1, \overline{\varphi}_1$ und $\varphi_2, \overline{\varphi}_2$ zwei Paare einander konjugierter φ-Funktionen. Für die aus ihnen gebildete Determinante

$$\tag{52} \Delta(x, y) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x, y) & \overline{\varphi}_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) & \overline{\varphi}_2(x, y) \end{vmatrix}$$

ergibt sich aus (51) die Funktionalgleichung

$$\Delta(S, T) = \Delta(x, y)\left(\frac{\partial(S, T)}{\partial(x, y)}\right)^{-1},$$

d. h. diejenige der Picardschen Θ-funktionen $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension. Der Quotient

$$\Delta(x, y) : \Theta(x, y),$$

wo Θ eine Picardsche Funktion $(-3)^{\text{ter}}$ Dimension ist, stellt daher eine automorphe Funktion der Gruppe dar.

Es seien ferner $\Delta_1(x, y)$ und $\Delta_2(x, y)$ irgend zwei wesentlich verschiedene Determinanten (52). Der Quotient $\dfrac{\Delta_1(x, y)}{\Delta_2(x, y)}$ und allgemeiner jede homogene Funktion nullten Grades der Determinanten (52) ist eine automorphe Funktion.

Man kann auf ähnliche Weise wie bei den mit Polen behafteten Θ-Funktionen beweisen, dass die nach der neuen Methode gebildeten Funktionen im allgemeinen nicht identisch verschwinden.

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

PAR

TORSTEN CARLEMAN

à UPSAL.

À Monsieur G. MITTAG-LEFFLER à l'occasion de son soixante quinzième anniversaire et en témoignage de ma reconnaissance et de mon admiration pour son œuvre.

TORSTEN CARLEMAN.

POINCARÉ et d'autres après lui ont étudié les propriétés asymptotiques quand x tend vers l'infini des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n u}{d x^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + P_2(x) \frac{d^{n-2} u}{d x^{n-2}} + \cdots + P_n(x) u = 0 \tag{1}$$

en supposant que les $P_k(x)$ admettent des développements asymptotiques

$$P_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{k\nu} \frac{1}{x^\nu} \tag{2}$$

les $a_{k\nu}$ étant indépendants de x. On a sur cette question le théorème suivant. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les racines de l'équation

$$\alpha^n + a_{10} \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n0} = 0 \tag{3}$$

supposées différentes entre elles.[1] Alors l'équation (1) admet un système fondamental de solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots u_n(x)$, qui sont représentées asymptotiquement par des développements de la forme

[1] On suppose ordinairement que les parties réelles de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sont différentes entre elles.

$$u_k(x) \backsim e^{a_k x} x^{-\lambda_k} \left(c_{k0} + \frac{c_{k1}}{x} + \frac{c_{k2}}{x^2} + \cdots\right). \tag{4}$$

Nous nous proposons ici de démontrer qu'un résultat analogue subsiste si l'on suppose que les coefficients $a_{k\nu}$, au lieu d'être constants, sont des fonctions périodiques de x de même période T. Nous avons seulement à remplacer dans (4) les a_ν par les exposants caractéristiques de l'équation

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_{10}(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n0}(x)\, u = 0 \tag{5}$$

et les $c_{k\nu}$ par des fonctions périodiques de x de période T. Cependant il faut supposer ces exposants non congrus entre eux $\left(\text{module } \frac{2\pi i}{T}\right)$.

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est représentée asymptotiquement par la série

$$a_0(x) + \frac{a_1(x)}{x} + \frac{a_2(x)}{x^2} + \cdots, \tag{6}$$

où $a_\nu(x)$ sont des fonctions périodiques de période T, si toutes les fonctions $f_\nu(x)$ définies par

$$f(x) = a_0(x) + \frac{a_1(x)}{x} + \frac{a_2(x)}{x^2} + \cdots + \frac{a_\nu(x) + f_\nu(x)}{x^\nu} \tag{7}$$

tendent vers zéro, lorsque x tend vers l'infini. En remarquant qu'une fonction périodique qui tend vers zéro pour $x \to \infty$ est identiquement nulle, il résulte de cette définition qu'à une fonction $f(x)$ donnée ne correspond qu'un seul développement asymptotique.

Nous montrerons d'abord comment on peut déterminer les coefficients $c_0(x)$, $c_1(x), \ldots c_\nu(x), \ldots$ dans la série

$$e^{ax} \sum \frac{c_\nu(x)}{x^{\nu+\lambda}}$$

qui correspond à l'exposant caractéristique a de (5). En posant dans l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}(x) \frac{1}{x^\nu}\right) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(x) \frac{1}{x^\nu}\right) . y = 0 \tag{8}$$

$y = e^{ax} u$ nous obtenons une équation de même forme en u

$$(9)\qquad \frac{d^n u}{d x^n} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{1\nu}(x)\frac{1}{x^\nu}\right)\frac{d^{n-1}u}{d x^{n-1}} + \cdots + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}(x)\frac{1}{x^\nu}\right) u = 0.$$

L'équation à coefficients périodiques

$$(10)\qquad L(u) = \frac{d^n u}{d x^n} + b_{10}(x)\frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + \cdots + b_{n0}(x)\, u = 0$$

admet donc un système fondamental de la forme

$$\begin{aligned} U_1(x) &= u_1(x) \\ U_2(x) &= e^{\beta_2 x} u_2(x) \\ U_3(x) &= e^{\beta_3 x} u_3(x) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ U_n(x) &= e^{\beta_n x} u_n(x), \end{aligned}$$

où $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots u_n(x)$ sont des fonctions périodiques de x et 0, $\beta_2, \ldots \beta_n$ des quantités non congrues entre elles $\left(\text{module } \frac{2\pi i}{T}\right)$. En posant dans (9)

$$u = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x^{\nu+\lambda}}$$

$$\frac{du}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c'_\nu - (\nu - 1 + \lambda)\, c_{\nu-1}}{x^{\nu+\lambda}}$$

$$\frac{d^2 u}{d x^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c''_\nu - 2(\nu - 1 + \lambda)\, c'_{\nu-1} + (\nu - 2 + \lambda)(\nu - 1 + \lambda)\, c_{\nu-2}}{x^{\nu+\lambda}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^p u}{d x^p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sum_{s=0}^{p} c_{\nu-s}^{(p-s)} (-1)^s \binom{p}{s} \binom{\nu - 1 + \lambda}{s} \lfloor s}{x^{\nu+\lambda}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_{p\nu}}{x^{\nu+\lambda}},\text{[1]}$$

$c_\nu^{(q)}$ désignant la dérivée q-ième de la fonction périodique $c_\nu(x)$, nous obtenons, en annulant les coefficients de $\frac{1}{x^{\nu+\lambda}}$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ les équations suivantes

$$(12)\qquad L(c_0) = 0$$

[1] Dans ces formules il faut remplacer chaque c_ν à indice négatif par zéro.

$$(12') \quad L(c_1) - \lambda(nc_0^{(n-1)} + (n-1)\,b_{10}\,c_0^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1,0}\,c_0) + b_{11}\,c_0^{(n-1)} + \cdots + b_{n1}\,c_0 = 0$$

. . . .

$$(13) \quad \begin{aligned} & L(c_\nu) - (\nu + \lambda - 1)\,(n\,c_{\nu-1}^{(n-1)} + (n-1)\,b_{10}\,c_{\nu-1}^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1,0}\,c_{\nu-1}) + \\ & + b_{11}\,c_{\nu-1}^{(n-1)} + b_{21}\,c_{\nu-1}^{(n-2)} + \cdots + b_{n1}\,c_{\nu-1} + \\ & + \text{termes contenant } c_{\nu-2},\ c_{\nu-3}, \ldots \text{ et leurs dérivées} = 0. \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin étudions l'équation non homogène

$$(14) \quad L(u) = \frac{d^n u}{dx^n} + b_{10}(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + b_{n0}(x)\,u = f(x)$$

où $f(x)$ admet la période T.

Pour plus de simplicité nous posons dans la suite $b_{p0}(x) = b_p(x)$. Désignons par W le déterminant wronskien

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \ldots & U_n \\ U_1' & U_2' & \ldots & U_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_1^{(n-1)} & U_2^{(n-1)} & \ldots & U_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

et par $W_i(x)$ les dérivées partielles de ce déterminant par rapport à $U_i^{(n-1)}$. Alors la solution générale de (14) peut s'écrire

$$(15) \quad \begin{aligned} u = u_1(x)\left(\int_{x_0}^{x} \frac{W_1(x)}{W} f(x)\,dx + k_1\right) + e^{\beta_2 x} u_2(x)\left(\int_{x_0}^{x} \frac{W_2(x)}{W} f(x)\,dx + k_2\right) + \\ + \cdots + e^{\beta_n x} u_n(x)\left(\int_{x_0}^{x} \frac{W_n(x)}{W} f(x)\,dx + k_n\right) \end{aligned}$$

où $k_1, k_2, \ldots k_n$ sont des constantes arbitraires. On voit aisément que pour $i > 1$ $\dfrac{W_i(x)}{W(x)}$ est égal à $e^{-\beta_i x}$ multiplié par une fonction périodique de x, tandis que $\dfrac{W_1(x)}{W(x)}$ est périodique.

En écrivant[1]

[1] Ici nous aurons besoin de l'hypothèse qu'aucun des β_p ne peut être un multiple positif ou négatif ou nul de $\frac{2\pi i}{T}$.

$$e^{\beta_p x} \cdot f(x) \frac{W_p(x)}{W(x)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{p\nu} e^{\frac{2\pi i \nu x}{T}}$$

on aura

$$e^{\beta_p x}\left[\int_{x_0}^{x} \frac{W_p(x)}{W(x)} f(x)\,dx + k_p\right] =$$

$$= e^{\beta_p x}\left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{p\nu} \frac{e^{\left(\frac{2\pi i\nu}{T}-\beta_p\right)x}}{\frac{2\pi i\nu}{T}-\beta_p} - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{p\nu} \frac{e^{\left(\frac{2\pi i\nu}{T}-\beta_p\right)x_0}}{\frac{2\pi i\nu}{T}-\beta_p} + k_p\right].^{1}$$

Il s'ensuit que $k_2, k_3, \ldots k_n$ peuvent être choisis de telle manière que la somme des $n-1$ derniers termes de (15) devient une fonction périodique. Cela posé, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que (14) possède une solution périodique $u(x)$ est que

(16) $$\int_0^T \omega(x) f(x)\,dx = \int_x^{x+T} \omega(x) f(x)\,dx = 0,$$

où

$$\omega(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}.$$

Cette condition remplie, il existe une infinité de solutions périodiques données par l'expression

$$u(x) + k u_1(x)$$

k étant une constante arbitraire.[2] $\omega(x)$ ne peut pas être identiquement nul dans aucun intervalle. L'hypothèse que $\omega(x) = 0$ entraîne, en effet, que tous les mineurs du déterminant wronskien $W(x)$ par rapport à la première colonne s'annulent identiquement ce qui contredit l'inégalité $W \neq 0$.

On peut démontrer comme il suit que l'hypothèse que $0, \beta_2, \ldots \beta_n$ sont non congrus entre eux $\left(\text{module } \frac{2\pi i}{T}\right)$ entraîne l'inégalité

[1] La série $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{p\nu} e^{\frac{2\pi i \nu x}{T}}$ n'est pas nécessairement convergente. Néanmoins on peut, dans ce cas, d'après la théorie des séries de Fourier, la traiter comme une série convergente.

[2] Par un lemme énoncé p. 331 on trouve que chaque solution périodique est de cette forme.

$$\int_0^T \omega(x)\left(n\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} + (n-1)b_1(x)\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(x)u_1\right)dx \neq 0 \tag{18}$$

Considérons l'équation linéaire

$$L(u) + \varrho\,\overline{\omega(x)}\,\overline{u_1(x)}\,u = 0 \tag{19}$$

qui dépend d'un paramètre ϱ. Les solutions de (19) $u_p^*(x,\varrho)$ $(p = 1, 2, \ldots n)$ qui remplissent les conditions

$$\frac{d^\nu u_p^*}{dx^\nu} = \begin{matrix} 0 & \nu \neq p-1 \\ 1 & \nu = p-1 \end{matrix} \quad (\nu < n)$$

sont des fonctions entières de ϱ et forment un système fondamental. D'après les propriétés des équations linéaires à coefficients périodiques on a

$$u_p^*(x+T) = \sum_{r=1}^{n} H_{pr}\,u_r^*(x), \tag{20}$$

où H_{pq} sont des constantes qui dépendent de ϱ. Il en résulte

$$H_{pq} = \frac{d^{q-1}u_p^*(T)}{dT^{q-1}}, \tag{21}$$

d'où l'on conclut que les H_{pq} sont des fonctions entières de ϱ. En désignant par β un exposant caractéristique de (19) et en posant $e^{\beta T} = z$ nous avons

$$\begin{vmatrix} H_{11}-z & H_{12} & \ldots H_{1n} \\ H_{21} & H_{22}-z & \ldots H_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{n1} & H_{n2} & \ldots H_{nn}-z \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

Les quantités $0, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$ étant toutes non congrues entre elles $\left(\text{module } \frac{2\pi i}{T}\right)$, on voit que l'équation (22) pour $\varrho = 0$ a toutes ses racines différentes entre elles. On voit donc qu'il existe une série de puissances

$$\beta = k_1\varrho + k_2\varrho^2 + \cdots$$

telle que

$$z = e^\beta = e^{k_1\varrho + k_2\varrho^2 + \cdots}$$

satisfait à (22). De là on déduit aisément qu'il existe une série

$$u_1(x) + \varrho v_1(x) + \varrho^2 v_2(x) + \cdots$$

à coefficients périodiques, telle que

$$e^{(k_1\varrho + k_2\varrho^2 + \cdots)x}[u_1(x) + \varrho v_1(x) + \varrho^2 v_2(x) + \cdots]$$

soit une solution de (19) pour $|\varrho|$ suffisamment petit. En portant cette expression dans (19) on trouve, en considérant le coefficient de ϱ,

$$L(v_1) + k_1\left(n\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} + (n-1)\,b_1(x)\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(x)\,u_1\right) + \overline{\omega}\,\overline{(x)}\,\overline{u_1(x)}\,u_1(x) = 0.$$

D'après (16) il faut avoir

$$k_1\int_0^T\left(n\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} + (n-1)\,b_1(x)\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(x)\,u_1\right)\omega(x)\,dx +$$

$$+\int_0^T|\omega(x)|^2\,|u_1(x)|^2\,dx = 0.$$

Donc

$$\int_0^T\left[n\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} + (n-1)\,b_1(x)\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n-1}(x)\,u_1\right]\omega(x)\,dx \neq 0$$

c. q. f. d.

En nous reportant aux formules (12) et (13) nous voyons que $c_0(x)$ peut être pris égal à $u_1(x)$, (12') se resout par une fonction périodique $c_1(x)$ si

$$\lambda\int_0^T(n\,u_1^{(n-1)} + (n-1)\,b_{10}\,u_1^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1,0}\,u_1)\,\omega(x)\,dx -$$
$$-\int_0^T(b_{11}\,u_1^{(n-1)} + b_{21}\,u_1^{(n-2)} + \cdots + b_{n1}\,u_1)\,\omega(x)\,dx = 0. \tag{23}$$

En vertu de (18) il est toujours possible de déterminer λ de manière à satisfaire à cette équation. Si $c_1^*(x)$ est une solution périodique particulière de (12') la solution périodique la plus générale devient

$$c_1(x) = c_1^*(x) + \gamma_1\,u_1(x),$$

où γ_1 est une constante arbitraire. En portant les valeurs trouvées pour $c_0(x)$ et $c_1(x)$ dans (13) pour $\nu = 2$ nous obtenons

$$L(c_2) - (\lambda + 1) H(c_1^* + \gamma_1 u_1) + G(c_1^* + \gamma_1 u_1) + P(c_0) = 0, \tag{24}$$

où $P(c_0)$ est une expression indépendant de c_2 et c_1 et

$$H(u) = n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + (n-1)\, b_{10}(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n-1,0}(x)\, u,$$

$$G(u) = b_{11}(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + b_{21}(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + b_{n1}(x)\, u.$$

Pour que cette équation (24) admette une solution périodique $c_2(x)$ il faut choisir γ_1 de telle manière que

$$\int_0^T \gamma_1 ((\lambda+1) H(u_1) - G(u_1))\, \omega(x)\, dx + \int_0^T [(\lambda+1) H(c_1^*) - G(c_1^*) - P(c_0)]\, \omega(x)\, dx = 0.$$

Cela est toujours possible parce que, en vertu de (23) et (18)

$$\int_0^T [(\lambda+1) H(u_1) - G(u_1)]\, \omega(x)\, dx = \int_0^T H(u_1)\, \omega(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^T [\lambda H(u_1) - G(u_1)]\, \omega(x)\, dx = \int_0^T H(u_1)\, \omega(x)\, dx \neq 0.$$

On obtient pour c_2 une expression

$$c_2 = c_2^* + \gamma_2 u_1,$$

dépendant d'une constante arbitraire γ_2. En continuant ainsi on peut déterminer de proche en proche tous les coefficients $c_0(x), c_1(x), \ldots c_\nu(x), \ldots$. En effet, supposons qu'on ait obtenu pour $c_{\nu-1}(x)$ l'expression

$$c_{\nu-1}(x) = c_{\nu-1}^*(x) + \gamma_{\nu-1} u_1(x)$$

qui contient une constante arbitraire $\gamma_{\nu-1}$. L'équation (13) peut être écrite

$$L(c_\nu) - (\lambda + \nu - 1)[H(c_{\nu-1}^*) + \gamma_{\nu-1} H(u_1)] + G(c_{\nu-1}^*) + \gamma_{\nu-1} G(u_1) +$$

$$+ P(c_0, c_1, \ldots c_{\nu-2}) = 0,$$

où $P(c_0, c_1, \ldots c_{\nu-2})$ est indépendant de $c_{\nu-1}$ et de c_ν. Pour que cette équation admette une solution périodique c_ν il faut et il suffit que

$$\gamma_{\nu-1}\int_0^T [(\lambda+\nu-1)H(u_1)-G(u_1)]\,\omega\,dx+\int_0^T [(\lambda+\nu-1)H(c^*_{\nu-1})-$$
$$-G(c^*_{\nu-1})-P(c_0,c_1,\ldots c_{\nu-2})]\,\omega\,dx=0.$$

Cette équation détermine uniquement $\gamma_{\nu-1}$ parce que

$$\int_0^T [(\lambda+\nu-1)H(u_1)-G(u_1)]\,\omega\,dx=(\nu-1)\int_0^T H(u_1)\,\omega\,dx+$$
$$+\int_0^T [(\lambda H(u_1)-G(u_1)]\,\omega\,dx=(\nu-1)\int_0^T H(u_1)\,\omega\,dx\neq 0.$$

Il est donc clair qu'à chaque exposant caractéristique correspond une et une seule série asymptotique de la forme

$$e^{ax}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu(x)}{x^{\nu+\lambda}}.$$

Il nous reste à démontrer qu'il existe effectivement des intégrales de notre équation différentielle qui sont représentées asymptotiquement par ces séries.

Considérons une quelconque des séries asymptotiques

$$e^{ax}\frac{1}{x^\lambda}\left[c_0(x)+\frac{c_1(x)}{x}+\frac{c_2(x)}{x^2}+\cdots+\frac{c_m(x)}{x^m}+\cdots\right].$$

En posant dans l'équation différentielle (8)

$$y=e^{ax}\frac{1}{x^\lambda}\left[c_0(x)+\frac{c_1(x)}{x}+\cdots+\frac{c_m(x)}{x^m}+v(x)\right] \tag{26}$$

on obtient pour $v(x)$ une équation de la forme

$$L(v)=H_1(x)\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+\cdots+H_n(x)\,v+h(x). \tag{27}$$

où

$$|H_\nu(x)|<\frac{k}{x},\ |h(x)|<\frac{k'}{x^{m+1}} \tag{28}$$

k et k' étant des constantes, dont la première k est indépendant de m. Désignons par $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_r$ celles des différences $\alpha_p - \alpha$ $(\alpha_p \neq \alpha)$ dont la partie réelle est positive ou nulle, et par $-\gamma'_1, -\gamma'_2, \dots -\gamma'_{r'}$, les différences restantes. D'après la théorie connue de l'équation différentielle linéaire avec second membre on trouve facilement qu'une solution de $L(u) = f(x)$ peut s'écrire

$$(29) \qquad u = \varphi_0(x) \int_x^\infty \Psi_0(t) f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{r} e^{\gamma_\nu x} A_{0\nu}(x) \int_x^\infty B_{0\nu}(t) e^{-\gamma_\nu t} f(t)\, dt + \\ + \sum_{\nu=1}^{r'} e^{-\gamma'_\nu x} D_{0\nu}(x) \int_l^x E_{0\nu}(t) e^{\gamma'_\nu t} f(t)\, dt$$

et plus généralement

$$(30) \qquad \frac{d^p u}{d x^p} = \varphi_p(x) \int_x^\infty \Psi_0(t) f(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{r} e^{\gamma_\nu x} A_{p,\nu}(x) \int_x^\infty B_{0\nu}(t) e^{-\gamma_\nu t} f(t)\, dt + \\ + \sum_{\nu=1}^{r'} e^{-\gamma'_\nu x} D_{p\nu}(x) \int_l^x E_{0\nu}(t) e^{\gamma'_\nu t} f(t)\, dt$$

$$(p = 0, 1, 2, \dots n-1)$$

$\varphi_p(x), \Psi_0(x), A_{p\nu}(x), B_{0\nu}(x), E_{0\nu}(x), D_{p\nu}(x)$ étant des fonctions périodiques de x. En remplaçant ici $f(x)$ par le second membre de (27) et en posant

$$u = v = v_0, \frac{dv}{dx} = v_1, \dots \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} = v_{n-1}$$

on obtient pour $v_0, v_1, v_2, \dots v_{n-1}$ le système d'équations intégrales linéaires suivant

$$v_p = \sum_{q=0}^{n-1} \int_x^\infty M_{pq}(x,t) v_q(t) dt + \sum_{q=0}^{n-1} \int_x^\infty \sum_{\nu=1}^{r} e^{\gamma_\nu (x-t)} K_{pq\nu}(x,t) v_q(t) dt + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} \int_l^x \sum_{\nu=1}^{r'} e^{-\gamma'_\nu (x-t)} G_{pq\nu}(x,t)\, v_q(t)\, dt + g_p(x) = S_p(v_0, v_1, \dots v_{n-1}) + g_p(x)$$

$$(p = 0, 1, 2, \dots n-1),$$

où $M_{pq}(x,t)$ $K_{pq\nu}(x,t)$ $G_{pq\nu}(x,t)$ satisfont aux inégalités

$$
(32) \qquad \begin{aligned} &|M_{pq}(x,t)| < \frac{C}{t} \\ &|K_{pq\nu}(x,t)| < \frac{C}{t} \qquad \begin{matrix} x \geq x_0 \\ t \geq x_0 \end{matrix} \\ &|G_{pq\nu}(x,t)| < \frac{C}{t} \end{aligned}
$$

C étant une constante indépendante de m. $g_p(x)$ est la fonction qu'on obtient en remplaçant $f(t)$ dans le second membre de (30) par $h(x)$. Il est aisé de voir qu'en vertu de (28)

$$
(33) \qquad |g_p(x)| < \frac{k_1}{x^m}
$$

où k_1 est une constante.

Désignons par $S^*(v_0, v_1, \ldots v_{n-1})$ l'expression qu'on obtient en remplaçant tous les noyaux qui entrent dans $S(v_0, v_1, \ldots v_{n-1})$ par leurs valeurs absolues. Cherchons d'abord une borne supérieure de

$$
\left| S_p^*\left(\frac{1}{t^m}, \frac{1}{t^m}, \ldots \frac{1}{t^m}\right)\right|.
$$

On obtient, en tenant compte de (32),

$$
(34) \qquad \left| S_p^*\left(\frac{1}{t^m}, \frac{1}{t^m}, \ldots \frac{1}{t^m}\right)\right| < C n \int_x^\infty \frac{1}{t^{m+1}}\, dt + r n C \int_x^\infty \frac{1}{t^{m+1}}\, dt +
$$

$$
+ C r' n \int_l^x e^{-\varkappa(x-t)} \frac{1}{t^{m+1}}\, dt = \frac{C(1+r)n}{m} \frac{1}{x^m} + C r' n \int_l^x e^{-\varkappa(x-t)} \frac{1}{t^{m+1}}\, dt
$$

en désignant par $\varkappa$ la plus petite des valeurs

$$
R[\gamma_1'], R[\gamma_2'], \ldots R[\gamma_r'].
$$

Considérons l'expression

$$
J(x) = x^m \int_l^x e^{-\varkappa(x-t)} \frac{1}{t^{m+1}}\, dt,
$$

où l est supposé > 1. Soit β un nombre positif < 1 et supposons $x > \frac{1}{1-\beta}$.

On a

$$J(x) < x^m \int_1^{(1-\beta)x} e^{-\varkappa(x-t)} \frac{1}{t^{m+1}}\, dt + x^m \int_{(1-\beta)x}^{x} e^{-\varkappa(x-t)} \frac{1}{t^{m+1}}\, dt,$$

d'où il s'ensuit

$$\lim_{x=\infty} J(x) = 0 .$$

Ceci ayant lieu uniformément quel que soit $l > 1$, nous pouvons, en vertu de (34), choisir d'abord m et puis l assez grands pour que

$$(35) \qquad \left| S_p^*\left(\frac{1}{t^m}, \frac{1}{t^m}, \frac{1}{t^m}, \ldots \frac{1}{t^m}\right)\right| < \frac{\xi}{x^m} \qquad \text{pour } x > l$$

où $0 < \xi < 1$.

Considérons maintenant les équations intégrales

$$(36) \qquad v_p = z\, S_p(v_0, v_1, \ldots v_{n-1}) + g_p(x) .$$

En cherchant à satisfaire à ces équations par des séries

$$v_p = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{p\nu}(x)\, z^\nu$$

on obtient les relations récurrentes

$$w_{p,\nu+1}(x) = S_p(w_{0\nu}, w_{1\nu}, \ldots w_{n-1,\nu}),$$

d'où l'on conclut, au moyen des inégalités (33) et (35)

$$|w_{p\nu}(x)| < \frac{k_1\, \xi^\nu}{x^m} .$$

Les équations (36) sont donc résolubles pour $|z| < \frac{1}{\xi}$ par des fonctions v_p qui sont plus petites en valeur absolue que

$$\frac{k_1}{1 - \xi |z|} \cdot \frac{1}{x^m} .$$

En particulier nous obtenons (pour $z = 1$) une solution du système (31) et par conséquent une solution de l'équation différentielle (27), qui tend vers zéro comme $\frac{1}{x^m}$ au moins.

De là on conclut aisément qu'à chaque réduite (d'ordre m) des séries asymptotiques

(37) $$e^{ax}\frac{1}{x^\lambda}\left[c_0(x)+\frac{c_1(x)}{x}+\frac{c_2(x)}{x}+\cdots\right]$$

correspond une solution de l'équation différentielle qui se comporte asymptotiquement comme cette réduite. Cependant il n'est pas démontré par là qu'il existe une solution de (8) qui soit représentée asymptotiquement par (37) quel que soit l'ordre m de cette réduite. Pour démontrer qu'il en est ainsi nous avons besoin du lemme suivant.

Soient $c_1(x), c_2(x), \dots c_n(x)$ des fonctions continues périodiques de période T, et $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ des nombres réels qui soient non congrus entre eux (module 1). Alors la fonction

(41) $$F(x)=\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu(x)\, e^{\frac{2\pi i\varrho_\nu}{T}x}$$

ne peut pas tendre vers zéro pour $x\to\infty$ à moins que toutes les fonctions $c_\nu(x)$ soient nulles. Multiplions la relation (41) par

$$\frac{1}{l}\,\overline{c_p(x)}\,e^{-\frac{2\pi i\varrho_p x}{T}}$$

($\overline{c_p(x)}$ désigne la quantité conjuguée de $c_p(x)$) et intégrons de 0 à l. On obtient ainsi

$$\frac{1}{l}\int_0^l |c_p(x)|^2\,dx=\frac{1}{l}\int_0^l \overline{c_p(x)}\,e^{-\frac{2\pi i\varrho_p x}{T}}F(x)\,dx-\sum_{\nu\neq p}\frac{1}{l}\int_0^l e^{\frac{2\pi i}{T}(\varrho_\nu-\varrho_p)}\,\overline{c_p(x)}\,c_\nu(x)\,dx.$$

Parce qu'on peut approcher de $\overline{c_p(x)}c_\nu(x)$ uniformément par des sommes de la forme

$$\sum_{q=-N}^{N} A_q\, e^{\frac{2\pi i}{T}qx}$$

et parce qu'on a

$$\lim_{l=\infty}\frac{1}{l}\int_0^l e^{\frac{2\pi i}{T}(\varrho_\nu-\varrho_p)x}\cdot\sum_{q=-N}^{N}A_q\,e^{\frac{2\pi i}{T}qx}\,dx=$$

$$=\lim_{l=\infty}\frac{1}{l}\sum_{q=-N}^{N}\frac{A_q T}{2\pi i(\varrho_\nu-\varrho_p+q)}\left[e^{\frac{2\pi i}{T}(\varrho_\nu-\varrho_p+q)l}-1\right]=0\quad(\nu\neq p)$$

on voit que

$$\lim_{l=\infty} \frac{1}{l} \int_0^l e^{\frac{2\pi i(\varrho_\nu - \varrho_p)}{T} x}\, \overline{c_p(x)}\, c_\nu(x)\, dx = 0. \qquad (\nu \neq p)$$

Si

$$\lim_{x=\infty} F(x) = 0$$

on a aussi

$$\lim_{l=\infty} \frac{1}{l} \int_0^l F(x)\, c_p(x)\, e^{-\frac{2\pi i}{T}\varrho_p x}\, dx = 0$$

et par conséquent

$$\lim_{l=\infty} \frac{1}{l} \int_0^l |c_p(x)|^2\, dx = 0$$

ce qui entraîne, en vertu de la périodicité de $c_p(x)$,

$$c_p(x) = 0.$$

Désignons par

$$\frac{e^{\alpha_\nu x}}{x^{\lambda_\nu}} \left(c_{\nu 0}(x) + \frac{c_{\nu 1}(x)}{x} + \cdots \right)$$

la série asymptotique qui correspond à l'exposant caractéristique α_ν. Considérons un système de solutions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... $u_n(x)$ de l'équation différentielle qui se comportent asymptotiquement comme

$$\frac{e^{\alpha_\nu x}}{x^{\lambda_\nu}}\, c_{\nu 0}(x).$$

On démontre facilement au moyen du lemme que nous venons d'établir que ces solutions sont linéairement indépendantes. Soit m un nombre entier positif quelconque. D'après ce qui précède on peut trouver une solution $V(x)$ de (1) qui se comporte asymptotiquement comme

$$\frac{1}{x^{\lambda_\nu}} e^{\alpha_\nu x} \left[c_{\nu 0}(x) + \frac{c_{\nu 1}(x)}{x} + \frac{c_{\nu 2}(x)}{x^2} + \cdots + \frac{c_{\nu m}(x)}{x^m} \right].$$

$u_1(x)$, $u_2(x)$, ... $u_n(x)$ étant un système fondamental il existe des constantes C_1, C_2, ... C_n telles que

$$V(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \cdots + C_n u_n(x)$$

ce qu'on peut écrire encore

$$V(x) = \sum_{R[a_p - a_\nu] \geq 0} C_p u_p(x) + \sum_{R[a_p - a_\nu] < 0} C_p u_p(x).$$

Au moyen du lemme ci-dessus on trouve facilement que la somme

$$\sum_{R[a_p - a_\nu] \geq 0} C_p u_p(x)$$

se réduit à $u_\nu(x)$. Comme

$$e^{-a_\nu x} \sum_{R[a_p - a_\nu] < 0} C_p u_p$$

tend vers zéro plus vite que toute puissance de $\frac{1}{x}$ on voit que

$$\lim_{x=\infty} x^m \left[x^{\lambda_\nu} u_\nu(x) e^{-a_\nu x} - \left(c_{\nu 0}(x) + \frac{c_{\nu 1}(x)}{x} + \cdots + \frac{c_{\nu m}(x)}{x^m} \right) \right] = 0$$

quel que soit m. Donc $u_\nu(x)$ admet bien le développement asymptotique

$$\frac{1}{x^{\lambda_\nu}} e^{-a_\nu x} \left[c_{\nu 0}(x) + \frac{c_{\nu 1}(x)}{x} + \cdots + \frac{c_{\nu m}(x)}{x^m} + \cdots \right].$$

Nous résumons le résultat obtenu comme il suit. *Soit*

(42) $$\frac{d^n u}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x) u = 0$$

une équation différentielle dont les coefficients admettent des développements asymptotiques

$$P_k(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{k\nu}(x)}{x^\nu},$$

où $a_{k\nu}(x)$ sont des fonctions continues périodiques de période T. Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les exposants caractéristiques de l'équation à coefficients périodiques

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_{10}(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n0}(x) u = 0$$

et supposons que ces quantités soient non congrues entre elles $\left(\text{module } \frac{2\pi i}{T}\right)$. *Alors il existe un système fondamental* $u_1(x), u_2(x), \ldots u_n(x)$ *de solutions de* (42) *qui admettent des développements asymptotiques de la forme*

$$u_\nu(x) = e^{a_\nu x} x^{-\lambda_\nu} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c_{\nu p}(x)}{x^p},$$

où $c_{\nu p}(x)$ *sont des fonctions périodiques de* x *de période* T.

Finissons cet article par la démonstration d'un théorème sur les séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) x^n, \tag{43}$$

où $\varphi_n(x)$ est une fonction continue périodique de x de période T. On constate immédiatement que si cette série est convergente pour toutes les valeurs réelles de x, elle est aussi toujours absolument convergente dans le domaine réel. En considérant l'exemple

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \cdots$$

on voit qu'une même fonction peut admettre des développements différents de la forme (43). Désignons par M_n la borne supérieure de $|\varphi_n(x)|$. Pour la série

$$x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \cdots$$

$\Sigma M_n z^n$ est une fonction entière de z d'ordre apparent 1. Si, par contre, on suppose que $\Sigma M_n z^n$ soit d'ordre $\varrho < 1$ on trouve que le développement d'une fonction en série de la forme (43) est unique comme le montre le théorème suivant.

Supposons $T = 2\pi$ (ce qui ne restreint pas la généralité du résultat). Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) x^n \tag{44}$$

une série toujours convergente pour les valeurs réelles de x, les $\varphi_n(x)$ étant des fonctions périodiques de x de période 2π. Désignons par M_n la borne supérieure de $|\varphi_n(x)|$ et supposons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n \tag{45}$$

soit une fonction entière de z d'ordre $\varrho < 1$. Alors la fonction $f(x)$ ne peut-être identiquement nulle que si toutes les fonctions $\varphi_n(x)$ sont nulles.

Pour la démonstration nous considérons la fonction de λ

$$\Psi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x)\, dx$$

qui est régulière pour $R[\lambda] > 0$. On a dans ce domaine

$$\Psi(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x} \varphi_n(x) x^n\, dx.$$

En développant $\varphi_n(x)$ en série de Fourier on obtient

$$\varphi_n(x) \backsim \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{np}\, e^{ipx}$$

et il est aisé de voir que [pour $R[\lambda] > 0$]

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} \varphi_n(x)\, x^n\, dx = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{n,p} \int_0^\infty e^{-\lambda x + ipx}\, x^n\, dx = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{n,p} \frac{\lfloor n}{(\lambda - ip)^{n+1}}.$$

Démontrons maintenant que la série double

(45′)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{n,p} \frac{\lfloor n}{(\lambda - ip)^{n+1}}$$

est absolument et uniformément convergente par rapport à λ dans l'intérieur de chaque domaine fini D qui ne contient pas les points $ip\,(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. On a en effet

(46)
$$|A_{n,p}| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\, e^{-ipx}\, dx \right| \leq M_n$$

(47)
$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} |A_{0,p}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_0(x)|^2\, dx \leq M_0.$$

Au moyen de l'inégalité (47) on trouve facilement que

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{A_{0,p}}{\lambda - ip}$$

est absolument et uniformément convergente dans D. Il existe évidemment une constante K indépendante de p et n telle que pour λ dans D

$$\frac{|\lambda - ip|}{|p| + 1} > K.$$

De là on conclut que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{A_{n,p} \underline{|n}}{(\lambda - ip)^{n+1}}$$

admet la série majorante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{M_n \underline{|n}}{(|p| + 1)^{n+1} K^{n+1}} < \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|p| + 1)^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{\underline{|n}}{K} \left(\frac{1}{K}\right)^n$$

qui est convergente en vertu de notre hypothèse sur $\Sigma M_n z^n$. Il s'ensuit que $\Psi(\lambda)$ est une fonction uniforme dans tout le plan, qui ne peut avoir d'autres points singuliers que les points ip ($p =$ un nombre entier positif ou négatif ou nul). On voit aussi facilement que la partie principale de $\Psi(\lambda)$ par rapport au point singulier pi est égale à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{np}}{(\lambda - ip)^{n+1}}.$$

Si l'on a

$$f(z) = 0$$

on a aussi

$$\Psi(\lambda) = 0.$$

Donc

$$A_{n,p} = 0 \quad \begin{cases} n = 0, 1, 2, \ldots \\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

et par conséquent

$$\varphi_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

c. q. f. d.

BIBLIOGRAPHIE.

Akademische Verlagsgesellschaft.

Leipzig.

HELM, G., Grundlehren der höheren Mathematik. Zum Gebrauch bei Anwendungen und Wiederholungen. Neue verbess. Ausg. Zweiter anastat. Neudr. — VI + 419 pp. 8. 1921.

Der Funktionsbegriff. Der Grenzwert u. d. Differentiieren. Anwendungen d. Differentialrechnung. Das Integrieren. Vorzeichen d. Strecken u. Flächen. Vektoren u. Momente. Polarkoordinaten. Parallelkoordinatensysteme. Unendl. Reihen. Beziehungen zwischen drei Veränderlichen. Massbeziehungen i. räuml. Koordinatensystem. Partielle Differentialquotienten. Mehrfache Integrale. Analyt. Behandl. d. geraden Linie. Analyt. Behandl. d. Kreises. Analyt. Geometrie d. Kegelschnitte. Differentialgleichungen. Methoden d. unbestimmten Integration. Bestimmte Integrale. Interpolation. Aus d. analyt. Geometrie d. Raumes. Der Taylorsche Satz bei Funktionen mehrerer Veränderlichen u. seine Anwendungen.

Abhandlungen über Variations-Rechnung. T. 1. Abhandlungen von JOH. BERNOULLI (1696), JAC. BERNOULLI (1697) und LEONHARD EULER (1744). Herausgeg. von P. STÄCKEL. 2., durchgeseh. Aufl. (Ostwald's Klassiker. 46.) — 143 pp. 8. 1914.

Abhandlungen über Variations-Rechnung. T. 2. Abhandlungen von LAGRANGE, 1762, 1770, LEGENDRE (1786) und JACOBI (1837). Herausgeg. von P. STÄCKEL. (Ostwald's Klassiker. 47.) — 110 pp. 8. 1921.

ARCHIMEDES, Über Spiralen. Übersetzt u. mit Anm. u. einem Anhang versehen von ARTHUR CZWALINA-ALLENSTEIN. (Ostwald's Klassiker d. exakten Wissenschaften. 201.) — 71 pp. 8. 1922.

DESARGUES, G., Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse des Zusammentreffens eines Kegels mit einer Ebene. Aus d. Französichen übers. u. herausgeg. von MAX ZACHARIAS. (Ostwald's Klassiker d. exakten Wissenschaften. 197.) — 86 pp. 8. 1922.

Einstein, A., Untersuchungen über die Theorie der »Brownschen Bewegung». Mit Anmerk. herausgeg. von R. Fürth. (Ostwald's Klassiker d. exakten Wissenschaften. 199.) — 72 pp. 8. 1922.

Gauss, Carl Friedrich, Allgemeine Flächentheorie. (Disquisitiones generales circa superficies curvas.) (1827.) Deutsch herausgeg. von A. Wangerin. 5. Aufl. (Ostwald's Klassiker. 5.) — 64 pp. 8. 1921.

Hering, Ewald, Über das Gedächtnis als eine allgemeine Funktion der organisierten Materie. Vortrag in der feierlichen Sitzung der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien von 30. Mai 1870. 3. Aufl. (Ostwald's Klassiker. 148.) — 21 pp. 8. 1921.

Rydberg, J. R., Untersuchungen über die Beschaffenheit der Emissionsspektren der chemischen Elemente. Am 13. Nov. 1889 der Kgl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften überreichte Abhandlung. Aus dem Französischen übers. von A. v. Oettingen. Herausgeg. von Manne Siegbahn und A. v. Oettingen. (Ostwald's Klassiker. 196.) — 214 pp. 8. 1922.

Félix Alcan.

Paris.

Christesco, Stéfan, Explorations dans l'ultra-éther de l'univers et les anomalies des théories d'Einstein. Suite à la nouvelle étude de cosmogonie scientifique. Contenant un atlas de cosmogonie scientifique. Avec 32 planches hors texte... (La science universelle de l'énergie. 8. Systèmes cellulaires des mondes.) — 440 pp. 8. 1922. Fr. 30: —.

Atlas de cosmogonie scientif. de l'ultracosmos cellulaire electromagnét. Explorations dans l'»ultracosmos cellulaire» simplex, duplex, triplex. Les systèmes cellulaires des mondes. Organisation électromagnét. de la matière dans un ultracosmos cellulaire. Mouvements hélicoïdaux des planètes par rapport au point gamma (D) et les applications des théories d'Einstein. Les anomalies des théories d'Einstein. Mémoire-critique adressé, spécialement, au »Scientific American», de New-York.

Petrovitch, Michel, Mécanismes communes aux Phénomènes disparates. (Nouvelle collection scientifique.) — 279 p. 8. 1921. Fr. 8: —.

1. Particularités communes aux allures des phénomènes. Description schémat. des allures. Eléments descript. Allure d'un élément. Allure du phénomène. Particularités communes d'allures. Description mathém. des allures. 2. Particularités communes aux mécanismes des phénomènes. Rôles. Types de rôles. Mécanismes. Types de mécanismes. 3. Lien entre les particularités d'allure et de mécanisme. Généralités. Quelques schémas de lien entre les particularités d'allure et de mécanismes. Allure du phénomène comme l'indice de son mécanisme. 4. Répartition de rôles et la manifestation extér. de particularités d'allures dans les phénom. naturels. 5. For-

mes spécif. de mécanismes et de particularités d'allure dans quelques espèces de phénom. concrets. 6. Analogies phénoménolog. Analogies et leurs noyaux. Intérêt théor. et prat. des analogies.

Rougier, Louis, Les Paralogismes du Rationalisme. Essai sur la Théorie de la Connaissance. (Bibliothèque de Philosophie Contemporaine.) — XIV + 540 pp. 8. 1920. Fr. 15: — et 20 % majoration provisoire.

Les paralogismes classiques. La transformat. de la nécessité hypothétique et de la vérité relative des théorèmes en nécessité inconditionnelle et en vérité absolue. L'inférence de la nécessité hypothétique des théorèmes à la nécessité abs. des principes. L'évidence ex terminis des Principes. L'argument a Constantia subjecti. La démonstration des principes. Le paralogisme ontologique dans les sciences positives. Le paralog. ontol. en Métaphysique. La théorie leibnizienne de la démonstration des principes. Dissimulation des postulats sous les appels à l'intuition. Démonstrat. métaphys. des princ. des sciences de la nature. Le Réalisme mathématique. Le Réalisme et les condit. a priori de la possibilité de la science. Réalisme platonicien et l'argument des degrés. Réalisme platon. et l'argum. des degrés appliqué aux idées de relation... Réalisme Aristotélic... Antinomies dialectiques du Réalisme ontologique. Principes réalistes de la généalogie des êtres et l'échec de l'entreprise rationaliste. Conclusion.

American Mathematical Society.

New-York.

The Cambridge colloquium 1916. Part 2. Analysis situs, by O. Veblen. (American mathem. society Colloquium lectures, vol. 5.) — vii + 150 pp. 8. 1922.

Linear graphs. Two-dimensional complexes and manifolds. Complexes and manifolds of N dimensions. Orientable manifolds. The fundamental group and certain unsolved problems.

Asokthebu (Otto Wilh. Barth).

München.

Zacharias, Johannes, Verborgene Gewalten im Weltgeschehen. Eine neue Raum-Kraft-Lehre. — 91 pp. 8. 1922. Mk. 15: —

Strahlungsbetrieb d. Weltraumes. Strahlungsbetrieb d. Erdkörpers. Strahlungsbetrieb irdischer Erscheinungen. Strahlungsbetrieb d. Lebenserscheinungen.

Johann A. Barth.

Leipzig.

Wien, W., Die Relativitätstheorie vom Standpunkte der Physik und Erkenntnislehre. Vortrag. — 36 pp. 8. 1921. Mk. 7: 50.

G. Bell and Sons.

London W. C. 2.

Brodetsky, S., A first course in nomography. (Bell's Mathematical Series.) — 135 pp. 8. 1920. 10 s. Bd.

List of diagrams a. index of nomograms. Historical Sketch. Introd. — Nomograms for addition a. simultaneous equations. Generalised nomograms f. addition a. substraction. Nomograms f. multiplicat. a. division. Nomograms with two parallel scales. Quadratic equations. Generalised theory of nomograms with two parallel scales. Parallel coordinates. Nomograms with trigonometrical functions. Nomograms with intersecting scales. Practical a. automatic construction of nomograms. Empirical nomograms. Practical details.

Piaggio, H. T. H., An elementary treatise on Differential equations and their applications. (Bell's Mathematical Series.) — XVI + 216 + XXV pp. 8. 1920. 12 s.

Historical introduction. Introd. a. definitions. Elimination. Graphical repres. Equations of the first order a. first degree. Linear equat. with constant coeff. Simple partial different. equat. Equat. of the first order, but not of the first degree. Singular solutions. Miscellaneous methods for equations of the second and higher orders. Numerical approximations to the solution of different. equat. Solut. in series. Method of Frobenius. Existence theorems of Picard, Cauchy a. Frobenius. Ordinary Diff. equat. with three variables a. the correspond. curves a. surfaces. Partial diff. equations of the first order. Particular methods. Partial diff. equat. of the first order. General methods. Part. diff. equat. of the second a. higher orders. Appendix A—D. Answers to the examples.

Albert Blanchard.

Paris.

Born, Max, La constitution de la matière. Trad. par H. Bellenot. (Collection de monographies scientif. étrangères publ. sous la direction de M. G. Juvet. 2.) — 84 pp. 8. 1922. Fr. 6: —

L'atome. De l'éther mécanique à la matière électr. Le passage de la chimie à la physique.

Pillet, Jules, Traité de géométrie descriptive. Ligne droite et plan, polyèdres, surfaces. — VIII + 270 pp. fol. 1921. Fr. 32: —

1. Ligne droite et plan: Généralités. Détermination du point et de la droite. Déplacements. Représentation du plan. Changements de plans combinés avec les rotations. Rabattements. Positions relat. des plans et des droites. Représentation des courbes. Circonférence de cercle. Intersections. Les trois corps ronds. Sphère, cône, cylindre. Problèmes sur les angles. Probl. sur les distances. Polyèdres. Polyèdres réguliers.

2. Surfaces courbes: Généralités sur les courbes et sur les surfaces. Plans tangents aux cônes et aux cylindres. Intersection des cônes, des cylindres, des pyram. et des prismes. Sect. planes et dével. des cônes, des cylindres, des pyram. et des prismes. Cône et cylindre de révol. Sphère. Surf. de révol. Plans tangents. Intersections. Hyperboloïde de révol. à une nappe.

3. Surfaces réglées et surfaces hélicoïdales: Généralités sur les surf. réglées. Paraboloide et hyperboloide réglés. Raccordement des surf. gauches. Hélice, cylindr. et surf. hélicoïdales réglées. Surf. hélicoïd. non régl. Surf. développables.

4. Complément: Projections par plans cotés. Gnomonique. Méthode des projections obliques. Théorie des surf. (Eléments de géométr. infinitésimale.) Courbure des surf. Complém. de la théorie des ombres.

Pillet, J. J., Traité de perspective linéaire précédé du tracé des ombres usuelles (rayon à 45 degrés) et du rendu dans le dessin d'architecture et dans le dessin de machines. 3e éd. (nouveau tirage). — 280 pp. fol. 1921. Fr. 32: —

1. Les ombres usuelles: Généralités. Ombres portées sur les plans de front. Ombres pour des surfaces de révolution, en saillie. Ombres pour les surfaces d. révol. en creux. Applications. 2. Le rendu: Généralités. Les trois sphères types et les lignes d'égales teintes. Rendu des surfaces géométr. Rendu d'architecture. Rendu de machines. 3. Perspective: Généralités. Perspective du géométral; méthodes de perspective gén. Perspect. directe sans les points princip. Premières applications. Perspect. directe exigeant les points princip. Perspect. des cercles horizontaux. Perspect. des élévations. Perspect. directe dans l'espace. Images par réflexion dans les miroirs plans. Ombres en perspect. Restitutions perspect. Dessin d'après nature. Perspect. de convention. Appareils perspecteurs. Perspect. théâtrale.

Weyl, H., Temps, espace, matière. Leçons sur la théorie de la relativité générale. Trad. sur la 4e éd. allemande. — VIII + 290 pp. 8. 1922. Fr. 20: —.

1. L'espace euclidien; son expression mathém. et son rôle en physique. Géométrie à n-dimensions. Les bases de la géométrie métr. 2. Le continuum métr. Coup d'œil sur la géométrie non euclidienne. L'espace métr. Considérations tirées de la théorie des groupes pour éclairer la notion de métrique de l'espace. 3. Relativité de l'espace et du temps. Le principe de relativité de Galilée. Théorème de relativité de Lorentz. Le principe de relativité d'Einstein. Mécanique de la relativité. La théorie de Mie. 4. Théorie gén. de la relativité. La métrique d'univers, cause des phénomènes électromagnétiques. Conséquences du principe d'action le plus simple. Les équations fondam. de la mécanique.

Société Scientifique de Bruxelles.

Louvain.

Lefebvre, B., Notes d'Histoire des Mathématiques (Antiquité et Moyen Age). — VIII + 154 pp. 8. 1920.

Les Historiens des Sciences Mathématiques. Les Mathématiques orientales. La mathém. grecque. Les Mathém. à Rome. Les math. hindoues, byzantines, arabes.

La numération écrite chez les Grecs et chez les Romains, et dans le haut Moyen Age. Origine hindoue de nos chiffres. Nos chiffres à travers les ages. Les math. au Moyen Age. Le Haut Moyen Age. Les math. en nos contrées aux temps de Pépin le Bref et de Charlemagne. Le Moine Gerbert (Silvestre II). Les Sciences exactes chez les Belges après Charlemagne. Première renaissance des Math. dans l'Europe chrétienne aux XIIe et XIIIe siècles. L'Europe entre en possession des Math. arabes. Les Arabisants de l'Ecole de Tolède au XIIe siècle.

Cambridge University Press.

Fetter Lane, London, E. C. 4.

Baker, H. F., Principles of geometry. Vol. 1. Foundations. — xi + 182 pp. 8. 1922.

Introductory. 1. Abstract geometry. Propositions of incidence. Correspondence of the points of two lines. Pappus' theorem. Introd. of algebr. symbols. 2. Real geometry. The propos. of incidence. Introd. of a plane, and of a space. Extension of the real geometry by means of postulated elements. A deduction of Pappus' theorem fr. the extended real geometry. 3. Abstract geometry, resumed. Related spaces; justification of the symbols. Geometr. assumption of imaginary elements; replacement of imaginary elements by series of real elements.

Cullis, C. E., Chapters on algebra. (Being the first three chapters of matrices and determinoids, vol. 3.) (University of Calcutta. Readership lectures.) — ix + 182 pp. 8. 1920.

Ch. 20. The irresoluble and irreducible factors of rational integral functions. 21. Resultants and eliminants of rational integral functions and equations. 22. Symmetric functions of the elements of similar sequences.

Eccles, J. R., Advanced lecture notes on light. — 141 pp. 8. 1919. 7/6.

Rainbows, Magnifying power. Chromatic aberration. Spherical aberration. Wave theory of light. Interference. Diffraction. Polarisation of light.

Forsyth, A. R., Lectures introductory to the theory of functions of two complex variables. Delivered to the University of Calcutta during January and February 1913. — XVI + 281 pp. 1914. 10/—.

Geometr. representation of the variables. Lineo-linear transformations; invariants and covariants. Uniform analytic functions. Uniform functions in restricted domains. Functions without essential singularities in the finite part of the field of variation. Integrals; in particular, double integrals. Level places of two simultaneous functions. Uniform periodic functions.

Jeans, J. A., The mathematical theory of electricity and magnetism. 4th ed. — VI + 627 pp. 4. 1920. 24 s. cloth.

Electrostatics and current electricity. Physical principals. Electrostatic field of force. Conductors and condensers. Systems of conductors. Dielectrics and inductive

capacity. State of the medium in the electrostatic field. General analytic theorems. Methods for the solution of spec. problems. Steady currents in linear conductors. Steady currents in contin. media. — Permanent magnetism. Induced magn. The magn. field produced by electr. currents. Induct. of currents in continuous media. Dynamical theory of currents. Displacement currents and electromagn. waves. Electromagn. theory of light. Motion of electrons. Theory of relativity.

MACMAHON, P. A., New Mathematical Pastimes. — 116 + X pp. 8. 1921. 12 s. net.

Pastimes based upon simple geometrical forms. Equilateral Triangel pastimes. Square pastimes. Right-angled triangle pastimes. A cube pastime. Regular Hexagon pastimes. Part II. Transformation of part I. Part III. The design of repeating patterns for decorative work.

MACMAHON, P. A., An introduction to combinatory analysis. — VIII + 71 pp. 8. 1920. 7 s. 6 d.

Elementary theory of symmetric functions. Opening of the theory of distributions. Distrib. into different boxes. Distrib. when subjects a. boxes are equal in number. Distrib. of given specification. The most general case of dustribution.

NEVILLE, ERIC HAROLD, Multilinear functions of direction and their use in differential geometry. — VIII + 80 pp. 8. 1921. 8 s. 6 d.

Linear and multilinear functions. Fundamental notions in the kinematical geometry of surfaces and families of surfaces. Surfaces and multilinear functions associated with a function of position in space. The bilinear curvature of a surface. The bilinear rate of change of a function of position. The Codazzi function. The trilinear rate of change of a function of position. Functions of direction on a surface.

RICHARDSON, LEWIS, F., Weather prediction by numerical process. — XII + 236 pp. 4. 1922. 30/ net.

Summary. Introductory example. Choice of coordinate differences. Fundamental equations. Finding the vertical velocity. Special treatment for the stratosphere. Arrangement of points and instants. Review of operations in sequence. An example worked on computing forms. Smoothing the initial data. Some remaining problems. Units and notation.

ROBB, ALFRED A., The Absolute Relation of Times and Space. — VIII + 80 pp. 8. 1921. 5 sh. net.

Preliminary considerations. Conical order. Normality of general lines having a common element. Theory of congruence. Introduction of coordinates. Interpretation of results. Appendix.

WHITEHEAD, A. N., An enquiry concerning the principles of Natural Knowledge. — XII + 200 pp. 8. 1919. 14 s. net.

I. The traditions of Science. Meaning. Foundations of dynamical physics. Scientific relativity. Congruence. II. Data of Science. Natural elements. Events. Objects. III. Method

of Extensive Abstraction. Principles of the method of extens. abstr. Durations, moments and time-systems. Finite abstractive elements. Points a. straight lines. Normality a. congruence. Motion. IV. Theory of Objects. Location of obj. Material obj. Causal component. Figures. Rhythms.

Carnegie Institution of Washington.

Washington.

DICKSON, LEONARD EUGENE, History of the theory of numbers, Vol. II. Diophantine analysis. (Carnegie Institution of Washington, publication No 256, Vol. II.) — XXV + 803 pp. 4. 1920.

Polygonal, pyramidal and figurate numbers. Linear Diophantine equations and congruences. Partitions. Rational right triangles. Triangles, quadrilaterals and tetrahedra. Sum of two squares. Sum of three, four and of n squares. Number of solutions of quadratic congruences in n unknowns. Liouville's series of eighteen articles. Pell equation. Further single equations of the second degree. Squares in arithmetical or geometrical progression. Two or more linear functions made squares. Two quadratic functions of one or two unknowns made squares. Systems of two equations of degree two. Three or more quadratic functions of one or two unknowns made squares. Systemes of three or more equations of degree two in three or more unknowns. Quadratic form made an nth power. Equations of degree three. Equations of degree four. Equat. of degree n. Sets of integers with equal sums of like powers. Waring's problem and related results. Fermat's last theorem $ax^r + by^s = cz^t$ and the congruence $x^n + y^n \equiv z^n$ (mod p).

Bruno Cassirer.

Berlin W. 35.

CASSIRER, ERNST, Zur Einstein'schen Relativitätstheorie. Erkenntnistheoretische Betrachtungen. — 134 pp. 8. 1921. M. 18:—.

Massbegriffe u. Dingbegriffe. Empirische u. begriffliche Grundlagen d. Relativitätstheorie. Philosophischer Wahrheitsbegriff u. Relativitätstheorie. Materie, Äther, Raum. Raum- u. Zeitbegiff des kritischen Idealismus u. Relativitätstheorie. Euklidische u. Nicht-Euklid. Geometrie. Relativitätstheorie u. Problem der Realität.

Chapman & Hall, Ltd.

London.

WHITE, CHARLES J., The Elements of theoretical a. descriptive Astronomy. For the use of Colleges and Academies. 8th ed. revised by PAUL P. BLACKBURN. — XI + 309 pp. 8. 1920.

General Phenomena of the Heavens. Definitions. Celestial Sphere. Astronomical instruments. Errors. Refraction. Parallax. Dip of the Horizon. The Earth, its size, form a. rotation. Latitude a. longitude. The Sun. The Earth's orbit. The seasons.

Twilight. The zodical Light. Sidereal a. solar time. Equation of time. The calendar. Universal Gravitation. Pertubations in the earth's orbit. Abberation. The Moon Lunar a. Solar Eclipses. Occultations. The tides. The Planets a. the Planetoids. The Nebular Hypothesis. Comets a. Meteoric Bodies. The fixed stars. Nebulae. Motion of the solar system. Real motions of the stars. Appendix.

Williams, Kenneth P., The Dynamics of the Airplane. (Mathematical Monographs No 21.) — VIII + 138 pp. 8. 1921. 2.50 net.

The plane and cambered surface. Straight Horizontal flight. Descent a. ascent. Circular flight. Propeller. Performance, ceiling, radius of action. Stability a. controllability. Appendix.

H. A. Ludwig Degener.

Leipzig.

Mewes, Rudolf, Theorie und Praxis der Grossgasindustrie. Bd 1: Hälfte 1. Geschichtliche Entwicklung der Prinzipien der Mechanik und Physik. Grundgesetze der Thermodynamik. Neue unveränd. Ausg. — XX + 403 pp. 8. 1910. M. 75: 95.

Abschnitt 1. Geschichtl. Entwickl. d. Prinzipien d. Mechanik u. Physik. Einl. Kopernikus. Kepler. Galilei. Torricelli. Boyle u. Mariotte. Vorbem. üb. Descartes. Huyghens. Newton. Entwickl. d. theoret. Mechanik u. Physik. Grundlegung d. mod. Thermodynamik durch Mayer.

Abschnitt 2. Grundgesetze d. Thermodynamik (Zustandsänderungen). Vorbem. Zustandsänd. f. Druck u. Volumen bei isotherm. Kompression. Ableitung d. exponentiellen Bezieh. zwischen Spannung u. Zwischenvolumen aus d. Gleichung f. d. isotherm. Kompressionsarbeit. Zustandsänd. f. Wärme u. Druck bzw. Zwischenvolumen u. adiabat. Kompression u. Expansion. Übereinstimmung d. Zwischenvolumengesetzes mit d. quadrat. Wirkungsgesetzen d. Ätherstrahlen u. d. Massenanziehung. Ergebnis d. Untersuchungen üb. d. Zustandsgleich. d. Gase u. Anwendung derselben auf Gemische. Zustandsänd. d. Dämpfe u. technisch u. wissenschaftl. wichtiger Flüssigkeiten (Wasser, Quecksilber, Petroläther, Pentan usw.). Dampfspannungs- u. Siedegesetz. Abhängigkeit d. Zähigkeit d. Gase u. Dämpfe v. d. Temperatur. Abhängigk. d. Zähigk. d. Flüssigkeiten v. d. Temperatur. Abhängigk. d. Kapillaritätskonstanten v. d. Temperatur. Spezif. Wärme. Entropie d. Wasserdampfes. Entropie d. Kaltdämpfe. Änderungen d. Elastizität mit d. Temperatur. Fortpflanzung d. Wärme. Wärmestrahlung. Fortpflanzung d. Wärme durch Leitung. Strömende Bewegung v. Flüssigkeiten, Dämpfen u. Gasen unter Berücksichtigung d. Reibung. Elementare Ableitung d. Gesetze d. ström. Bewegung d. tropfbaren u. elast. Flüssigkeiten aus d. Stromlinienprinzip (Stromfadentheorie).

Librairie Delagrave.

Paris.

Bouasse, H., Pendule spiral diaposon. (Bibliothèque scientif. de l'ingénieur et du physicien). T. 1. — XXVI + 474 pp. 8. 1920. T. 2. — XXII + 515 pp. 8. 1920.

T. 1. Préface: Du professeur idéal. Attraction proportionnelle à la distance. Pendule circulaire. Modes de suspension du pendule circulaire. Mesure de g. Généralité des phénomènes oscillatoires. Ressorts. Compensation des pendules et des balanciers pour la température. Amortissement et entretien des mouvements oscillatoires. Vibrations forcées (impulsions continues). Vibrations forcées (impulsions discontinues). Moteurs d'horlogerie. Rouages.

T. 2. Préface: Des savants. Échappements d'horloges. Échappements pour spiral réglant. Mécanismes divers. Marche des chronomètres. Réglage des chronomètres. Distribution de l'heure. Distribution de l'heure par télélegraphie sans fil. Pendule conique. Applications. Régulateurs. Diapasons, lames flexibles. Composition des vibrations et application. Mesure de très petits intervalles de temps. Systèmes à deux libertés. Systèmes à plusieurs libertés. Table des intégrales elliptiques compl. Conversion des lignes et douzièmes de ligne en millimètres. . .

Gaston Doin.

Paris.

Du Pasquier, Louis-Gustave, Le principe de la relativité et les théories d'Einstein. — XIII + 511 pp. 8. 1922. 18 fr.

P. 1. La doctrine de la relativité restreinte. P. 2. La théorie de la relativité générale.

Wilotte, H., Lois mathématique de la résistance des fluides. — Théorie de l'hélice. (Encyclopédie Scientifique.) — XI + 302 + XII pp. 8. 1921. 12 fr.

I. Exposé des principales lois expérimentales concernant la résistance des fluides. Définit. de la résistance des fluides. Indication de sa mesure approximative dans le cas d'une surface plane animée d'un mouvement de translation normale à son plan. Exposé des princ. méthodes expérim. employées pour reconnaître les lois de rés. des fluides. Etude expér. de la résist. éprouvée par un solide dont le déplacement rel. au fluide qui l'enveloppe est normal au maître-couple de ce solide. Etude expér. des resist. obliques par rapport aux surfaces pressées. Exposé des recherches expér. sur l'hélice. II. Théorie de la résistance des fluides incompressibles. Format. des équations différent. employées. Méthode générale de déterm. des formes de solides à employer. Déterm. des solides limités par une surface de révolut. autour d'un axe parallèle à la vitesse de route. Etude du cas où le solide peut etre limité du coté de son avant. Exist. du point de calme. Déterm. des pressions et de la résist. éprouvés par le solide en vitesse de route. Examen de div. particul. concern. les faits de résist. ci-dessus étudiés. Etude de la résist. dans le cas de mouvements des particules liquides s'effectuant dans des plans parallèles entre eux. Valeur de la pression au point de calme. Applicat. au calcul de la résistance sur la face avant des plaques en mouvement de translation normal à leur plan. III. Théorie de l'hélice en movement dans un fluide incompressible. Exposé de la théorie de l'hélice dans le cas général. Applicat. de la théor. qui précède à la détermin. des formes des l'hélices dans les cas de la pratique. Comparaison avec les disposit. usitées. Etude de la pression sur la face active des ailes des hélices. Règles pour l'établ. d'une bonne hélice. IV. Extension des théories précéd. au cas des fluides compressibles.

J. Eisenstein & Cie.

Wien IX/3.

Hahn, H. & Wirtinger, W., Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des Österr. Bundesministeriums für Inneres und Unterricht. XXXI Band. — 236 pp. 8. 1921.

Müller, E., Relative Minimalflächen. Salkowski, E., Konvexe Äquitangentialkurven. Zindler, Konrad, Über konvexe Gebilde. Wirtinger, W., Bemerkung zur Partialbruchszerlegung. Helly, Eduard, Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Lense, Josef, Über eine kanonische Form der quadratischen Differentialausdrücke. Zilsel, E., Versuch einer neuen Grundlegung der statistischen Mechanik. Palm, F. W., Über die Umrissbestimmung von allgemeinen Schraub- und Drehflächen in zentral- und parallelperspektiven Darstellungen. Victoris, Leopold, Stetige Mengen.

Wilhelm Engelmann.

Leipzig.

Kowalewski, Gerhard, Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Ein Lehr- und Übungsbuch für Studierende zur Einführung in die Infinitesimalrechnung. 2e Aufl. — VIII + 342 pp. 8. 1921. M. 70: — geh., 95: — geb.

Grenzwerte und Reihen. Differentialrechnung. Funktionen von mehreren Veränderlichen. Integralrechnung. Integration unendlicher Reihen. Uneigentliche Integrale. Doppelintegrale.

Kowalewski, Gerhard, Mathematica delectans. Ausgewählte Kapitel aus der Mathematik der Spiele in gemeinverständlicher Darstellung. Heft I: Boss-Puzzle und verwandte Spiele. — 72 pp. 8. 1921. M. 12: — geh.

Das gewöhnliche Boss-Puzzle oder Fünfzehnerspiel. Boss-Puzzle auf einem beliebigen Polygonnetz. Boss-Puzzle auf erweiterten Polygonnetzen.

Fellner u. Zausner.

Korneuburg a./D. Wien.

Klein, Leopold, Streifzüge in das Gebiet der Mathematik und Geometrie. Ein Hilfsbuch für Lehrer u. Schüler Fachverwandter Lehranstalten zur Belebung des Studiums und zur Benützung beim Selbstunterrichte gesammelt. Heft I: Zur Kreislehre über das sogenannte Vivianische Fenster. — 43 pp. 8. 1915. K. 3: —. Heft II: Über eine Verallgemeinerung des Feuerbachschen Kreises. — 32 pp. 8. 1915. K. 3: —. Heft III: Über die Trisektion des Winkels (Anhang über das sog. Delische Problem.) — 78 pp. 8. 1915. K. 4: 50. Heft IV: Über den Feuerbachschen Satz, das Apollonische Problem und Aufgaben aus Theorie u. Praxis. — 96 pp. 8. 1920. K. 9: —

Elementarer Nachweis des Feuerbachschen Satzes. Eine Aufgabe des Detailtrassierens. Eine Aufg. d. darstellenden Geometrie. Krümmungskreis-Korblinie. Ein planimetrischer »Aufsitzer«. Das Apollonische Berührungsproblem. Stereometrische Erweiterung. Magische Zahlenquadrate. Zur Dreiecksgeometrie. Über Paare einander berührender Kreise. Das Malfatti-Steinersche Kleeblattproblem. Pappusche Kreisreihen. Allgemeines über Dreiecksprobleme, Aufgaben. Nachtrag.

Heft V: Steilmessfaulenzer, Nachträge über die Zahl π und Ausgleichsrechnung. — 126 pp. 8. 1917. K. 15: —.

Zur Vermessungskunde. Nachträge zu den vier ersten Heften. Zwei Nachträge z. Apollonischen Problem. Über die Ludolphische Zahl. Zur Ausgleichsrechnung.

J. W. Fergusson & Sons.

Richmond, Va., U. S. A.

WILLIS, EDWARD J., The mathematics of navigation. — 34 pp. 8. 1921. 2: —.

Preface. Right ascension. Latitude. Longitude. Latitude again. The applicat. of differential calculus. The author's method. Conclusion.

Frisch & Co.

Wien—Leipzig—Bern.

NEWEST, TH. (Hans Goldzier), Gegen Einstein: Die Erfahrung im Weltall. Einige Weltprobleme. Allgemeinverständliche Abhandlungen. 2. Aufl. — 95 pp. 8. 1921. M. 10: —.

Gauthier-Villars & Cie.

Paris.

Annuaire pour l'an 1920, publié par le bureau des longitudes. Avec des Notices scientifiques. — VIII — 708 — A 27 — B 64 — C 70. 1920.

1. Calendrier pour l'année 1920. Prédictions. Étude des divers calendriers. 2. Terre. 3. Astronomie. 4. Poids et mesures, monnaies. 5. Données phys. et chim. Supplément pour 1921. Notices: La prévision de la houle, par M. J. RENAUD. Les nouv. unités légales de mesures industr. par M. Ch. LALLEMAND.

Annuaire pour l'an 1921, publié par le bureau des longitudes. Avec des Notices scientifiques. — VII — 710 — A 42 — B 17 — C 69 — 80. 1921.

1. Calendrier pour l'année 1921. Prédictions. Étude des divers calendriers. 2. Terre. 3. Astronomie. 4. Poids et mesures. 5. Statistiques géograph. et démograph., Tables de survie, d'intérêt et d'amortissement. Supplément pour 1922. Notices: Les mouvements propres et les vitesses radiales des étoiles, par M. G. BIGOURDAN. Le Général Bassot par le Général BOURGEOIS.

Boussinesq, J., Théorie Analytique de la Chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. Tome I. Problèmes généraux. (Cours de physique matématique de la faculté des Sciences.) — XXVII + 333 pp. 8. 1901. Fr. 10: — et 100 % majorat. temp.

Introduction. — I. Objet de la théorie analytique de la chaleur; nécessité de l'édifier sur ce fait, que la chaleur est de l'énergie et non de la matière. — II. Application du principe de l'énergie à un solide qui s'échauffe ou se refroidit: définition dynamique des chaleurs sensible, potentielle, totale et des flux de chaleur. — III. De le chaleur, considérée d'abord à l'état de mouvement ondulatoire bien continu, dans l'éther des espaces interplanétaires. — IV. Propagation des ondulations calorifiques, à l'intérieur des corps diathermanes. — V. De l'agitation calorifique, telle qu'elle naît, dans les corps athermanes, de l'accourcissement et du ralentissement presque infinis des ondes de l'éther. — VI. Degré de l'agitation calorifique, évalué par les dilatations qu'elle produit. Notion de température. — VII. Etude des flux de chaleur; réduction de ces flux, pour tous les éléments plans d'une particule, à un courant unique traversant la particule. — VIII. Les flux de chaleur, fonctions de la rapidité des chutes de température entre points voisins et de la contexture. — IX. Potentiel des flux dans une particule symétrique, et construction des courants de chaleur dans une particule quelconque. — X. Autres constructions relatives à la conductibilité, et applications aux barres, aux plaques, aux corps cristallisés. — XI. Equations régissant les variations qu'éprouve, d'un instant à l'autre, la température aux divers points d'un corps ou d'un système de corps. — XII. Détermination complète des températures successives par les équations ou conditions précédentes; cas simples du refroidissement et des températures stationnaires; propriétés de l'ellipsoïde principal dans un milieu homogène. — XIII. Réduction du problème général de l'échauffement aux deux questions du refroidissement simple et des températures stationnaires; cas particulier d'un échauffement périodique. — XIV. Application de la théorie précédente au sol terrestre. — XV. Problème général du refroidissement; étude du cas où il y a un potentiel des flux de chaleur. — XVI. Suite: méthode d'élimination de Fourier; état pénultième du refroidissement. — XVII. Application à l'armille: températures stationnaires et refroidissement de ce corps. — XVIII. Refroidissements comparés de la sphère et du cube. — XIX. Etude plus complète de la sphère; problème du refroidissement du cylindre circulaire. — XX. Aperçus sur le problème du refroidissement des corps à contexture non symétrique; applications et analogies diverses.

Boussinesq, J., Cours de Physique Mathématique de la Faculté des Sciences. Tome III. Compléments aux théories de la Chaleur, de la Lumière, etc. Aperçus de philosophie naturelle. — XLVIII + 417 pp. 8. 1921.

Complément à la théorie de la Chaleur et de la Lumière. Relative à d'autres branches du cours que les théories de la Chaleur et de la Lum. Reflex et recherches sur les bases et la phil. de la mécanique. Problème mécanique de l'organisme animé et de pouvoirs directeurs (vie et volonté). Sur la loi de simplicité, comme indispensable principe directeur de l'esprit dans l'édification des sciences.

Haag, J., Cours complet de Mathematiques spéciales. Tome II. Géométrie. — VII + 662 pp. 4. 1921. 65 fr.

I. Homogénéité. Construction des expressions algébriques. — II. Grandeurs orientées. Projections. — III. Coordonnées. — IV. Lignes et surfaces. — V. Lieux géométriques. — VI. La droite en géométrie plane: Représentation analytique de la ligne droite; Problèmes divers. — VII. Le plan et la droite dans l'espace. — VIII. Théorie des vecteurs: Vecteurs libres; Vecteurs glissants; Systèmes de vecteurs. — IX. Rapport anharmonique. Homographie; Involution; Applications. — X. Coordonnées trilinéaires et tétraédriques. — XI. Le Cercle. — XII. La Sphère. — XIII. Tangentes et plans tangents. — XIV. Etude d'une courbe au voisinage d'un de ses points. — XV. Asymptotes. — XVI. Constructions des courbes planes. — XVII. Etudes des courbes planes en coordonnées polaires. — XVIII. Courbes et surfaces unicursales. — XIX. Théorie des enveloppes: Enveloppes de courbes dans le plan; Enveloppes de surfaces; Enveloppes de courbes dans l'espace. — XX. Coordonnées tangentielles: Coordonnées tangentielles dans le plan; Coordonnées tangentielles dans l'espace. — XXI. Courbure des courbes planes. — XXII. Courbure des courbes gauches. — XXIII. Courbure des lignes tracées sur une surface. — XXIV. Problèmes de Géométrie qui conduisent à des équations différentielles. — XXV. Surface de révolution; hélicoïdes. — XXVI. Surfaces réglées, développables; cônes et cylindres. — XXVII. Notions sur les systèmes de droites. — XXVIII. Transformations.

Livre II: XXIX. Propriétés projectives des courbes et surfaces du second degré. — XXX. Classification des courbes et surfaces du second degré; points à l'infini, centres, diamètres, plans diamétraux. — XXXI. Directions principales; équations réduites en coordonnées rectangulaires. — XXXII. Intersection des coniques et quadriques. — XXXIII. Détermination des coniques et quadriques; équations générales; faisceaux et réseaux. — XXXIV. Foyers. — XXXV. Etude des coniques sur leurs équations réduites: Conique à centre; Parabole. — XXXVI. Etude des quadriques sur leurs équations réduites: Quadriques à centre unique; Paraboloïdes. — XXXVII. Les coniques considérées comme courbes unicursales; rapport anharmonique, homographie. — XXXVIII. Courbes et surfaces du troisième et du quatrième degré. — XXXIX. Courbes cycloïdales. — XL. Courbes et surfaces diverses.

Index generalis. Annuaire général des universités, grandes écoles, académies, archives, bibliothèques, instituts scientifiques, jardins botaniques et zoologiques, musées, observatoires, sociétés savantes publ. sous la direction de R. de Montessus de Ballore. Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère de l'instruction publique. Années 1920—21. — 1845 pp. 8. 1921. 60 fr.

Malet, Henri, Étude géométrique des transformations birationnelles et des courbes planes. — 259 pp. 8. 1921. 32 fr.

Introd. et généralités. Transformations de première grandeur. Transform. simples du plan. Étude géométr. des courbes planes. Transform. birationnelles gén. Transform.

à base commune. Transform. involutives. Correspondances simplement rationnelles de première grandeur.

Michaud, Félix, Rayonnement et gravitation. — VIII + 63 pp. 8. 1922. 6 fr.

P. 1. Optique des corps en mouvement. Position de la question. Quelques précisions liminaires. La vitesse de la lumière, pour un observateur lié à la source, est indépendante de la vitesse de translation de la source. La lumière n'est pas entraînée par le milieu quand le milieu est un gaz très raréfié. Le phénomène de Doppler-Fizeau et l'effet tourbillonnaire. Transmission de la lumière dans les diff. milieux.

P. 2. Gravitation et inertie. Attraction newtonienne. Théorie de l'inertie. Masse gravitante et masse cinétique. Anomalies de la mécanique newtonienne. Électricité et magnétisme.

Poirée, J., Précis d'Arithmétique. — V + 64 pp. 8. 1921. 7 fr. 50.

Préface: — I: Numération. II: Opérations fondamentales. III: Caractères de divisibilité par 2, 5, 4, 3 et 9, 11. Preuve par 9. IV: Plus grand commun diviseur. Plus petit multiple commun. V: Nombres premiers. VI: Fractions. VII: Proportions. Problèmes divers. Système métrique. VIII: Racine carrée. Racine carrée à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ près, etc. Définition d'un nombre irrationnel. IX: Progressions arithmétiques et géométriques. Applications. X: Introduction à la théorie des nombres.

Roy, Louis, Cours de Mécanique rationnelle à l'usage des élèves de l'Institut Électrotechnique et de mécanique appliquée et des candidats au certificat de mathématiques générales. I. (Cours de l'Institut Électrotechnique et de mécanique appliquée de l'Université de Toulouse). VI + 260 pp. 8. 25 fr.

Préface. — Introduction. — Théorie des vecteurs: 1. Définition; 2. Moment d'un vecteur par rapport à un point; 3. Moment d'un vecteur par rapport à son axe; 4. Résultante et moment résultant; 5. Projection du moment résultant sur la résultante; 6. Théorème de Varignon; 7. Variation du moment résultant; 8. Système à résultante nulle; 9. Systèmes équivalents; 10. Réduction d'un système de vecteurs; 11. Discussion; 12. Systèmes particuliers de vecteurs: 1° Vecteurs situés dans un même plan; 2° Vecteurs parallèles; 3° Vecteurs concourants; 13. Réduction géométrique d'un système de vecteurs.

P. 1. Cinématique du point. I. Vitesse: 14. Préliminaires; 15. Vitesse; 16. Cas particuliers; 17. Unités de longueur, de temps et de vitesse; 18. Vitesse dans le mouvement projeté; 19. Vitesse en coordonnées semi polaires; 20. Moment de la vitesse par rapport à un axe, vitesse aréolaire; 21. Mouvement circulaire, vitesse angulaire; 22. Relation entre la vitesse angulaire et le nombre de tours par unité de temps; 23. Exercices. — II. Accélération: 24. Accélération; 25. Cas particuliers; 26. Unités d'accélération; 27. Accélération dans le mouvement projeté; 28. Composantes de l'accélération suivant la tangente et la normale principale à la trajectoire; 29. Mouvement circulaire; 30. Mouvement vibratoire simple. — III. Problèmes sur les lois du mouvement: 31. Méthodes graphiques; 32. Détermination analytique du mouvement par l'accélération; 33. Exemple: Accélération constante en grandeur et en direction.

P. 2. Cinématique du corps solide. I. Composition des vitesses et des accélérations. 34. Mouvement d'un solide, formules générales; 35. Composition des vitesses: 1° Cas de deux mouvements; 2° Cas général; 36. Mouvement de translation, translation instantanée; 37. Mouvement de rotation, rotation instantanée; 38. Composition des accélérations; 39. Application au mouvement de la Terre. — II. Composition des rotations et des translations: 40. Système de rotations; 41. Equivalence au point de vue des vitesses; 42. Couple de rotations; 43. Composition des rotations et des translations; 44. Mouvement hélicoïdal, cas particuliers; 45. Exercice; 46. Deplacement fini; 47. Mouvement élémentaire, centre instantané de rotation; 48. Exercices.

P. 3. Dynamique du point. I. Équations fondamentales: 49. Trièdres fixes; 50. Notion de masse; 51. Notion de force; 52. Composition des forces; 53. Action et réaction; 54. Corps soumis à des liaisons; 55. Equations différentielles du mouvement d'un point; 56. Equations intrinsèques; 57. Equations d'équilibre d'un point; 58. Mouvement et équilibre relatifs; 59. Cas particuliers: 1° Mouvement de translation; 2° Mouvement de rotation uniforme: 60. Pesanteur. — II. Théorèmes généraux sur le mouvement d'un point matériel; 61. Preliminaires, 62. Théorème de la quantité de mouvement projetée; 63. Cas particuliers: 1° La projection de la force sur un axe est nulle; 2° La force a une direction invariable; 64. Théorème du moment de la quantité de mouvement; 65. Théorème des aires; 66. Travail; 67. Unités de travail; 68. Fonction des forces et potentiel; 69. Surfaces de niveau et lignes de forces; 70. Exemples de forces dérivant d'un potentiel: 1° Force constante en grandeur et en direction; 2° Force centrale fonction de la distance au centre; 3° Champ magnétique créé par un courant électrique rectiligne et indéfini; 71. Théorème des forces vives; 72. Intégrale des forces vives; 73. Puissance. — III. Mouvement d'un point matériel libre; 74. Mouvement rectiligne: 1° La force ne dépend que du temps; 2° La force ne dépend que de la position du mobile; 3° La force ne dépend que de la vitesse du mobile; 75 Exemples: 1° Attraction proportionnelle à la distance; 2° Attraction en raison inverse du carré de la distance; 3° Chute d'un point pesant dans un milieu résistant; 76. Mouvement curviligne; 77. Exemples: 1° Mouvement d'un point pesant dans le vide; 2° Attraction proportionnelle à la distance; 3° Repulsion proportionnelle à la distance. — IV. Mouvement et équilibré d'un point matériel soumis à des liaisons; 78. Frottement de glissement; 79. Equilibre d'un point sur une surface; 80. Mouvement sans frottement d'un point sur une surface fixe; 81. Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné; 82. Equilibre d'un point sur une courbe; 83. Exemples; 84. Mouvement sans frottement d'un point sur une courbe fixe; 85. Cas d'un point pesant; 86. Pendule simple; 87. Pendule simple dans un milieu résistant: 88. Exercices.

P. 4. Dynamique des systèmes. I. Théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes de points matériels: 89. Préliminaires; 90. Théorème des quantités de mouvement projetées; 91. Recul des armes à feu; 92. Théorème du mouvement du centre de gravité; 93. Théorème des moments des quantités de mouvement, théorème des aires; 94. Travail des forces, potentiel; 95. Exemples de forces dérivant d'un potentiel: 1° Système pesant; 2° Forces intérieures fonctions de la distance, systèmes conservatifs; 96. Théorème des forces vives. — II. Centres de gravité et moments d'inertie; 97. Centres de gravité; 98. Remarques: 1° Règles de symétrie; 2° Règle de fractionnement;

99. Théorèmes de Guldin; 100. Exemples: 1° Demiellipsoïde homogène; 2° Cône homogène; 3° Segment de cercle homogène; 4° Arc d'hélice homogène; 101. Moments d'inertie; 102. Remarques; 103. Relation entre les moments d'inertie d'un même corps par rapport à deux droites parallèles: 1° L'une des droites passe par le centre de gravité; 2° Les deux droites sont quelconques; 104. Ellipsoïde d'inertie; 105. Règles de symétrie; 106. Exemples: 1° Corps de révolution homogène; 2° Cylindre homogène circulaire droit; 3° Sphère homogène; 4° Rectangle homogène; 5° Cercle homogène. — III. Statique du corps solide: 107. Equations du mouvement d'un solide libre; 108. Equations d'équilibre d'un solide libre; 109. Systèmes de forces équivalents; 110. Réduction des forces appliquées à un solide; 111. Remarques sur les équations d'équilibre: 1° Cas général; 2° Cas ou les forces sont dans un même plan; 112. Solide soumis à des liaisons; 113. Equilibre d'un solide mobile autour d'un point fixe; 114. Equilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe; 115. Equilibre d'un solide mobile sans frottement parallèlement à un plan fixe; 116. Equilibre d'un solide qui s'appuie sans frottement sur un plan fixe; 117. Exercices. — IV. Equilibre d'un système de points matériels soumis à des liaisons sans frottement, méthode du travail virtuel: 118. Equations de liaisons; 119. Déplacements virtuels compatibles avec les liaisons; 120. Liaisons sans frottement; 121. Expressions des réactions; 122. Equations générales de l'équilibre; 123. Théorème du travail virtuel; 124. Résolution du problème général de l'équilibre; 125. Cas où les forces directement appliquées dérivent d'une fonction des forces; 126. Machines simples: 1° Balance de Roberval; 2° Balance de Quintenz; 3° Genou; 4° Cisaille à double levier; 127. Exercices. — V. Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe: 128. Equation du mouvement; 129. Application aux machines; 130. Pendule composé; 131. Machine d'Atwood; 132. Galvanomètre à cadre mobile; 133. Résonance; 134. Exercices. — VI. Percussions et chocs: 135. Impulsion d'une force et percussion; 136. Point matériel soumis à des liaisons; 137. Exemple; 138. Système de points matériels; 139. Choc direct de deux corps; 140. Solide mobile autour d'un axe fixe; 141. Galvanomètre balistique; 142. Exercices. — VII. Equilibre des fils: 143. Equilibre d'un fil soumis à deux forces; 144. Polygone funiculaire; 145. Courbe funiculaire; 146. Equations intrinsèques; 147. Exemples: 1° Fil homogène pesant; 2° Câble de pont suspendu; 148. Fil tendu sur une surface; 149. Fil tendu suivant la section droite d'un cylindre.

VILLEY, J., Physique élémentaire et théories modernes. Première partie. Molécules et atomes. Etats d'équilibre et mouvements de la matière. (Mécanique, Statique des fluides, Chaleur, Elasticité et Acoustique.) — X + 198 pp. 8. 1921. Fr.15: —.

Eléments de Mécanique. Equilibre des solides. La conservat. de l'énergie. Equilibre et propriétés des liquides. Equilibre et propriétés des gaz. Température et quantités de chaleur. Dilatations thermiques. Changements d'état. Elasticité et acoustique. Molécules et atomes.

Ginn & Co.

London.

WENTWORTH, GEORGE and SMITH DAVID EUGENE, Work and Play with numbers. — 140 pp. 8. 60 c.

Number work to 10. Counting to 100. Addition table completed. Practice on the addition table. Numbers to 1 000. Multiplication.

Jul. Gjellerup.

København.

ANDERSEN, A. F., Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode. Med særlig anvendelse overfor Potensrækkernes Teori. 100 pp. 8. 1921.

Grundlaget for den Cesàro'ske Summabil.-met. Teori. Om Differenser. Nogle Summabilitetssætninger. Anvendelser af Generalisationerne af den Bohr-Hardy'ske Sætning. Om Potensrækkers Summabilitetsforhold. Theses.

Hachmeister & Thal.

Leipzig.

BECKER, WALTHER, Die Relativitätstheorie gemeinverständlich dargestellt. (Lehrmeister-Bücherei, 651—653.) — 96 pp. 8. 1921. M. 6: —.

Paul Hartung.

Hamburg.

SCHMIDT, HARRY, Weltäther, Elektrizität, Materie. Physikalische Fragen der Gegenwart. 124 pp. 8. 1921. M. 14: — geh.

Vom Weltäther. Der Michelsonsche Versuch. Neues vom Lichtdruck. Gibt es Elektrizitätsatome? Moderne Blitzforschung. Verflüssigung der Gase. Metallnebel. Aus der Welt der flüssigen Kristalle.

SCHMIDT, HARRY, Zahl und Form. Leichtfassliche Einführung in die Mathematik. 175 pp. 8. 1921. M. 151: — geh.

Von den positiven und den negativen Zahlen. Von den ganzen und den gebrochenen Zahlen. Von den Rationalzahlen und den Irrationalzahlen. Unser Zahlensystem. Logarithmen. Von der Mathematik der Form. Von den Punkten, den Linien und den Winkeln. Von den ebenen Formen. Von den räumlichen Formen.

Librairie scientifique J. Hermann.

Paris.

EDDINGTON, A. S., Exposé théorique de la Relativité Généralisée. Complément mathématique inédit de l'édition fr. d'Espace, Temps et Gravitation. Trad. de l'angl. par J. Rossignol. — IV + 149 pp. 4. 1921. Fr. 9: 60.

Indétermination du système de coordonnées. La forme quadratique fondamentale. La transformat. de Lorenz. Vitesse de la lumière. Signification de la transformat. de

Lorenz. Simultanéité en des lieux différents. Transport des horloges. L'Univers à »3 + 1 dimensions». Transform. de coordonnées. Champs de force. — Vecteurs contrevariants et vecteurs covariants. Vecteur en math. Vect. en physique. Convention de sommation. Tenseurs. Prod. intérieu. Contraction. Loi du quotient. Tenseurs fondamentaux. Tenseurs associés. Symboles à trois indices de Christoffel. Equat. d'une géodésique. Dérivée covariante d'un vecteur. Autre méthode pour trouver l'expression de la dérivée covariante. Dérivée covar. d'un tenseur. Interprétation de la dérivée covar. Tenseur de Riemann-Christoffel. Autr. formules. Probl. génér. de la différentiat. tensorielle. — Caractères de l'espace-temps euclidien. La loi de gravitation d'Einstein. Le champ d'une particule isolée. Orbites planétaires. Mouvement du périhélie. Déviation de la lumière. Principe d'équivalence. Remarques. Tenseur symétrique gauche du quatrième ordre. Densité tensorielle. Divergence d'un tenseur. Les quatre identités. Tens. d'énergie matériel. Loi de gravitation dans la matière continue. La force. Dynamique du point matériel. Identité de la masse gravitationelle et de la masse d'inertie. Action. Une propriété des invar. Résumé. — Equations électromagnétiques. Effets mécaniques de l'électromagn. Tens. d'énergie électromagn. Géometrie de Weyl. Unité de l'Univers. Transform. de jauges. Symbole à trois indices généralisé. Invariance absolue. Tenseur de Riemann-Christoffel généralisé. Les invariants absolus. La jauge naturelle. Tenseur d'énergie électrique et matériel. Problème de la matière. Valeurs numériques.

Goursat, Édouard, Leçons sur le problème de Pfaff. — VIII + 386 pp. 8. 1922. Fr. 30: —.

Formes canoniques d'une expression de Pfaff. Intégration d'une équation de Pfaff. Formes symboliques de différentielles. Application des formes symboliques au problème de Pfaff. Invariants intégraux. Classe d'un système de Pfaff. Caractéristiques. Systèmes dérivés. Problème de Monge. Multiplicités intégr. Genre d'un système de Pfaff.

Goursat, Édouard, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. 2e édit. revue et aug. — 459 pp. 8. 1921. Fr. 20: —.

Théorèmes d'existence. Équations linéaires, systèmes complets. Équations linéaires aux différentielles totales. Intégrales complètes, méthode de Lagrange et Charpit. Méthode de Cauchy. Caractéristiques. Étude géométrique des équations à trois variables. Courbes intégrales, solutions singulières. Première méthode de Jacobi. Seconde méthode de Jacobi. Généralisation de Mayer et de Lie. Théorie générale de Lie. Transform. de contact. Groupes de fonctions. Méthode générale d'intégration.

Otto Hillmann, Verlagsbuchhandlung.

Leipzig.

Alliata, Giulio, Verstand contra Relativität. Zum Nachweis der Translation des Sonnensystems. — 83 pp. 8. 1922. M. 22: —.

Das Einsteinsche Relativitätsprinzip. Experimentum crucis? Kritik d. Einsteinschen Begriffe. Kritik z. bisher. Interpretation d. Versuche von Michelson u. Morley u. deren Interpretation durch d. Verfasser. Nachweisung d. absoluten Bewegung d. Erde. Das Weltbild.

Geissler, Kurt, Gemeinverständliche Widerlegung des formalen Relativismus (von Einstein und verwandten) und zusammenhängende Darstellung einer Grundwissenschaftlichen Relativität. — 80 pp. 8. 1921. M. 15: — geh.

Widerlegung des formalen Relativismus. Die Lobpreisung. Bezieht sich die formale Relativismus nur auf physikalische Messungen? Gibt die mathemat. Darstellung Beweise oder neue Tatsachen? Die winzige Grösse der in Betracht kommenden Messungen und die Mangelhafte Genauigkeit. Die Widersprechenden Versuche und ihre Auslegungen. Die formalen Relativitätslehren kritisch betrachtet. Die Verödung der Physik durch die reinformale Behandlung. Was ist am formalen Relativismus neu? Was für relativist. Lehren mathemat.-physik. Art gingen ihm voraus? Zusammenhängende Darstellung einer grundwissenschaftlich. Relativität. Allgemeine Betrachtung über Beweg. und Ruhe. Satzuafstellung über die Relativ. der Raum- und Zeitgrössen mit Berücksichtigung der Philos. der Seinsgebiete. Bedeut. der Rel. in der allgem. Grundwissenschaft.

Richter, Hans, Die Entwicklung der Begriffe: »Kraft, Stoff, Raum, Zeit», durch die Philosophie mit Lösung des Einsteinschen Problems. — 30 pp. 8. 1921.

Ferdinand Hirt.

Breslau.

Lietzmann, Walther, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. Beispiele aus der Unterhaltungsmathemathik. — 187 pp. 8. 1922. M. 30: —.

1. Allerlei Arten Unterhaltungsmathematik. 2. Von d. Zahlen. 3. Von d. Formen.

Ulrico Hoepli.

Milano.

Berzolari, Luigi, Geometria Analitica. I: Il metodo delle coordinate. (Manuali Hoepli.) — IV + 495 pp. 8. 1920.

Preliminari. Coordinate nelle forme fondamentali di prima specie. Projezioni ortog. sopra una retta. Applicaz. alla trigonometria piana e sferica. Coordinate nel piano punteggiato. Equaz. di una retta. Equaz. di curve piane. Coordinate nel piano rigato. Coordinate nello spazio punteggiato. Equaz. di un piano. Equaz. di una retta. Equaz. di superficie e di curve. Coordinate nello spazio di piani. Birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie. Gruppi armonici. Coordinate projettive e projettività nelle forme di prima specie. Coordinate cartesiane e plückeriane omogenee di punti e rette nel piano, di punti e piani nello spazio. Coordinate projettive nelle forme di secondo e terza specie. Projettività tra forme di seconda specie. Projettività tra due spazi. Elementi di Analisi vettoriale ed applicaz. alla Geometria analitica.

Poletti, Luigi, Tavole di Numeri Primi entro limiti diversi e tavole affini. (Manuali Hoepli.) — XVIII + 294 pp. 8. 1920. L. 10: 50.

Série dei N. P. entro i 200.000 n. succ. Serie dei N. P. entro i 100.000 n. oltre 10 milioni, entro i 10.000 n. oltre 100 milioni, entro 100.000 n. oltre un miliardo. Serie div. di N. P. fra 32 e 80 milioni. Scomposizione dei primi 50.000 numeri. Tavola di moltiplicaz. pei prodotti compresi entro 50.000. Serie dei N. P. di forma $N = n(n-1)-1$ compresi fra 1 e 10.400.000. Tavole div. sui fenom. di frequenza dei N. P.

P. S. King & Son, Ltd.

London S. W. 1.

Bowley, Arthur L., Elements of statistics. Fourth Edit. — X + 454 pp. 8. 1920. 24 s.

I. General elementary methods. Scope and meaning of statistics. The general method of statistical investigation. Definition of unit. Collection of data. Tabulation. Averages. Measurements of dispersion and of skewness. Application of averages. Graphic method. Accuracy. Index-numbers. Interpolation. II. Applications of mathematics to statistics. Introductory. Frequency groups and curves. Algebraic probility and the normal curve of error. Law of great numbers. Application of the law of error. Empirical frequency equations. Theory of correlation. Examples of correlation. Partial and multiple correlation. Precision of measurements of averages, moments and correlation. Tests of correspondence between data and formulae appendix. Math. notes.

Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

Amsterdam.

Schouten, J. A., Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie. (Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Eerste Sectie, Deel XII, No 6.) — 95 pp. 4. 1919.

Das Zahlensystem $R^0_{4\infty}$ der orthogonalen Gruppe in vier Grundvariablen. Die Analysis zur allgemeinen Relativitätstheorie. Anwendungen.

S. Lattes & C.

Torino.

Vivanti, Giulio, Lezioni di analisi infinitesimale. 2ª ed. rived. ed ampliata. (Biblioteca tecnico-industriale.) — VII + 693 pp. 8. 1920. L. 50.

Preliminari analit. Derivate ed integrali delle funzioni d'una variabile. Derivate ed integrali delle funzioni di più variabili. Applicazioni geometr. Equazioni differenziali. Elementi del calcolo delle variazioni.

Vivanti, Giulio, Esercisi di analisi infinitesimale. 2ª ed., accuratamente rived. ed aumentata con la collaborazione di Filippo Sibirani. (Biblioteca tecnico-industriale.) — VII + 615 pp. 8. 1920. L. 42.

Preliminari analit. Derivate delle funzioni d'una variabile. Derivate ed integrali delle funzioni di più variabili. Applicazioni geometr. Equazioni differenziali. Elementi del calcolo delle variazioni.

The Macmillan Company.

New York.

Osgood, William, F., Elementary calculus. — IX + 224 pp. 8. 1921.

Introduction. Differentiation of algebraic functions. General theorems. Applications. Infinitesimals and differentials. Trigonometric functions. Logarithms and exponentials. Applications. The inverse trigonometric functions.

Erich Matthes, Verlagsbuchhandlung.

Leipzig.

Hentschel, Willibald, Das Relativitätsprinzip im Rahmen einer Gesamtansicht von Welt und Mensch. — 77 pp. 8. 1921. M. 5: — geh.

Welche Auffassung der lebenden Natur die richtige ist? Unsere Ansicht vom Raume. Zeit und Zeitgefälle. Über Rechenkünste. Über die Natur des Lichtes. Der Substansbegriff. Über das Dopplerprinzip. Über die Bewegung. Der Michelson-Versuch. Die allgemeine Relativitätstheorie. Schlussfolgerungen. Der Relativismus im geistigen und moralischen Leben des Volkes. Nachwort.

P. Noordhoff.

Groningen.

Baudet, P. J. H., Het Limietbegrip. Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleeraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de mechanica aan de Technische Hoogeschool de Delft, den 5den Nov. 1919. — 19 pp. 8. Fl. 0: 75.

van Os, Ch. H., Iets over de Ontwikkeling der Meetkunde. Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool te Delft, op 31 Oct. 1919. — 21 pp. 8. 1919. Fl. 0: 75.

Schrek, D. J. E., Beginselen der Analytische Meetkunde. — VIII + 144 pp. 8. 1919. Fl. 1: 90 + 20 % Crisistoeslag.

Coördinaten. Vergelijkingen tusschen coördinaten. De rechte lijn. Twee en meer rechte lijnen. De cirkel. Twee en meer cirkels. Meetkundige plaatsen. De kegelsneden in het algemeen. De parabool. De ellips. De hyperbool. Transformatie van coördinaten. De algemeene vergelijking van den tweeden graad. Het bepalen van kegelsneden door gegeven voorwaarden. Bundels van kegelsneden.

Vries, Hk. de, Leerboek der Differentiaalen Integraalrekening, en van de Theorie der Differentiaalvergelijkingen. Deel I. De Differentiaal-, en elementaire Integraalrekening. (Noordhoffs Verzameling van Wiskundige Werken. Deel 6.) — 768 pp. 8. 1919.

Grondslagen der Differentiaalrekening. De afgeleiden der elementaire functies. Hoogere afgeleiden en differentialen. Impliciete functies. Particele afgeleiden. Het invoeren van nieuwe veranderlijken. Grondslagen der Integraalrekening. Het integreeren van rationale en irrationale breuken. Bepaalde integralen, en eenvoudige meetkundige toepassingen der Differtiaal- en Integraalrekening. Theorie der oneindige reeksen. De reeksen van Taylor en Mac-Laurin. Toepassingen der Differentiaal- en Integraalrekening op de theorie der vlakke krommen. Kromming van vlakke krommen. Kromtestraal, krommingsmiddelpunt, evoluut, enz. Functies van meer dan één veranderlijke. Meervoudige integralen. Meetkundige toepassingen der functies van één en twee onafhankelijk veranderlijken.

Vries, Hk. de, Leerboek der Differentiaalen Integraalrekening, en van de Theorie der Differentiaal Vergelijkingen. Deel II. Integraalrekening. (Noordhoffs Verzameling van Wiskundige Werken. Deel 6.) — 463 pp. 8. 1920. Fl. 16:50.

Theorie der bepaalde integralen. Aanvulling van de leer der dubbele en meervoudige integralen. Lijn en oppervlakintegralen. De Integralen van Euler, of de Beta- en Gammafunctie. Oneindige reeksen. Niet differentieerbare functies. De reeks van Fourier. Elliptische integralen en functies. Functies van één complexe veranderlijke. Integralen en reeksen van functies van één complexe veranderlijke. Meerwaardige functies en Riemann'sche oppervlakken. Dubbel-periodieke functies.

Oxford University Press.

London E. C. 4.

Hilton, Harold, Plane algebraic curves. — XV + 388 pp. 8. 1920. 28 s. cloth.

Introductory. Singular points. Curve-tracing. Tangential equation and polar reciprocation. Foci. Superlinear branches. Polar curves. Plücker's numbers. Quadratic transformation. The parameter. Derived curves. Intersections of curves. Unicursal cubics. Non-singular cubics. Cubics as Jacobians. Use of parameter for non-singular cubics. Unicursal quartics. Quartics of deficiency one or two. Non-singular quartics. Circuits. Corresponding ranges and pencils.

Payot & Cie.

Paris.

Appell, P., Eléments de la théorie des vecteurs et de la géométrie analytique. (Collection Payot.) — 147 pp. 1921. Fr. 4: —.

1. Géom. sur une droite ou géom. à une dimension. 2. Vecteurs, somme géométr., moments. 3. Géom. analyt. à deux dimensions. Coordonnées, lignes. Ligne droite.

Courbes planes, généralités. Cercle. Ellipse, hyperbole et parabole. 4. Géom. dans l'espace. Vecteurs. Surfaces et lignes. Plans. Ligne droite. Droites et plans. Sphère.

FABRE, LUCIEN, Les théories d'Einstein. Nouv. éd. épurée, accrue de notes liminaires, d'un exposé des théories de Weyl, et de trois notes de MM. GUILLAUME, BRILLOUIN et SAGNAC sur leurs propres idées. — 255 pp. 8. 1922. Fr. 7: 50.

Exposé élémentaire et vue d'ensemble des théories d'Einstein. Genèse des théories de la relativité de Newton à Einstein. Exposé logique des théories de la relativité. Le principe de la relativité restreinte. Le principe de la relativité univ. Valeur des théories de la relativité.

Press of the University of Pennsylvania.

Philadelphia.

SMITH, HENRY BRADFORD, A primer of logic. — 48 pp. 8. 1917.

SMITH, HENRY BRADFORD, Non-Aristotelian logic. — 40 pp. 8. 1919.

SMITH, HENRY BRADFORD, Letters on logic to a young man without a master. — 53 pp. 8. 1920.

SMITH, HENRY BRADFORD, Foundations of formal logic. — 56 pp. 8. 1922.

Forms of proposition recognized by the logician. Relations of »better» and »worse». Immediate inference. Moods of the syllogism. General solution of the sorites. Foundations of the calculus. General solution of the syllogism. Certain supposed fallacies. Alternative systems. Non-Aristotelian logic. The class. system and its verification.

Luigi Pierro.

Napoli.

AMODEO, FEDERICO, Lezioni di geometria proiettiva dettate nella R. Università di Napoli. 3ª ed. migliorata e corretta . . . 2ª ristampa con appendice di modifiche e aggiunte. — XV + 450 + 52 pp. 8. 1920. L. 20.

Introd. P. 1. Forme di 1° ordine.

Forme Semplici. Elementi immaginarii nelle forme sempl. Forme di 2ª e di 3ª specie.

P. 2. Forme di 2° ordine a una dimensione.

Proprietà proiettive delle forme di 2° ordine ad una dimensione. Proprietà polari delle forme di 2° ordine a una dimensione. Proiettività di 2° ordine. Problemi di 1°, 2° e 3° grado. Coppie di coniche.

Appendice.

AMODEO, FEDERICO, Complementi di analisi algebrica elementare. P. 2 del vol. 2 degli Elementi di matematica. Ad uso del 2° biennio degli istituti tecnici. 3ª ed. migliorata ed aumentata. — 404 + XXXIII pp. 8. 1920. L. 7: —.

Elementi di analisi combinatoria. Frazioni continue. Disequazioni e sistemi di disequazioni. Analisi indeterminata di 1° grado. Funzioni finite. Limiti. Applicazioni. Diagrammi e loro applicazioni. Funzioni continue. Derivate. Forme indeterminate. Applicazioni. Massimi e minimi. Discussione delle funzioni. Discussioni di equazioni e di problemi di 2° grado. Concetto d'integrazione.

The Royal Geographical Society.

London, S. W. 7.

YOUNG, ALFRED ERNEST, Some investigations in the theory of map projections. (R. G. S. Technical Series: No. 1.) — VII + 76 pp. 8. 1920. 6 s. net.

I. The Minimum Error Projections. Airy's Zenithal Proj. Breusing's proj. Orthomorphic and equal area. Equidistant. With total area true. Perspective. With scale true at centre. Evaluation of average Error. II. The Minimum Error Conical Projections. Ortomorphic. Approximately equal area. Minim. error map of zone. Radial scale true. Plate-Carrée. Cassini. Mercator. Conformal of Gauss. Euler's with two standard parall. Murdoch's proj. Equidistant with total area true. Albert's equal area. Collignon's World map. G. W. Hill's proj. Best proj. for given country. Mathematical paradox. III. The Conical Orthomorphic Proj. with two standard parallels. (Lambert's second) for the Spheroid. IV. The Polyconic Projections. Equal area a. orthomorphic. Langrange's for the Spheroid. The finite errors of project. The Convergency of Meridians. Expansions used in the work.

L. W. Seidel & Sohn.

Wien.

CZUBER, EMANUEL, Die statistischen Forschungsmethoden. — X + 238 pp. 1921. M. 60: —, geb. M. 72: —.

Abschn. 1. Theorie d. festen Markmale. Bezeichn. d. Merkmale u. ihrer Verbind. Abhängigk. v. Merkmalen. Mittelbare Abhängigk. Mehrfache Klassifikation.

Abschn. 2. Verteilungen in Kollektiven. Mittelwerte. Streuungsmasse. Korrelation zwischen zwei Variablen: Theori, prakt. Durchführung. Gebrauch d. Korrelationskoeffizienten. Korrelation zwischen mehr als zwei Variablen.

Abschn. 3. Bezugnahme auf d. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Prüfung statist. Reihen auf ihre Zufallsnatur. Binomiale Verteilung. Normale Häufigkeitskurve. Normale Korrelation.

ROTHE, HERMANN, Vorlesungen über höhere Mathematik. — XI + 691 pp. 8. 1921. M. 66: —, geb. M. 84: —.

1. Grundbegriffe d. Funktionenlehre. Der Zahlbegriff. Der Grenzbegriff. Der Funktionsbegriff. 2. Differentialrechnung. Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen. Höhere Ableitungen u. Differentiale v. Funktionen einer Veränderlichen. Differentiation v. Funktionen v. mehreren Veränderlichen. Implizite Funktionen. 3. Integralrechnung. Das unbestimmte Integral. Das bestimmte Integral. Uneigentl. Integrale. Merfache Integrale. Geometr. Anwendungen d. Integralrechnung.

Sibyllen-Verlag.

Dresden.

PETZOLDT, JOSEPH, Die Stellung der Relativitätstheorie in der geistigen Entwicklung der Menschheit. — 131 pp. 8. 1921. M. 8: 50, geb. M. 12: 50 (+ Zuschläge).

Stellungen d. mechan. Naturansicht. Angriff d. Philosophen. Philosoph. Sieg. Angrifff d. Physiker. Physikal. Sieg. Geschlossene Front.

Society for Promoting Christian Knowledge.

London, W. C. 2.

HEATH, THOMAS, Archimedes. (Pioneers of Progress. Men of Science.) — 58 pp. 8. 1920. 1 s. 6 d, paper. 2 s. 6 d cloth.

Archimedes. Greek geometry to Archimedes. Works of Archimedes. Geometry of Archimedes. Sandreckoner. Mechanics. Hydrostatics. Bibliogr. Chronology.

Julius Springer.

Berlin, W. 9.

BORN, MAX, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen. Elementar dargestellt. Zweite, umgearbeitete Auflage. (Naturwissenschaftliche Monographien und Lehrbücher. Dritter Band.) — XI + 261 pp. 8. 1921. M. 156: — in Schweden.

FRAENCKEL, ALFRED, Theorie der Wechselströme, 2:e, erw. u. verbess. Aufl. — VII + 352 pp. 8. 1921. In Deutschl.: M. 63: —, in Schweden: M. 252: —.

KNOPP, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. (Die Grundlehren d. mathemat. Wiss. ... herausg. v. R. Courant. Bd 2.) — X + 474 pp. 8. 1922. M. 168: —, in Schweden M. 672: — (geb. M. 180: — resp. 720: —).

LEHMANN, W., Energie und Entropie. Eine leicht verständliche Darstellung ihres Wesens und der Grundlagen der Energiewirtschaft. — 40 pp. 8. 1921.

Stanford University.

California.

Manning, W. A., Primitive Groups. P. 1. — 108 pp. 8. 1921. Dol. 1: 25.

The elementary theory of groups of permutations. Transitive groups. Groups characteristics. Applications of group characteristics. Transitive groups. Primitive groups with transitive sub-groups of lower degree.

Theodor Steinkopff.

Dresden & Leipzig.

Bollert, Karl, Einstein's Relativitätstheorie und ihre Stellung im System der Gesamterfahrung. — 70 pp. 8. 1921. Kr. 1: 90.

B. G. Teubner.

Leipzig & Berlin.

Bieberbach, Ludwig, Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd 1. Elemente der Funktionentheorie. — IV + 314 pp. 8. 1921. Kr. 13: 65, geb. 15: 60.

Komplexe Zahlen. Grenzwerte u. Reihen. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Studium einiger spez. Funktionen. Integralrechn. i. komplexen Geb. Die Cauchysche Integralformel. Das Residuum. Analyt. Fortsetzung. Einiges üb. algebr. Funktionen. Einiges üb. Integrale algebr. Funktionen. Abriss einer Theorie d. ellipt. Funktionen. Einfachperiod. Funktionen. Allgem. Sätze üb. d. Darstellung d. analyt. Funktionen durch Reihen u. Produkte. Die Gammafunktion.

Bieberbach, Ludwig, Differential- und Integralrechnung. Bd 1. Differentialrechnung. 2:e, verm. u. verbess. Aufl. (Teubners technische Leitfäden. Bd 4.) — VI + 132 pp. 8. 1922. Kr. 2: 30.

Bieberbach, Ludwig, Funktionentheorie. Mit 34 Figuren im Text. (Teubners technische Leitfäden. Bd 14.) — 118 pp. 8. 1922. Kr. 3: 10.

Czuber, Emanuel, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band. 5:e durchgesehene, anastatisch gedruckte Auflage. — XI + 599 pp. 8. 1921.

I. Grundlagen der Integralrechnung. Das bestimmte u. das unbestimmte Integral. Grundformeln u. Methoden der Integralrechnung. II. Unbestimmte Integrale. Integration rationaler Funktionen. Integration irrationaler Funkt. Integr. transzendenter Funkt. III. Einfache u. mehrfache bestimmte Integrale. Wertbestimmung u. Schätzung bestimmter Integrale. Erweiterung des Integralbegriffs. Integration unendlicher Reihen. Differentiation durch Integrale definierter Funktionen. Integrat. durch Integr. defin. Funkt. Das Doppelintegral. Drei- u. mehrfache Integrale. Kurvenintegrale. Integrale von Funktionen einer komplexen Variablen. Analyt. Anwendungen. IV. Anwendungen der Integralrechnung. Quadratur ebener Kurven. Rektifikation von Kurven. Kubatur krummflächig begrenzter Körper. Komplanation krummer flächen. Massen-,

Moment- u. Schwerpunktbestimmungen. Die Sätze von Green. Das Potential. V. Differentialgleichungen. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differentialgleichungen erster Ordnung. Allgemeines. Integrationsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung. Singuläre Lösungen gewöhnlicher Differentialgleich. erster Ordnung. Geometrische Anwendungen. Systeme von Differentialgleichungen. Differentialgleich. höherer Ordnung. Lineare Differentialgleich. Integration durch Reihen. Elemente der Variationsrechnung. Graphische Integrat. Partielle Differentialglech. erster Ordnung. Partielle Differentialglech. zweiter Ordnung.

Fricke, Robert, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. T. 2: Die algebraischen Ausführungen. — VIII + 546 pp. 8. 1922.

Zusammenstellung v. Sätzen aus d. Algebra u. Zahlentheorie: Endliche Gruppen. Algebraische Gleichungen. Alg. Funktionen. Alg. Zahlen. Quadratische Köper u. Formen negativer Diskriminante. — Additionssätze d. ellipt. Funktionen. Multiplikationssätze d. ellipt. Funktionen. Divisionssätze d. ellipt. Funkt. Teilwerte d. ellipt. Funkt. — Transformation n^{ten} Grades u. allgemeine Tansformationsgleichungen. Systeme ganzer ellipt. Funktionen dritter Art n^{ter} Stufe. Spezielle Transformationsgleichungen erster Stufe. Aufstellung d. Transformationsgleichungen erster Stufe f. niedere Grade n. Gruppen der speziellen Transformationsgleichungen u. die drei Resolventen d. Grade 5, 7, u. 11. Spezielle Transformationsgleichungen höherer Stufen.

Gehrcke, E., Physik und Erkenntnistheorie. (Wissenschaft und Hypothese XXII.) — 119 pp. 8. 1921. Kr. 5:10 geh., Kr. 6:40 geb.

Pringsheim, Alfred, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. Bd I. Vorlesungen über Zahlenlehre (reelle und komplexe Zahlen, unendliche Algorithmen). Abt. 3. Komplexe Zahlen, Reihen mit komplexen Gliedern, unendliche Produkte und Kettenbrüche. (B. G. Teubner's Samml. von Lehrbüchern auf d. Geb. d. mathemat. Wissenschaften . . . Bd 40: 1: 3.) — IX + pp. 515—976. 8. 1921. Kr. 22:40, geb. Kr. 29:60.

Abschn. 3. Komplexe Zahlen, unendl. Reihen u. Produkte aus komplexen Zahlen. Komplexe Zahlen, Zahlenfolgen u. Grenzwerte. Unendl. Reihen mit komplexen Gliedern. Unendl. Produkte.

Abschn. 4. Endl. u. unendl. Kettenbrüche.

Allgem. Grundlagen d. Lehre v. d. Kettenbrüchen. Endl. u. unendl. Kettenbrüche aus reellen Zahlen. Kettenbrüche aus komplexen Zahlen.

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger.

Berlin & Leipzig.

Burkhardt, Heinrich, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen veränderlichen. 5., umgearb. Aufl. von Georg Faber. — VI + 286 pp. 8. 1921.

Komplexe Zahlen und ihre geometrische Darstellung. Die rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen und die durch sie vermittelten konformen Abbildungen.

Definitionen und Sätze aus der Theorie der reellen Veränderlichen und ihrer Funktionen. Eindeutige analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Mehrwertige analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Analytische Gebilde und Riemannsche Flächen.

Burkhardt, Heinrich, Algebraische Analysis. 3., umgearb. Aufl. besorgt von G. Faber. (Burkhardt, H., Funktionentheoret. Vorlasungen. Neu herausgeg. von G. Faber. Bd 1: Heft 1.) — VI + 182 pp. 8. 1920.

Einl.: Aufgaben d. algebraischen Analysis. Das Rechnen mit positiven ganzen Zahlen. Die Null u. d. negat. Zahlen. Die Brüche. Definition d. irrationalen Zahlen. Addition u. Subtraktion irrationaler Zahlen. Der Begriff d. Grenzwerts. Multiplikation u. Division irrationaler Zahlen. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen. Unendl. Reihen. Stetige Funktionen. Die binom. Reihe. Die Potenzreihen f. d. Logarithmus u. d. Exponentialfunktion. Die trigonometr. Funktionen. Allgem. Sätze üb. Potenzreihen.

Groll, M., Kartenkunde. 2te Aufl. Neubearb. v. Otto Graf. I. Die Projektionen. (Sammlung Göschen 30.) — 116 pp. 8. 1922. Kr. 1: 20.

Allgemeines üb. Abbildung d. Kugeloberfläche. Abbildungen auf d. Kegelmantel od. Kegelprojektionen. Abbildungen auf d. Zylindermantel od. Zylinder-projektionen. Konventionelle Projektionen. Übersicht d. Projektionen.

Heiland, Fritz, Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. (Sammlung Göschen 848.) — 152 pp. 8. 1922. Kr. 1: 25.

Junker, Fr., Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. 3., verb. Aufl. Neudr. (Samml. Göschen 147.) — 135 pp. 8. 1922. Kr. 1: 20.

Einfache unbestimmte Integrale. Integration rationaler algebr. Differentiale. Integr. irrationaler Differentiale. Integr. transzendenter Differentiale. Bestimmte Integrale. Anwendung d. Integralrechnung auf d. ebene Geometrie. Anwendung d. Integralrechnung auf d. Geometrie d. Raumes. Schwerpunktsbestimmungen. Anwendung v. Doppelintegralen z. Berechn. v. Flächen- u. Raumgebilden. Gewöhnl. Differentialgleichungen erster Ordnung.

Lenard, P., Über Kathodenstrahlen. Nobel-Vortrag gehalten in öffentlicher Sitzung der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften zu Stockholm. 2., verm. Aufl. mit 11 Abbild. — 120 pp. 8. 1920.

Schaefer, Clemens, Einführung in die theoretische Physik. In zwei Bänden. Bd 2: T. 1. Theorie der Wärme, Molekular-kinetische Theorie der Materie. Mit 71 Fig. im Text. — X + 562 pp. 8. 1921. Kr. 7: 20.

4. Buch: Theorie der Wärme. Einleitung: Grundtatsachen u. Definitionen. Theorie d. Wärmeleitung. Der erste Hauptsatz d. Wärmetheorie. Der zweite Hauptsatz d. Wärmetheorie. Physikalisch homogene Systeme. Physikalisch heterogene Systeme. Spezielle Systeme (Gase u. verdünnte Lösungen). Die chem. Affinität u. d. Wärmetheorem v. Nernst.

5. Buch: Molekular-kinet. Theorie d. Materie. Elementare kinet. Theorie d. Gase. Entropie u. Wahrscheinlichkeit. Statist. Mechanik. Eingreifen d. Quantentheorie.

SCHUSTER, AUGUST, Mathematische Unterrichts-Briefe. T. II. (Übungsbuch.) — IV + 288 pp. 8. 1922. Kr. 4: 80.

T. I. Bestimmung des Wertes des Quotienten $q = 8$ auf elementarem Wege. Bestimmung des Summenwertes unendl. Reihen auf elementarem Wege. Differentialrechnung. Integralrechnung. Differentialgleichungen.

T. II. Resultate und Anleitungen zur Lösung der Übungsbeispiele 122—288.

Friedr. Vieweg & Sohn.

Braunschweig.

GRAMMEL, R., Der Kreisel, Seine Theorie und seine Anwendungen. — X + 350 pp. 8. 1920. M. 42: — geh.

I. Die Theorie des Kreisels. Der kräftefreie Kreisel. Der Kreisel unter Zwang. Der schwere Kreisel. II. Die Kreiselwirkungen bei Radsätzen. Mittelbare Stabilisatoren. Unmittelbare Stabilisatoren.

VON LAUE, M., Die Relativitätstheorie. Bd 2. Die allgemeine Relativitätstheorie und Einsteins Lehre von der Schwerkraft. — XII + 276 pp. 8. 1921. M. 19: 20, geb. M. 23: —.

Unser Wissen v. d. Schwerkraft. Die allgem. Relativitätstheorie. Weltvektoren u. -tensoren in Riemannschen Räumen. Nichteuklid. Geometrie. Die Grundgesetze d. Physik in d. allgem. Relativitätstheorie. Anwend. d. Grundgesetze auf besond. Fälle. Strenge Lösungen d. Feldgleichungen in Einsteins Theorie d. Schwere. Mies Theorie d. Materie.

SEELIGER, R., Aufgaben aus der theoretischen Physik. Herausgegeben in Verbindung mit Prof. F. HENNING und Prof. R. v. MISES. — IX + 154 pp. 8. 1921. M. 28: —.

I. Teil: Aufgaben. Vektorrechnung (F. Henning). Mechanik (R. v. Mises). Punktmechanik. Starrer Körper. Systeme starrer Körper. Lebende Körper. Elastische Körper. Hydro- und Aeromechanik. Verschiedene Aufgaben. Elektrizität und Magnetismus (R. Seeliger). Elektrostatik. Magnetostatik. Stationäre Ströme. Quasistationäre Vorgänge. Wärmelehre (F. Henning). Optik (R. Seeliger). Elektromagnetische Wellen. Brechung, Reflexion, Interferenz und Beugung, Geometrische Optik. II. Teil: Lösungen. Vektorrechnung. Mechanik. Elektrizität und Magnetismus. Wärmelehre. Optik.

Winckelmann & Söhne.

Berlin.

KLAUS, ALFRED, Atome—Elektronen—Quanten. Die Entwicklung der Molekularphysik in elementarer Darstellung. — 100 pp. 8. 1921. M. 47: —.

1. Atomistik d. wägbaren Stoffe. 2. Atomistik d. Elektrizität (Elektronen). 3. Atomistik d. Energie (Quanten).

Leopold Voss.

Leipzig.

Lorenz, Richard, Raumerfüllung und Ionenbeweglichkeit. Mit 17 Fig. im Text und 1 Tafel. — VI + 289 pp. 8. 1922. M. 105: —, geb. M. 120: —.

Einführung. Übereinstimm. Zustände. Raumerfüllung u. Ionenbeweglichk. Leitvermögen d. starken Elektrolyte. Ionenbeweglichk. Hydrodynam. Beweglichk. Elektrodynam. Ionenbeweglichk.

Nicola Zanichelli.

Bologna.

Burali-Forti, C., & Marcolongo, R., Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica. 2ª ed. riordenata e ampliata. — XIX + 250 pp. 8. 1921. L. 20: —.

P. 1. Operazioni ed operatori vettoriali. Somma e prodotto per un numero. Prodotto interno e vettoriale. Calcolo baricentr. Rotazioni in un piano. Funzioni di numeri. Funzioni di un punto. Formazioni geometr.

P. 2. Applicazioni del calcolo vettoriale alla geometria, alla meccanica e alla fisica matematica.

Applicazioni alla geometria differenziale. Formule di calcolo integr. Applic. alla meccanica. Applic. all'idromeccanica. Applic. alla teoria dell'equilibrio dei corpi elast. isotrope. Applic. all' elettrodinamica. Quaternioni di Hamilton. Note storiche. Bibliografia.

Tonelli, Leonida, Fondamenti di calcolo delle variazioni. Vol. I. — VII + 466 pp. 8. 1921. L. 55: —.

1. Teorie introduttorie. Le curve. Insiemi di funzioni e insiemi di curve. Pseudointervalli e funzioni quasi-continue. L'integrale del Lebesgue. 2. Funzioni de linee, forma parametr. Gli integrali in forma parametr. Condizioni necessarie per la semicontinuità. Condizioni sufficienti per la semicontinuità. 3. Funzioni di linee. Gli integrali in forma ordinaria. Condizioni necessarie per la semicontinuità. Condizioni sufficienti per la semicontinuità. Ulteriori proprietà degli integrale I_c.

Divers.

Thèses de doctorat.

Antoine, Louis, Thèses présentés à la faculté des sciences de Strasbourg. 1. Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. 2. Propositions données par la faculté. — 105 pp. 4. 1921. Gauthier-Villars, Paris.

Curzon, H. E. J., The reversal of Halphen's transformation. — 15 pp. 8. 1920. 1/- net. Constable and Co., Ltd., London.